粒子物理学

陈申见

南京大学物理学院

（内部资料，仅供教学）

二〇一〇年春 南京

内 容

第 1 章　基本概念

“物质能否一分再分？”“组成物质世界的最基本单元是什么？”“物质之间是如何相互作用的？”… 从遥远的古代人们就一直在思索这些问题，而对这些问题的答案也在不断演变。从朴素的猜测到科学的实验研究，人们对物质世界的认识不断深化。在一个时期被认为是基本的组元，随着科学的发展，发现它们有更深层次的结构，由更小的组元构成。

粒子物理学 (particle physics) 正是这样一门探索物质最深层次微观结构、研究物质基本组元和它们之间的相互作用规律的学科。目前的粒子物理理论告诉我们，物质由许多**粒子 (particle)** 组成，这些粒子不但说明物质的组成，也解释物质之间的相互作用。宇宙中一切物理现象的规则，原则上可约化为描述粒子的物理定律。可以说粒子物理学是研究最基本物理定律的科学。

这一章中我们首先简要回顾经典物理学如何描述世界现象。然后着重介绍粒子物理学的发展历程，基本上围绕两条主线进行：一是人们对物质世界基本组成单元的探索，这方面的发展以实验为主；二是关于这些基本组成单元之间的相互作用和运动规律的研究，以量子力学、相对论、量子场论等理论为代表。期间将引入许多粒子物理学的基本概念。紧接着简单介绍粒子物理学中的单位制。最后讨论粒子之间的相互作用和它们的传递。

1.1　经典粒子和经典场

从十六世纪末至十九世纪末的 300 年间，是经典物理学发展的辉煌盛世。经典物理学以经典力学、经典电动力学、以及经典热力学和统计物理学为支柱，可以明晰而深刻地描述机械运动、电磁 (包括光) 现象和热运动。

在经典力学中，物质被认为是由不可分割的微粒组成。Isaac Newton 在《光学》中阐述了他的粒子思想：“在我看来，上帝在最初造物时，可能使用的是固态的、有质量的、坚硬的、不可穿透的和可动的微粒；这些微粒的大小、形状、所拥有的其他性质、在空间中的比例等等，都最适合于他造物的目的；这些固态的初始粒子无比地坚硬于由它们构成的多孔的物体，坚硬到绝不会磨损，不会破碎成小块；任何普通的力量都不可能把上帝在第一次创造时的初始粒子破开。”可见 Newton 的粒子概念是有质量的、不可分割的、坚硬的微粒。

经典力学考虑的粒子之间的力，即**引力相互作用 (gravitational interaction)**，指的是任何具有质量的粒子间的相互吸引的作用。两个**质量 (mass)** 为 m_1 和 m_2，相距为 r 的粒子之间的万有引力的大小 F 满足万有引力定律：

$$F = G_N \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1.1.1}$$

式中 G_N 是万有引力常数：

$$G_N = 6.674\,28(67) \times 10^{-11} \mathrm{m}^3/\mathrm{kg}/\mathrm{s}^2 \tag{1.1.2}$$

上式括号中的数字是一倍标准偏差 (1σ) 下的测量误差 (以后实验测量值和误差的写法与此相同)。根据 Newton 的设想，引力相互作用是超距的，没有力的传递问题。

在经典电动力学中，粒子还带有**电荷 (electric charge)** 的属性，运动的带电粒子还将产生**电流 (electric current)**，电荷和电流相当于力学意义上的质量。真空中两个带电量为 q_1 和 q_2、相距为 r 的点电荷之间的作用力大小满足 Coulomb 定律：

$$F = \frac{1}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.1.3}$$

注意对于电磁现象，我们采用 Heaviside-Lorentz 单位制 (参阅第 1.4.1 节)。真空中两个相距为 d 的平行电流元 $I_1 \mathrm{d}l_1$ 和 $I_2 \mathrm{d}l_2$ 之间的作用力大小则满足 Ampere 定律：

$$\mathrm{d}F = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{I_1 I_2 \mathrm{d}l_1 \mathrm{d}l_2}{d^2} \tag{1.1.4}$$

式中 c 是光在真空中的速度，是个常数：

$$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s} \tag{1.1.5}$$

1837 年 M. Faraday 引入**场 (field)** 的概念，指出电和电流 (磁) 的周围都有场的存在。这样带电粒子之间的相互作用从粒子之间的超距作用改成电磁场的相互作用，称为**电磁相互作用 (electromagnetic interaction)**。这是观点上的重大变革，重点从粒子转移到场。场的概念在 James Maxwell 那里得到了充分的发展。1864 年 Maxwell 用四个偏微分方程概括一切电磁现象：

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0
\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

式中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别是电场 (electric field) 和磁感应 (magnetic induction)，ρ 和 $\mathbf{j}$ 分别是电荷密度 (charge density) 和电流密度 (current density)，$\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$ 分别是电位移 (electric displacement) 和磁场 (magnetic field) [1]：

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \mathbf{E} + \mathbf{P} \\
\mathbf{H} &= \mathbf{B} - \mathbf{M}
\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

其中 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 分别为极化 (polarization) 和磁化(magnetization)，Maxwell 方程组提示或预言了电磁场的波动性质。事实上 Maxwell 由此计算出电磁波传递的速度等同于光速，并断言光是一种电磁波。1887 年电磁波为 H. Hertz 所发现。

随着 Maxwell 理论的建立和 Hertz 的发现，经典物理学大厦的主体可以说已臻完成。其粒子的概念为力学所庇护，而场 (波动) 的概念则为电磁理论所涵盖。在日常生活以及微观领域，电磁相互作用的强度远远大于万有引力相互作用，但是在宇宙中的天体间，万有引力相互作用占据绝对主导地位。

经典物理中还有一种现象，其中包含着大量的粒子。例如，考虑任何宏观量的任何气体，要处理的分子数目将达 10^{22} 数量级。在这种情况下，不可能也没有必要知道

[1]历史上人们曾经对磁场有不正确的认识，把 $\mathbf{H}$ 称为磁场而和电场 $\mathbf{E}$ 对比。现在人们认识到 $\mathbf{E}$ 和磁感应 $\mathbf{B}$ 才是电场和磁场的基本物理量，但是由于历史原因，仍然保留 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{B}$ 的原有名称。

系统的初始动力学状态 (即单个分子的坐标和动量)。实际上人们只对系统在宏观尺度上的性质感兴趣，为此目的，人们引入宏观变量，并且通过引入概率概念与统计方法来处理大量粒子的平均性质，从而将研究领域从经典力学拓展到热力学领域。

经典物理学把物质分为两大类，一类是实物，其最小单元是**原子 (atom)**，即不可分割的粒子，另一类是非实物形态的场。经典物理学中粒子和场是两个完全不同的概念，涉及不同的现象，分别用于描述物理系统的分立性和连续性。一个物理系统可能包含巨大数量的粒子，例如气体中的分子，但只要它们是可数的，其基本理论就是经典力学。但如果一个系统的变量是不可数的，如电场，则其基本理论就是所谓的场论。由于经典场强调的是由连续变化的物理量形成的整体，因此经典场论不考虑场的粒子性。

1.2 从原子到原子核

十九世纪末人类发现放射性实验现象，标志着物理学的研究内容步入微观领域，也标志着粒子物理学的诞生。其后一百多 年间，粒子物理学的实验和理论交织发展、互相辉映，得到空前发展。各种新现象、新想法层出不穷，造就了粒子物理学的黄金百 年，时至今日，粒子物理学仍然是国际物理学研究的前沿和热点。特别是位于欧洲核子研究中心 (European Organization for Nuclear Research, CERN) 的大型强子对撞机 (Large Hadron Collider, LHC) 于 2009 年正式开始运行，有望对人们关心的物理学的基本问题做出实验发现，由此人类对世界的认识也必将更加深入、更加完善。

1.2.1 电子

1896 年 A.H. Beequerel 发现铀的放射现象，揭开了人类探索微观领域的序幕。

后来人们将镭、钋等具有天然**放射性 (radioactivity)** 的元素放入磁场中，发现发射出的粒子束有三种。两种朝着相反方向偏转，表明它们是两种带相反电荷的粒子束。带正电的称为 α 射线，带负电的称为 β 射线。另外一种不受磁场影响，是不带电的粒子束，称为 γ 射线。相应的放射性分别称为 **α、β 和 γ 放射性**。α 射线在磁场中的偏转比 β 射线的小很多，可见 α 粒子远比 β 粒子重。γ 射线是 1900 年 P.U. Villard 发现的，当时它被假定成粒子。1910 年 W.H. Bragg 提出γ 射线是电磁辐射 (即光) 的一种，并于 1914 年得到 E. Rutherford 和 E. Andrade 的实验证实。

1897 年 J.J. Thomson 和他的同事在英国剑桥的 Cavendish 实验室研究阴极射线时发现阴极射线不仅能在磁场中弯曲，也能在电场中弯曲。他们让阴极射线经过互相垂直的电场和磁场，通过调节场的强度，测得阴极射线的荷质比是一个常数[2]。Thomson 发现的阴极射线后来被称为**电子 (electron)**。研究表明电子带负电，其质量比氢离子的质量小得多，而且不同物质都能发射电子，它是构成各种物质 (原子) 的共有成分。

1911 年 R. Millikan 首次通过实验测出电子所带的电荷，其大小与单电离原子所带的正电荷大小完全相等。电子电荷的大小称为基本电荷，记作 e。已知电子电荷，由它的荷质比就可以算出电子的质量。根据近 年来的精确测定，电子的电荷大小和质量 m_e 分别是：

$$\begin{aligned} e &= 1.602\,176\,487(40)\times 10^{-19}\,\mathrm{C} \\ m_e &= 9.109\,382\,15(45)\times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

[2]参阅文献：Thomson, J.J. (1897), *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **9**

既然原子中存在带负电的电子，而我们知道原子是电中性的，那么原子中一定含有带正电的部分。电子的质量很小，因此原子的质量必定主要集中在带正电的部分。原子中带正电的部分和带负电的电子是怎样分布的呢？人们很自然地提出了原子的结构问题。其中最有影响的是 1903 年 Thomson 本人提出的关于原子结构的葡萄干松糕模型 (raisin muffin model)。他认为原子是一个球体，正电荷均匀分布在整个球体中，带负电的电子嵌在其中，好像松糕中嵌着一颗颗葡萄干一样。

电子是人类发现的第一种基本粒子[3]，用符号 e^- 表示，上标 − 表示电子带负电。现有的实验精度下，在 10^{-18} m 的范围内还没有看到电子有内部结构。电子的发现改变了人们认为原子是组成物质的最小微粒的看法，对人类认识原子结构有重大意义。原子大小可以用 Avogadro 常数以及原子质量和材料的体积密度估计，其直径大约为 1Å，这里 Å 是长度单位：

$$1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\text{m} \tag{1.2.2}$$

1.2.2 量子论和相对论

1900 年 M. Planck 提出辐射的**量子 (quantum)** 假说。他假定物质辐射 (或吸收) 的能量不是连续地、而是一份一份地进行的，只能取某个最小数值的整数倍，这个最小数值就叫能量子：

$$E = h\nu \tag{1.2.3}$$

式中 ν 是辐射频率，比例常数 h 称为普朗克常数。Planck 的辐射量子假说成功地解释了黑体辐射现象。

1905 年 Albert Einstein 假设电磁场本身就不是连续的而具有粒子性，提出光量子概念，并给出了光量子的能量 E、动量 $\mathbf{p}$ 与电磁场的角频率 ω 和波矢 $\mathbf{k}$ 的关系，成功地解释了光电效应现象：

$$\boxed{E = \hbar\omega, \qquad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}} \tag{1.2.4}$$

式中 $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ 是**约化 Planck 常数 (reduced Planck constant)**：

$$\hbar = 1.054\,571\,628(53)\times10^{-34}\,\text{J s} = 6.582\,118\,99(16)\times10^{-22}\,\text{MeV s} \tag{1.2.5}$$

式中 eV 也是能量单位，表示一个电子通过 1 volt (V) 电位差所获得的能量，它与国际单位制中的能量单位 joule (J) 之间的关系是：

$$1\text{eV} = 1.602\,176\,487(40)\times10^{-19}\,\text{J} \tag{1.2.6}$$

粒子物理学更常用的能量单位是 MeV、GeV 和 TeV：

$$1\,\text{keV} = 10^3\,\text{eV}, \quad 1\,\text{MeV} = 10^6\,\text{eV}, \quad 1\,\text{GeV} = 10^9\,\text{eV}, \quad 1\,\text{TeV} = 10^{12}\,\text{eV} \tag{1.2.7}$$

1923 年 A.H. Compton 用 Einstein 的光量子概念成功地解释了 X 光被物质散射时波长发生变化的 Compton 效应。从此光量子概念被广泛接受和应用，并于1927 年被命名为**光子 (photon)**，用希腊字符 γ 表示。

[3]历史上基本粒子指的是构成物质的最基本的单元。但是随着人们对物质结构了解的不断深入，认识到原先认为基本的粒子也有复杂的结构，故现在较少提基本粒子这一说法。不过就电子而言，目前仍然把它看作是一种基本粒子，因为实验上还没有发现电子有内部结构。粒子物理学认为没有内部结构的粒子是基本粒子，包括轻子、夸克和规范玻色子等。电子属于轻子。

1905 年 Einstein 发表《论运动物体的电动力学》，提出物理定律与参照系的选择无关 (相对性原理) 以及真空中光速恒定 (光速不变性原理) 两条假设，讨论了运动物体的光学现象，建立**狭义相对论 (special relativity)**。

按照狭义相对论，粒子的质量 m 是个不依赖于惯性参照系的 Lorentz 不变量 [4]，它与粒子能量 E、动量 $\mathbf{p}$ 之间的关系为：

$$\boxed{m^2c^4 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2} \tag{1.2.8}$$

上式是个普遍表达式，也是粒子质量的定义式。

式 (1.2.8) 又称为**质壳 (mass shell)** 关系，采用这个名称是因为考虑由能量和动量组成的四维空间中，这个关系式给出了该空间中的一个三维曲面方程，称之为“壳”正是对该曲面的形象描述。满足 (1.2.8) 式的粒子称为在壳 (on-mass shell)，反之则称为离壳 (off-mass shell)。狭义相对论中 $m = 0$ 的粒子 (例如光子) 在任何参照系中都以光速运动；而 $m \neq 0$ 的粒子的质量等于粒子静止时 ($\mathbf{p} = 0$) 的能量除以光速的平方 $m = E/c^2$，这也是粒子物理采用的粒子质量的表达形式，例如电子质量为：

$$m_e = 0.510\,998\,910(13)\,\mathrm{MeV}/c^2 \tag{1.2.9}$$

1915 年 Einstein 发表《万有引力方程》，提出等效性原理，认为人们不可能区分引力效应和非匀速运动，即非匀速运动和引力是等效的，建立起了广义相对论 (general relativity)。狭义相对论和广义相对论突破了经典力学的绝对时空观，揭示了时间、空间、物质和运动的内在联系。

1.2.3 原子核

1911 年 Rutherford 在用 α 射线 (粒子) 轰击金箔的**散射 (scattering)** 实验中，发现大部分的 α 粒子能穿过金箔，少数 α 粒子发生偏转，还有极少数的 α 粒子甚至被弹回。根据这些实验事实，联系太阳系中行星绕太阳旋转的情况，Rutherford 在 1912 年提出关于原子结构的 Rutherford 模型，又称为行星模型 (planetary model)，认为在原子的中心有一个很小的核，称为**原子核 (atomic nucleus)**，原子的全部正电荷和几乎全部质量都集中在原子核里，带负电的电子在核外空间绕核旋转。原子核的发现标志着人类对物质世界的认识进入了一个新的层次 — 原子核层次。

按照 Rutherford 的这个模型可估计原子的直径大约在 1Å 的量级，原子核的直径大约为 1fm。这里 fm 也为长度单位：

$$1\,\mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m} \tag{1.2.10}$$

原子核的直径大约是原子直径的万分之一，可见原子内部是非常空旷的。Rutherford还通过计算得到了关于微分散射截面的 Rutherford 公式：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \sim \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \tag{1.2.11}$$

式中 θ 为散射角。图 1.1 所示为 H. Geiger 和 E. Marsden 在 1913 年用 α 粒子轰击银箔时测得的实验数据点，实验结果与 Ruthurford 公式的理论预言完全吻合。

[4]狭义相对论建立的初期阶段，由于人们认知上的局限，提出过几个无用的或者容易使人误解的概念，例如运动质量和静止质量。事实上质量是一个与惯性参考系无关的 Lorentz 不变量，所谓的粒子的运动质量，其实就是能量除以光速的平方，而粒子的静止质量就是粒子的质量。

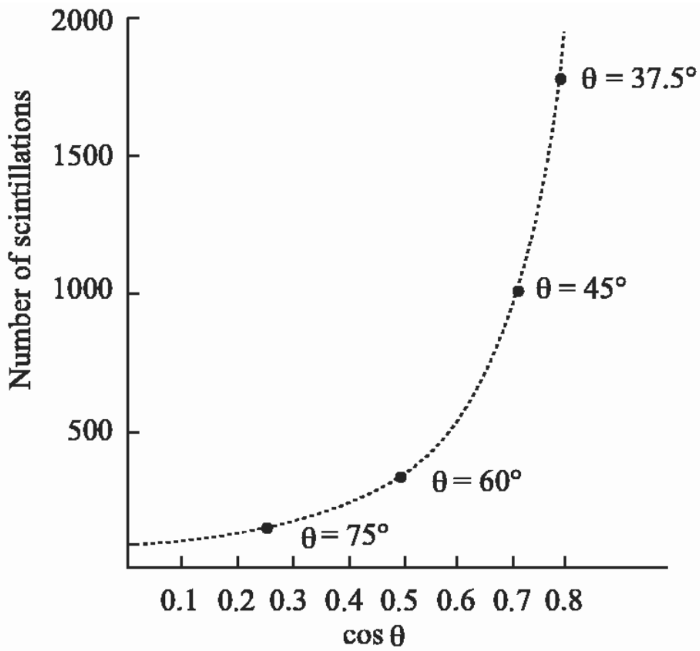


图 1.1: 用 α 粒子轰击银箔的实验结果。图中横坐标是散射角 θ 的余弦，纵坐标是接收到 α 粒子的数目，虚线为 Ruthurford 公式的理论预言。

但是按照经典电磁理论，电子绕原子核运动会辐射电磁波而不断失去能量。其结果是电子将在 10^{-12} s 内落到原子核上，这与原子是稳定的这一事实严重不符。此外，电子失去能量时将逐渐缩小其轨道，辐射的光谱应该是连续的，而实际观测到的原子光谱总是分立的线状谱。

1913 年 N. Bohr 将 Planck 的量子概念和 Einstein 的光子概念运用到 Rutherford 的原子核式结构模型，建立了关于原子结构的旧量子理论模型。Bohr 假设核外电子只能在一些角动量是 $\hbar$ 的整数倍的轨道上运动，即微观粒子的角动量也是量子化的。此时电子处在稳定状态，称为定态。同时假设当电子从一个能量为 E_n 的定态跃迁到另一个能量为 E_m 的定态时，吸收或发射一个光子，其角频率为：

$$\omega = \frac{E_n - E_m}{\hbar} \tag{1.2.12}$$

Bohr 的关于原子模型的旧量子理论初步解决原子的稳定性和原子光谱规律问题。

Rutherford 等进行的**散射 (scattering)** 实验也称为碰撞实验，是粒子物理学最重要的实验手段。粒子物理实验中常利用粒子间的碰撞来研究粒子的性质、相互作用和内部结构。如果散射过程中粒子之间没有动能交换，则称为弹性散射 (elastic scattering)。如果散射过程中粒子之间有动能交换，或粒子的数目、类型和内部状态有所改变，或者转化为其他粒子，则称为非弹性散射 (inelastic scattering)。

考虑一个能量为 200 eV 的电子与氦原子的散射实验。图 1.2 所示为散射电子的相对数目和散射电子的能量之间的关系，即能量分布或能谱 (energy spectrum)。图中 200 eV 处的很高的峰表明电子能量没有改变，对应着弹性散射。而略低于 180 eV 处的峰表明大约 21 eV 的电子能量被传递给氦原子，氦原子处在第一激发态，这对应着非弹性散射。类似地，177 eV 处地峰也对应着非弹性散射，氦原子处在第二激发态。散射实验的能谱显示了原子能量的量子化。

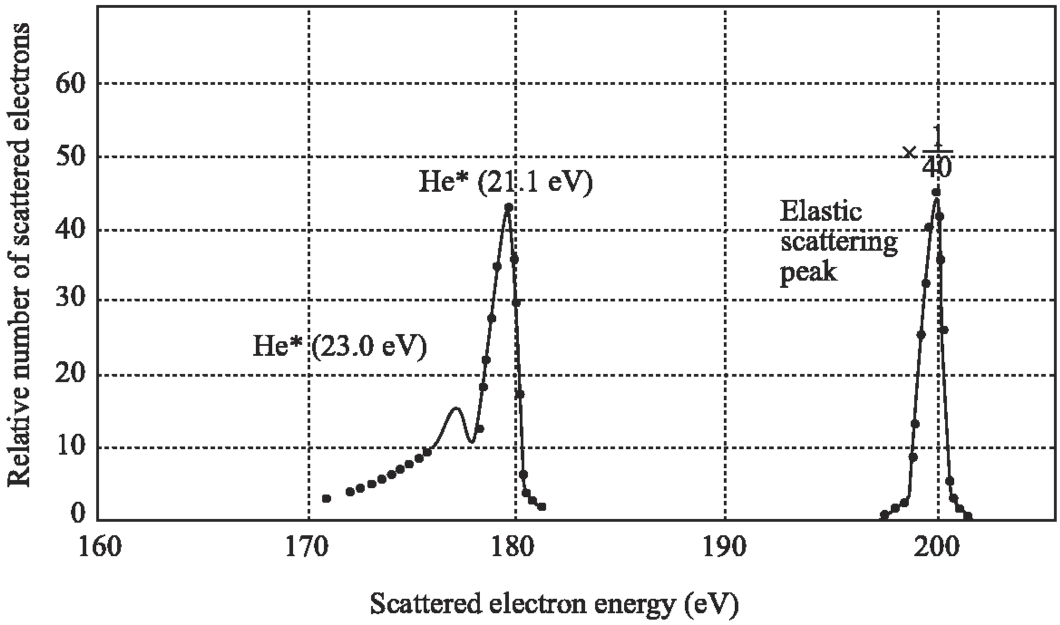


图 1.2: 能量为 200 eV 的电子与氦原子的弹性和非弹性散射。

所谓原子的激发指的是原子核外的电子的激发，即核外电子吸收光子跃迁到较高的振动、转动能级。类似于化学中的方程式，粒子物理学中把该过程表示成：

$$e^- \ + \ \gamma \ \rightarrow \ e^- \tag{1.2.13}$$

而电子从高能级跃迁到低能级时发射光子的过程可表示成：

$$e^- \ \rightarrow \ e^- \ + \ \gamma \tag{1.2.14}$$

虽然我们从原子核外电子的跃迁得到 (1.2.13) 和 (1.2.14) 式，不过它们代表着更多的物理过程。例如 (1.2.14) 式又可以代表韧致辐射 (bremsstrahlung, braking radiation) 过程，表示电子在介质中运动与介质相互作用辐射出光子。式 (1.2.13) 和 (1.2.14) 反映了物理学中关于微观过程的**细致平衡 (detailed balance)** 原理。假设存在反应：

$$a \ + \ b \ \rightarrow \ c \ + \ d$$

则其逆过程也存在：

$$c \ + \ d \ \rightarrow \ a \ + \ b$$

过程 (1.2.13) 和 (1.2.14) 是电磁相互作用过程，粒子物理学中常用方便易懂的图形来直观地表示这些过程，如图 1.3 所示，称为**费曼图 (Feynman diagram)** [5]。费曼图中横轴代表时间，粒子总是沿着时间轴从左到右运动 [6]。电子用带右向箭头的实线表示，光子用波浪线表示。费曼图中几根线条的联接点是相互作用发生之处，称为相互作用**顶点 (vertex)**，顶点处遵守能量、动量、电荷等守恒定律。对于自由电子事实上并不存在图 1.3 所示的两种过程，因为这两种过程的能量不守恒。费曼图中的线条代表粒子。如果线条的一端是自由的，则称为外线 (external line)，表示入射或出射粒子，即反应的初末态粒子。只有外线粒子才是可观测的。需要指出的是费曼图纵向间隔不代表粒子之间真实的空间距离，例如图 1.3 中的电子线完全可以画成水平直线而不是折线。

[5]事实上 Ernest Stückelberg von Breidenbach zu Breidenstein und Melsbach 在 R.P. Feynman 之前已发现并在一本法文杂志发表费曼图，因此 M. Gell-Mann 总是称费曼图为 Stückelberg 图。

[6]也有人用纵轴代表时间，粒子沿着时间轴从下往上，这只是个人喜好。用横轴代表时间用得较多。

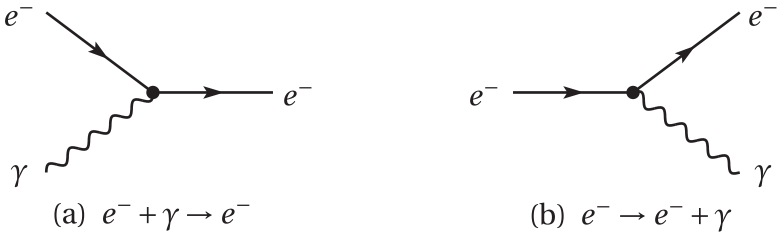


图 1.3: 相应于过程 $e^- + \gamma \to e^-$ 和 $e^- \to e^- + \gamma$ 的费曼图。

费曼图中的每个顶点，每根线都对应着一条费曼规则 (Feynman rule)。费曼规则可以通过**量子场论 (quantum field theory)** 的严格推导得到，请参阅量子场论相关书籍。顶点处相互作用的强度称为**耦合常数 (coupling constant)**，也就是相互作用的荷，通常用 g 表示。电磁相互作用的荷或者耦合常数就是基本电荷 e。在描写电磁作用过程，例如计算跃迁概率时，经常出现一个与耦合常数相关的无量纲的量：

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137} \tag{1.2.15}$$

称为精细结构常数。电磁相互作用顶点一般以 α 表征，其强度正比于 $\sqrt{\alpha}$。

1.2.4 质子和中子

1919 年 Rutherford 用 α 粒子轰击氮原子核，结果发现产生了氢原子核。这些氢核唯一可能的来源是氮原子核，故氮核必须含有氢核。随后 Rutherford 和他的学生用 α 粒子轰击了元素周期表上从硼到钾的所有元素，成功地使它们发生相应的核反应 (碳和氧除外)，释放出一个氢核，同时转化为元素周期表上的下一位元素。这就实验证明了氢核是其他所有元素的原子核的组成部分。因此 Rutherford 建议原子序数为 1 的氢原子核是一个基本粒子，并把它命名为**质子 (proton)**，用符号 p 表示。proton 这个英文单词是由希腊文中的“第一”演化而来的。质子质量为：

$$m_p = 938.272\,013(23)\,\text{MeV}/c^2 \tag{1.2.16}$$

如果原子核完全由质子组成，那么某种元素的原子核所带的正电荷，在数值上一定等于那种元素的原子量，因为元素的原子量主要由原子核决定，核外电子的质量是微不足道的。但事实并非如此，元素的原子量总是比它的核所带的正电荷数大一倍或一倍以上，这说明原子核里除了质子外，还有一种质量和质子相仿的中性粒子存在。

1920 年 Rutherford 在一次演讲中预言：“在原子的某个地方，可能存在着一个尚未被察觉到的中性粒子，而一经发现这种中性粒子，很可能比 α 粒子的用途要大得多，它能自由地穿过物体，但却不能把它控制在一个密封的容器中。”这种新的中性粒子就是**中子 (neutron)**，用符号 n 表示。1932 年 B. Chadwick 在用 α 粒子轰击 Be 的实验中发现中子。中子质量很接近质子质量，比质子的质量略大。

质子和中子的发现表明原子核也有内部结构 (事实上原子核有大小已预示原子核是有结构的)，质子和中子同是组成原子核的粒子，统称为**核子 (nucleon)**。原子核由若干个质子和中子组成，通常把具有相同原子序数 (质子数、核电荷数) Z 和质量数 A 的一类原子，称为一种核素 (nuclide, nuclear species)。知道了质量数和质子数，也就知道了中子数 $N = A - Z$。原子核物理学中用符号 ${}^A_Z\mathrm{X}_N$ (或者更简洁用 ${}^A_Z\mathrm{X}$) 表示核素 X。例

如 α 粒子是由2个质子和2个中子组成的氦原子核，记作 ${}^4_2\mathrm{He}_2$ 或 ${}^4_2\mathrm{He}$。Rutherford 发现质子的实验是科学史上第一次用人工方法实现的核反应，原子核物理学中用下列反应式表述该过程：

$$ {}^4_2\mathrm{He} \;+\; {}^{14}_7\mathrm{N} \;\rightarrow\; {}^{17}_8\mathrm{O} \;+\; p $$

具有单位正电荷的质子之间存在 Coulomb 排斥力，仅仅靠微不足道的万有引力，质子和中子是不会聚到一起构成原子核的。存在稳定原子核的事实表明，核子之间存在很强的作用力，称为**核力 (nuclear force)**。核力的作用比 Coulomb 力强，而且主要是吸引力，它的作用距离很短，只有在原子核尺度上才显现出来。现代物理认为核力是**强相互作用 (strong interaction)** 的一种表现，是强相互作用的剩余，正如分子之间的 van der Waals 力是电磁相互作用的剩余一样。

二十世纪五、六十年代在美国史丹佛直线加速器中心 (Stanford Linear Accelerator Center, SLAC) 进行过一系列探索物质内部结构的精密实验。当时已知 α 粒子和原子核均由质子和中子组成，为了避免这些核子之间复杂的核力，实验中使用 e^- 束流与原子核进行碰撞。

❍ 图 1.4 所示的是 125 MeV 电子轰击金原子核后被弹性散射的电子的角分布 (微分散射截面对散射角的依赖关系)。实验结果明显偏离了点状原子核的理论预言。

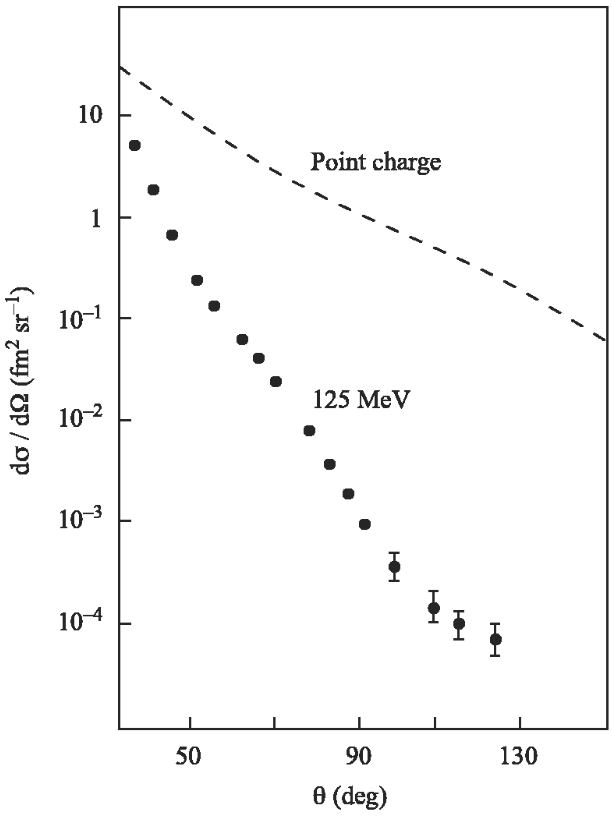


图 1.4: 能量为 125 MeV 电子被金原子核弹性散射后的角分布。实验数据用带误差棒的实心圆点表示，虚线表示点状原子核理论预言。

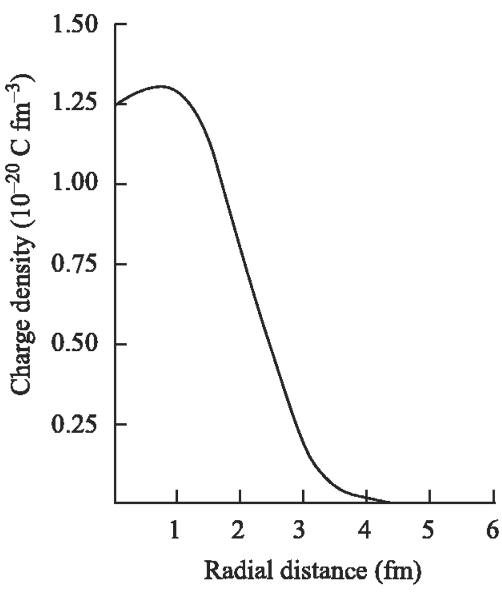


图 1.5: 从电子与碳原子核的弹性散射得到的 ${}^{12}_6\mathrm{C}$ 原子核的电荷密度。

❍ 有限体积下带正电的原子核存在一定的电荷分布，它在动量空间的 Fourier 变换称为原子核的**形状因子 (form factor)** (参阅第 节)。对实验测得的原子核形状因子进行 Fourier 逆变换即可得到核电荷分布，图 1.5 所示是 ${}^{12}_6\mathrm{C}$ 原子核的电

荷分布，其他元素的原子核的电荷分布与之相似。可见原子核的电荷半径大约是 1–2 fm。这表明与电子和原子核组成原子相比，质子和中子在原子核中是十分拥挤的。

- 类似电子与原子的散射实验，电子与原子核的散射实验揭示原子核也有分立的能级。图 1.6 所示为 150 MeV 的电子与碳原子核的弹性和非弹性散射的能谱。除了 150 MeV 处明显的弹性散射峰，还可以看到三个非弹性散射峰，能量转移分别是 4.4, 7.7 和 9.6 MeV。根据这些数据，并假设发生弹性散射时碳原子核处在基态，就可以得到碳原子核的能级，如图 1.7 所示。

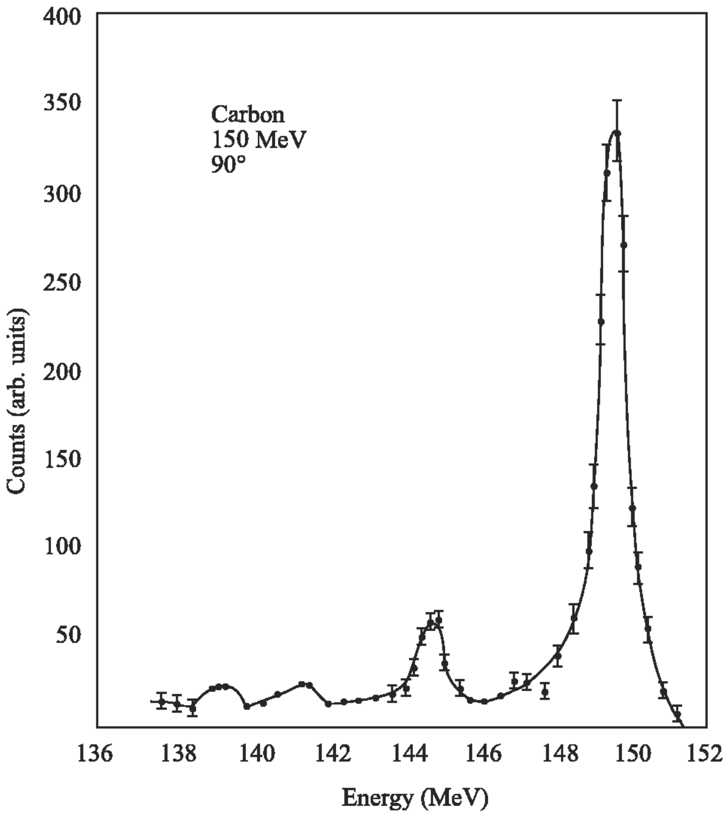


图 1.6: 电子被碳核散射后散射角为 90° 处的能谱

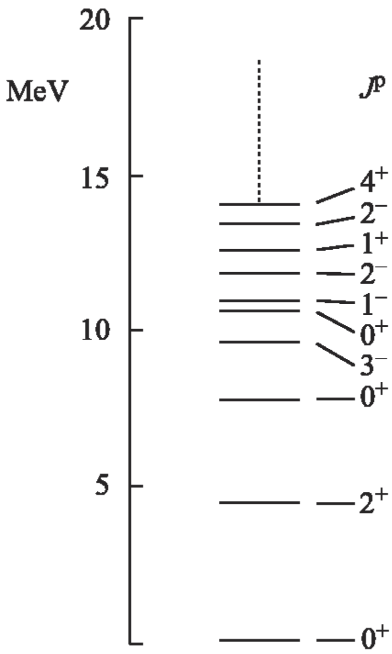


图 1.7: 碳原子核的能级

图 1.7 中 J^P 是对应原子核能级的两个量子数，J 为**自旋 (spin)**，P 为**宇称 (parity)**。自旋的概念是 1925 年 R. Kronig 、G. Uhlenbeck 和 S. Goudsmit 引入的，他们提出所有微观粒子都有量子化的内禀角动量，即自旋。角动量有轨道角动量和自旋两种。自旋只适用于描写微观粒子，没有经典对应的物理量。此外轨道角动量量子数只能取整数，而自旋量子数可以取整数，也可以取半整数。电子、质子和中子的自旋均为 $\frac{\hbar}{2}$，光子的自旋为 $\hbar$。

宇称是内禀宇称 (intrinsic parity) 的简称，它反映粒子在空间反射下的变换性质。如果粒子状态在空间反射下不变 (反号)，则宇称为正 (负)，称为偶 (奇) 宇称。电子、质子和中子的宇称均为正，光子的宇称为负。

自旋和宇称是描述微观粒子性质的两个重要特征量 (参阅第　　节)。特别是 $J^P = 0^+, 0^-, 1^-, 1^+$ 的粒子分别称为**标量 (scalar)** 粒子、**赝标量 (pseudoscalar)** 粒子、**矢量 (vector)** 粒子、**轴矢量 (axialvector)** (或赝矢量) 粒子。

质子和中子除了带电和中性的区别以及微小的质量差异，它们在核力行为上的区别是物理学中极为关心的问题。图 1.8 给出了几组具有相同质量数但是不同质子数和中子数的原子核能级图。图中相同质量数的原子核构成多重态：

(*a*) $\left({}^{7}_{3}\mathrm{Li},\ {}^{7}_{4}\mathrm{Be}\right)$ 和 $\left({}^{11}_{5}\mathrm{B},\ {}^{11}_{6}\mathrm{C}\right)$ 均构成**二重态 (doublet)**

(*b*) $\left({}^{18}_{8}\mathrm{O},\ {}^{18}_{9}\mathrm{F},\ {}^{18}_{10}\mathrm{Ne}\right)$ 构成**三重态 (triplet)**

(*c*) $\left({}^{21}_{10}\mathrm{Ne},\ {}^{21}_{11}\mathrm{Na}_{10}\right)$ 和 $\left({}^{21}_{9}\mathrm{F},\ {}^{21}_{10}\mathrm{Ne},\ {}^{21}_{11}\mathrm{Na},\ {}^{21}_{12}\mathrm{Mg}\right)$ 分别构成二重态和**四重态 (quartet)**

数据已考虑了 Coulomb 能量修正以及质子和中子的质量差异。

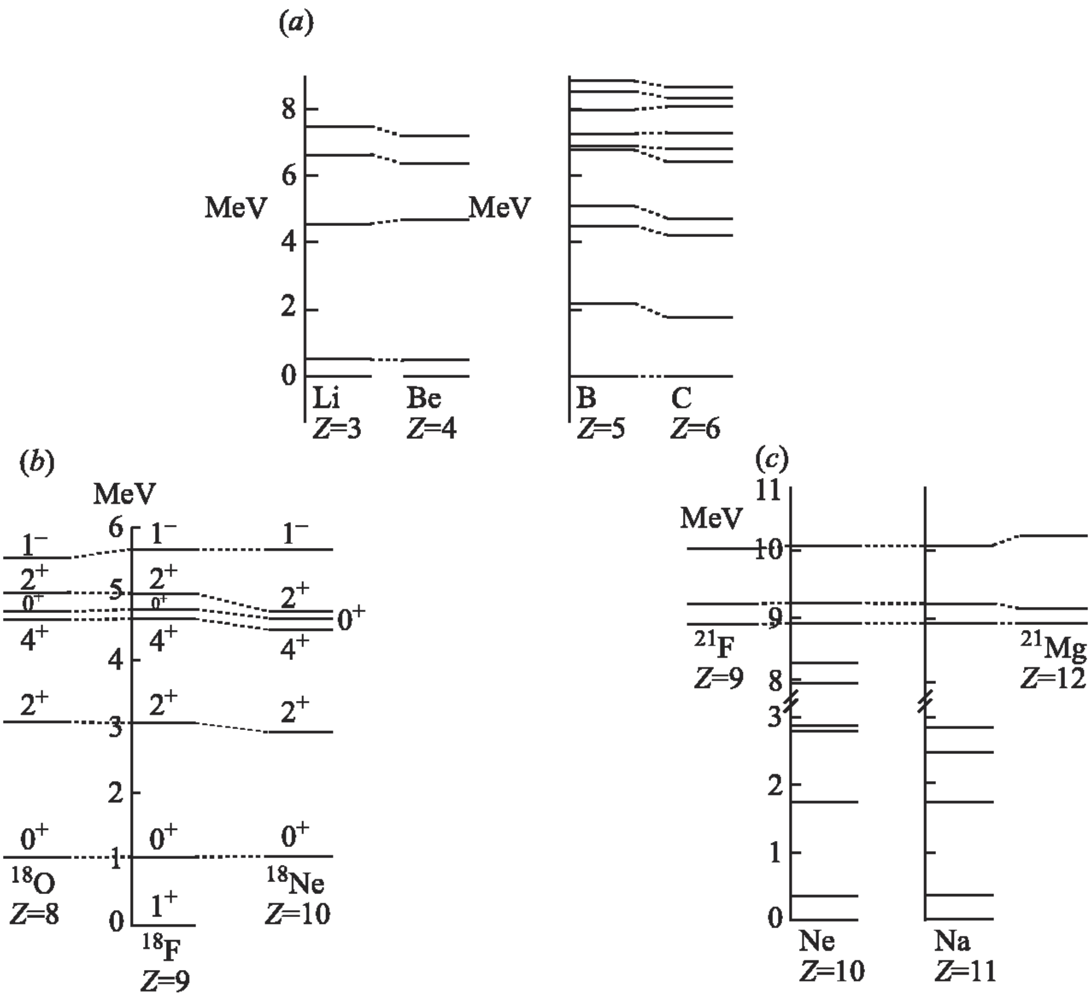


图 1.8: 具有相同质量数 A 和不同核子数 Z, N 的原子核能级图。(*a*) 二重态 $\left({}^{7}_{3}\mathrm{Li},\ {}^{7}_{4}\mathrm{Be}\right)$ 和二重态 $\left({}^{11}_{5}\mathrm{B},\ {}^{11}_{6}\mathrm{C}\right)$，(*b*) 三重态 $\left({}^{18}_{8}\mathrm{O},\ {}^{18}_{9}\mathrm{F},\ {}^{18}_{10}\mathrm{Ne}\right)$，(*c*) 二重态 $\left({}^{21}_{10}\mathrm{Ne},\ {}^{21}_{11}\mathrm{Na}_{10}\right)$ 和四重态 $\left({}^{21}_{9}\mathrm{F},\ {}^{21}_{10}\mathrm{Ne},\ {}^{21}_{11}\mathrm{Na},\ {}^{21}_{12}\mathrm{Mg}\right)$。

这些原子核多重态的质量数都相同，差别仅在于质子数和中子数不同。结果表明原子核多重态的能级非常相似。这意味着核子之间的核力与核子电荷无关，质子和质子、中子和中子以及质子和中子之间的核力是相同的。也就是说就核力的相互作用性质而言，质子与中子之间没有区别。因此我们可以把质子和中子看成同一种粒子的两种不同状态。

1932 年 W. Heisenberg 引入抽象的**同位旋 (isospin)** 概念 (参阅第 节)。认为质子和中子是同位旋 I 相同、同位旋第三分量 I_3 不同的两种状态，它们的同位旋都

是 $I=\frac{1}{2}$，质子的同位旋第三分量 $I_3=\frac{1}{2}$，中子的同位旋第三分量 $I_3=-\frac{1}{2}$，质子和中子组成同位旋二重态：

$$p=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad n=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{1.2.17}$$

质子带电而中子为中性，它们质量上的微小差异可以用是否参与电磁相互作用解释。

至此人们已发现了四种“基本”粒子，其中电子、光子和质子是稳定的，而自由中子是不稳定的，会**衰变 (decay)** 成质子，并放出一个电子，这就是通常所说的 β 放射性。粒子产生后到衰变前存在的时间称为该粒子的**寿命 (lifetime)**。对于任何一种粒子每次测得的寿命值都不同，粒子物理学中谈到粒子的寿命时都是指大量粒子寿命的平均值，并且都是在粒子静止时的寿命。自由中子的寿命约为 14 分钟，而对于一个原子核中的中子，由于它与核内其他核子的束缚作用，其寿命可以变得很长因而很稳定。寿命是表征粒子性质的一个重要特征量 (参阅第 节)。

1.2.5 量子力学

对微观粒子寿命的准确描述需要用到**量子力学 (quantum mechanics)** 知识。量子力学是在旧量子论的基础上，于 1923 到 1927 年这段时间中建立起来的，它与相对论一起构成了现代物理学的理论基础。

- 1923 年 L. de Broglie 基于光的波粒二象性 (corpuscular wave dualism)，提出物质波的概念，认为一切微观粒子均伴随着一个波，即所谓的 de Broglie 波。
- 1925 年 W. Pauli 提出 **Pauli 不相容原理 (Pauli exclusion principle)**，即不能有两个或两个以上的电子同时处于相同的量子状态。
- 1925 年 Heisenberg 基于物理理论只处理可观察量的认识，抛弃了不可观察的轨道概念，并从可观察的辐射频率及其强度出发，和 M. Born、P. Jordan 一起建立起量子理论的矩阵力学。
- 1926 年 E. Schrödinger 基于量子性是微观体系波动性的反映这一认识，找到了微观体系的运动方程，从而建立起量子理论的波动力学。Schrödinger 给出的质量为 m 的微观粒子的非相对论性波动方程为：

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(\mathbf{r},t)\right)\psi(\mathbf{r},t)} \tag{1.2.18}$$

式中 $\mathbf{r}$, t 是粒子的位置和时间，$U(\mathbf{r},t)$ 是粒子势能，$\psi(\mathbf{r},t)$ 是描写粒子量子状态的波函数。式 (1.2.18) 称为 **Schrödinger 方程**，可以通过对势场 $U(\mathbf{r},t)$ 中非相对论粒子的能量动量关系：

$$E=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}+U(\mathbf{r},t)$$

进行如下的算符替换：

$$\boxed{E\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\qquad \mathbf{p}\to -i\hbar\nabla} \tag{1.2.19}$$

并作用在波函数 $\psi(\mathbf{r},t)$ 而得到。

- 1926 年 Born 给出波函数 $\psi(\mathbf{r},t)$ 的统计解释：与微观粒子相联系的物质波不是实在的物理量的波动，而是描述粒子在空间概率分布的概率波 (probability wave)，即 $\rho=|\psi(\mathbf{r},t)|^2$ 是 t 时刻在 $\mathbf{r}$ 附近单位体积内找到粒子的概率密度。

- 1927 年 Heisenberg 提出：一个微观粒子的一对共轭物理量 (如位置和动量、方位角与动量矩、时间和能量等) 存在着观测上的**不确定关系 (uncertainty principle)**，即不可能同时测有确定的数值，其中一个量越确定，另一个量的不确定程度就越大。测量一对共轭量 (q,p) 的误差的乘积必然大于常数 $\frac{\hbar}{2}$：

$$\Delta q\cdot\Delta p\geqslant\frac{\hbar}{2} \tag{1.2.20}$$

- 人们还从实验发现：凡是自旋为 $0,\hbar,2\hbar,3\hbar,\cdots$ 的全同粒子，其波函数对于交换两粒子总是对称的，称为**玻色子 (boson)**。玻色子系统遵守 Bose-Einstein 统计。凡是自旋为 $\frac{\hbar}{2},\frac{3\hbar}{2},\frac{5\hbar}{2},\cdots$ 的全同粒子，其波函数对于交换两粒子总是反对称的，称为**费米子 (fermion)**。费米子系统遵守 Fermi-Dirac 统计。

至此人类建立起了完整的量子力学的理论体系。量子力学突破了经典物理学对物理世界的直观描述方式和 Laplace 决定论，用概率幅函数揭示了微观世界的统计性规律。

1.2.6 反粒子

微观粒子的运动不仅具有量子性，而且具有相对论性，即粒子运动速度往往非常接近光速。量子力学的 Schrödinger 方程是非相对论的，因此很自然地提出建立相对论波动方程的问题。1926 年 O. Klein 和 W. Gordon 发表自由粒子的相对论波动方程：

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\mathbf{r},t)=(-\hbar^2c^2\nabla^2+m^2c^4)\phi(\mathbf{r},t) \tag{1.2.21}$$

一般称之为 **Klein-Gordon 方程**，可以通过对相对论自由粒子的能量动量关系

$$E^2=\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4 \tag{1.2.22}$$

进行如式 (1.2.19) 所示的算符化操作得到。其实早在 Schrödinger 研究非相对论量子力学时就已得到方程 (1.2.21)，但他没有发表。Klein-Gordon 方程有平面波解：

$$\phi(\mathbf{r},t)=Ne^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} \tag{1.2.23}$$

其中 N 是归一化系数。将上式带入 (1.2.21) 式，可得粒子能量为：

$$E=\pm\sqrt{\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4} \tag{1.2.24}$$

上式表明，对于任意给定动量 $\mathbf{p}$ 的自由粒子，Klein-Gordon 方程除了 $E>0$ 的正能量解还存在 $E<0$ 的负能量解。不同于非相对论情形，Klein-Gordon 方程的负能解不能随意抛弃，这是因为在相对论情形下，粒子的能量如同动量一样可以取 $-\infty$ 到 ∞ 的所有可能值，以保证能量和动量的对称。负能解的存在将导致系统不稳定，因为粒子会不断地向能量更低的负能级跃迁。Klein-Gordon 方程的另外一个问题是负能量解所对应的概率密度为负，这从传统量子力学的角度看显然是没有物理意义的。因此 Klein-Gordon 方程提出不久就被搁置。一直到量子场论发展起来以后，才澄清了这一问题，并确认它是描述零自旋粒子场的相对论量子力学方程。

1928 年 P.A.M. Dirac 为了克服 Klein-Gordon 方程的负概率密度的困难引入了时空对称的一次线性偏微分方程，称为 **Dirac 方程** (参阅第 节)：

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) = (-ic\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta mc^2)\psi(\mathbf{r},t)} \tag{1.2.25}$$

式中波函数 $\psi(\mathbf{r},t)$ 有四个分量，$\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\nabla_i$，$\alpha_i, i=1,2,3$ 和 β 是 4×4 矩阵。

Dirac 方程除了有正定的概率密度 $\rho = \psi^\dagger\psi \geqslant 0$，还描写自旋 $\frac{\hbar}{2}$ 粒子，能自动导出电子自旋。但是负能量解仍然存在。Dirac 认为：物质世界存在正能级和负能级，负能级已全部被电子所填满，而所有正能级都空着的状态为真空 (vacuum)。由于 Pauli 不相容原理，每个能级只能容纳两个自旋相反的电子，因此电子不能跃迁到负能级。物质世界浸没在充满负能级电子的“负能量海”中，余下的电子分布在正能级区域。当有电子从负能级吸收一定能量的光子被激发出来，便跃迁到正能量区域，同时在负能量海中留下一个空穴 (hole)，表现为一个质量与电子相同、电荷与电子相反的粒子，这就是电子的**反粒子 (antiparticle)** — **正电子 (positron)**。Dirac 的这个理论称为空穴理论。

1932 年 C. Anderson 在研究**宇宙射线 (cosmic ray)** [7] 在磁场中的偏转情况时观察到正电子的存在。第二年，Anderson 又用 γ 射线轰击方法产生了正电子，从实验上完全证实了正电子的存在。从此正电子正式列入“基本”粒子的行列。正电子的发现使人联想到是否存在反质子、反中子、$\cdots$。现在已经证实每种粒子都存在一种和它对应的反粒子[8]，光子的反粒子是其本身。正电子的发现开辟了反物质的研究领域。

1934 年 Pauli 和 V. F. Weisskopf 重新解释了相对论方程的负能量解。他们把粒子电荷 $-e$ 与概率密度 ρ 结合在一起，这个新的量代表粒子的电荷密度，它仍然可正可负，但是负能量 $E<0$ 解其实是反粒子的正能量 $E>0$ 解。不同于 Dirac 的空穴理论，这种解释不仅适用于费米子，也适用于玻色子。1941 年 Strückelberg 以及 1948 年 Feynman 进一步提出了操作负能量态的方法，其主要思想是：一个逆时间轴传播的负能量粒子，等同于一个沿时间轴传播的正能量反粒子。这种等同的原因简单地说在于：

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(-E)(-t)} = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \tag{1.2.26}$$

这种做法使得正反电子有同等地位，不再需要 Dirac 电子海和空穴等令人困惑的概念。

有了反粒子的概念，微观粒子的反应过程变得更加丰富。事实上粒子物理学中存在**交叉对称 (crossing symmetry)** 原理。假设存在反应：

$$a + b \rightarrow c + d$$

则反应式中的任意一个粒子跨越到反应式另一边，并成为反粒子 (我们在粒子上加上划线表示反粒子，以 $\varnothing$ 表示真空) 的过程也存在，例如：

$$\begin{aligned} a + b + \overline{c} &\rightarrow d \\ \overline{c} + \overline{d} &\rightarrow \overline{a} + \overline{b} \\ \varnothing &\rightarrow \overline{a} + \overline{b} + c + d \end{aligned}$$

[7] 所谓宇宙(射)线，指的是来自宇宙中的一种具有相当大能量的带电粒子流。1912 年 V. F. Hess 在乘气球升空测定空气电离度的实验中，发现电离室内的电流随海拔升高而变大，从而认定电流是来自地球以外的一种穿透性极强的射线所产生的。有人为之取名为宇宙射线。现在知道，宇宙线主要是由质子、氦核、铁核等裸原子核组成的高能粒子流，也含有中性的 γ 射线和中微子流。

[8] 关于反粒子需要指出两点：① 正粒子和反粒子的质量、寿命等相同，电荷及所有内部相加性量子数 (参阅第 节) 相反。此外中微子的反粒子又不同于上述意义下的反粒子 (参阅第 节)。② 粒子和反粒子的选取是任意的，例如完全可以选取正电子为粒子，则电子为反粒子。粒子物理学中认为电子为正粒子，正电子为反粒子，可能原因是电子广泛存在于自然界中。

根据交叉对称原理以及细致平衡原理，从电磁相互作用过程 (1.2.13) 和 (1.2.14) 出发，容易验证以下过程也存在：

$$e^+ + \gamma \to e^+ \tag{1.2.27}$$
$$e^+ \to e^+ + \gamma \tag{1.2.28}$$
$$e^+ + e^- \to \gamma \tag{1.2.29}$$
$$\gamma \to e^+ + e^- \tag{1.2.30}$$
$$e^+ + e^- + \gamma \to \varnothing \tag{1.2.31}$$
$$\varnothing \to e^+ + e^- + \gamma \tag{1.2.32}$$

过程 (1.2.13)、(1.2.14) 以及 (1.2.27) – (1.2.32) 是八种最基本的电磁相互作用过程，它们的的费曼图如图 1.9 所示。图中无论是费米子 (电子) 还是反费米子 (正电子) 总是沿着时间轴方向从左到右传播，不过反费米子用带左向箭头的实线表示。事实上如果已经在费曼图的实线旁做了符号标记，那么实线上的箭头是多余的，反之亦然。

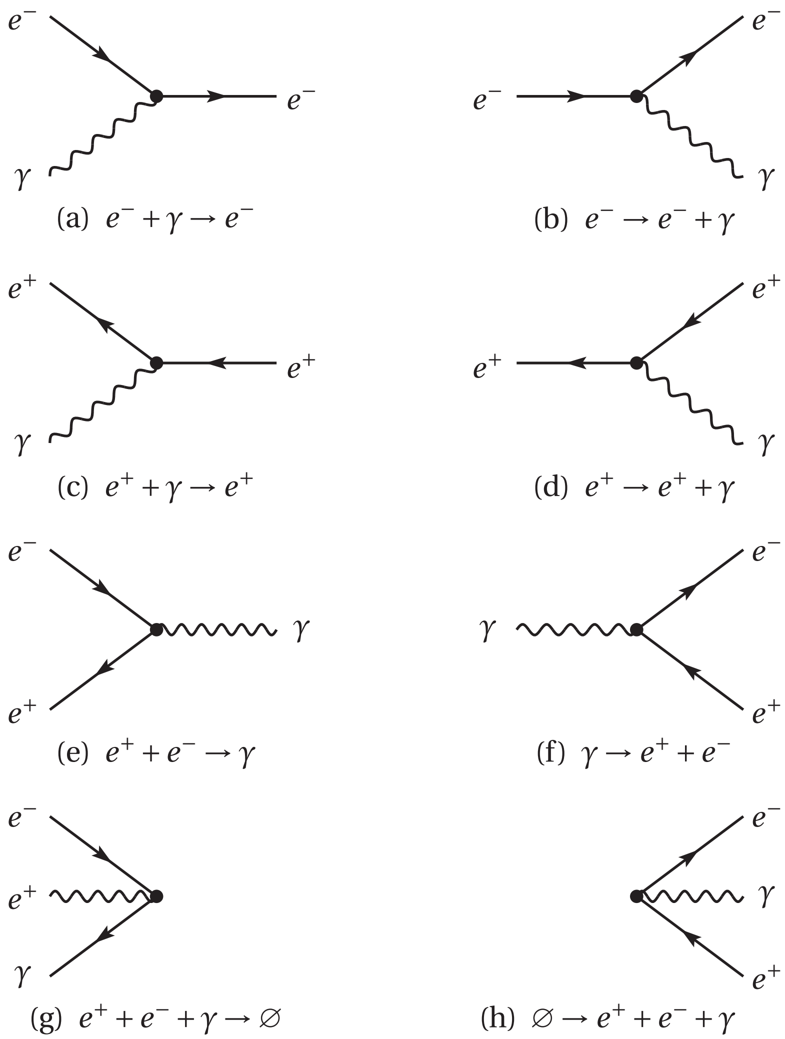


图 1.9: 电磁相互作用八种基本过程的费曼图。

1.2.7 量子场论

早在十九世纪，人们就已经认识到粒子和场是物质存在的两种形式。但二十世纪二十年代中期建立起来的量子力学实际上只限于处理粒子这种物质存在。量子力学也讨论了带电粒子与电磁场的作用，但没有把两者置于同等的地位。粒子是量子的，场是经典的。它们不能很好地处理光电效应、原子发射与吸收光子以及后来发现的各种粒子的产生和湮灭现象。

在量子力学框架下，当时很多人对于如何描写粒子的产生和湮灭现象是相当困惑的。下面这段话摘自“*The Physics Teacher*, Vol. 7, Issue 6, 1968, pp. 313-320”：

> ... It was a wonderful world my father told me about.
>
> You might wonder what he got out of it all. I went to MIT. I went to Princeton. I came home, and he said, "Now you've got a science education. I have always wanted to know something that I have never understood, and so, my son, I want you to explain it to me."
>
> I said yes.
>
> He said, "I understand that they say that light is emitted from an atom when it goes from one state to another, from an excited state to a state of lower energy."
>
> I said, "That's right."
>
> "And light is a kind of particle, a photon, I think they call it."
>
> "Yes."
>
> "So if the photon comes out of the atom when it goes from the excited to the lower state, the photon must have been in the atom in the excited state."
>
> I said, "Well, no."
>
> He said, "Well, how do you look at it so you can think of a particle photon coming out without it having been in there in the excited state?"
>
> I thought a few minutes, and I said, "I'm sorry; I don't know. I can't explain it to you."
>
> He was very disappointed after all these years and years of trying to teach me something, that it came out with such poor results.
>
> — R.P. Feynman

Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程建立后，人们一开始也试图把它们解释为描述单粒子的方程，这遇到了严重困难，因为将它们解释为单粒子方程就杜绝了粒子的产生和湮灭现象。事实上在相对论能量区域，粒子的产生和湮灭是经常发生的。例如只要能量大于粒子静质量的两倍，就极易产生一对粒子和反粒子。因此对于相对论粒子的描述必须超越单粒子理论的范围。

为此人们建议把 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程解释为描写无穷多自由度的场方程，也就是将出现在这些方程中的波函数 ϕ 和 ψ 解释为经典场，如同 Maxwell 方程中的势 $(\phi,\mathbf{A})$ 代表经典电磁场一样。然而经典场只能描述系统的波动性，为了描述其粒子性，必须对经典场实行量子化。由于从经典的力学过渡到 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程已构成一次量子化，因此把场的量子化称为**二次量子化 (second quatization)**。历史上对于经典场的量子化是从电磁场开始的。

1927 年 Dirac 首先提出将电磁场作为一个具有无穷维自由度的系统进行量子化的方案。他把电磁场分解成无穷多种振动方式的叠加，然后把每一种振动方式量子化，使其能量取一系列分立的数值。频率为 ω 的振动方式受到激发后跳到高能级，相应于产生一个频率为 ω 的光子。激发消失时，该振动方式跳回到原来的能级意味着一个光子的湮灭。电磁场是矢量场，由它经过量子化得到的光子是自旋为 $\hbar$ 的玻色子。

1928 年 Jordan 和 E.P. Wigner 在同样的基础上对电子场进行量子化，电子场的激发相应于电子的产生、电子场激发的消失相应于电子的湮灭。电子场是旋量场，量子化后得到的电子是自旋为 $\frac{\hbar}{2}$ 的费米子。电子场的量子化还自然地导致两种粒子出现，即除了电子之外，还有它的反粒子 − 正电子。

1929 年 Heisenberg 和 Pauli 进一步了考虑电磁场与电子场之间的相互作用，得到描述电子场和电磁场相互作用的量子场论。对应经典电动力学，把这种量子场论称为**量子电动力学 (quantum electrodynamics, QED)** [9]。

三十年代以后形成了描述各种粒子场的量子化理论，构成了描述粒子现象的理论基础。这些量子场论中，描述粒子之间电磁相互作用的 QED 是最成熟和最为精确的分支。量子场论突破了经典物理学中粒子和场 (波) 的对立，将物质的基本层次、基本力和物质世界的起源纳入了一个统一的理论范式。量子场论给出的物理图像是：

在全空间充满着各种不同的场，它们互相渗透并且相互作用着。场的激发态表现为粒子的出现，不同激发态表现为粒子的数目和状态不同。场的相互作用可以引起场激发态的改变，表现为粒子的各种反应过程。在考虑相互作用后，各种粒子的数目一般不守恒，因此量子场论可以描述各种粒子的产生和消失的过程。粒子之间的相互作用来自场之间的相互作用，场之间的相互作用是通过**传播子 (propagator)** 进行的，它是粒子转化的原因。所有的场处于基态时表现为真空，真空并不是空无一物，而是充满了各种场。

遗憾的是，量子场论只能精确求解没有相互作用情形下的自由场方程。对于存在相互作用的情形，只能采用近似方法。例如在 QED 中，考虑到表征电磁相互作用强度的精细结构常数 α 是一个很小的量，因此可以把相互作用看成是一种对自由场 $\hat{H}_0$ 的微弱的扰动 $\hat{H}'$，并表示成为 α 的幂级数，然后逐阶求出它的近似解。这种近似求解方法称为**微扰论 (perturbation theory)**。

有了上述关于量子场论的基本概念，再看图 1.9 所示的八种费曼图，它们是电磁相互作用的基本过程。但是在自由空间中，这八种过程均违反能动量守恒，因而是不可能发生的。只有当两个或多个这样的基本过程组合在一起，所有组合的集合才是真实的物理过程。在组合的时候必须考虑到量子场论中相互作用是通过传播子传递的。例

[9]这种建立量子场论的表述形式称为正则量子化形式。量子场论还有一些基本上与正则量子化形式等价的表述形式，其中最常用的是 Feynman 于1948 年建立并在后来得到很大发展的路径积分形式。

如图 1.10 中黑色费曼图和红色费曼图所表示的电磁相互作用都是允许的：

$$
\begin{array}{rccccccc}
\text{Møller 散射：} & e^- & + & e^- & \to & e^- & + & e^- \\
\text{Bhabha 散射：} & e^- & + & e^+ & \to & e^- & + & e^+ \\
e^-e^+ \text{ 对湮灭：} & e^- & + & e^+ & \to & \gamma & + & \gamma \\
e^-e^+ \text{ 对产生：} & \gamma & + & \gamma & \to & e^- & + & e^+ \\
\text{Compton 散射：} & \gamma & + & e^- & \to & \gamma & + & e^-
\end{array}
$$

这些过程均由两个 QED 基本图组成，含有两个相互作用顶点，对应 QED 的二阶微扰近似，也是真实发生的电磁过程中的最低阶近似，或称为领头阶 (leading order, LO) 近似。一个完整的物理过程应包括所有最低阶和所有其他高阶微扰近似。

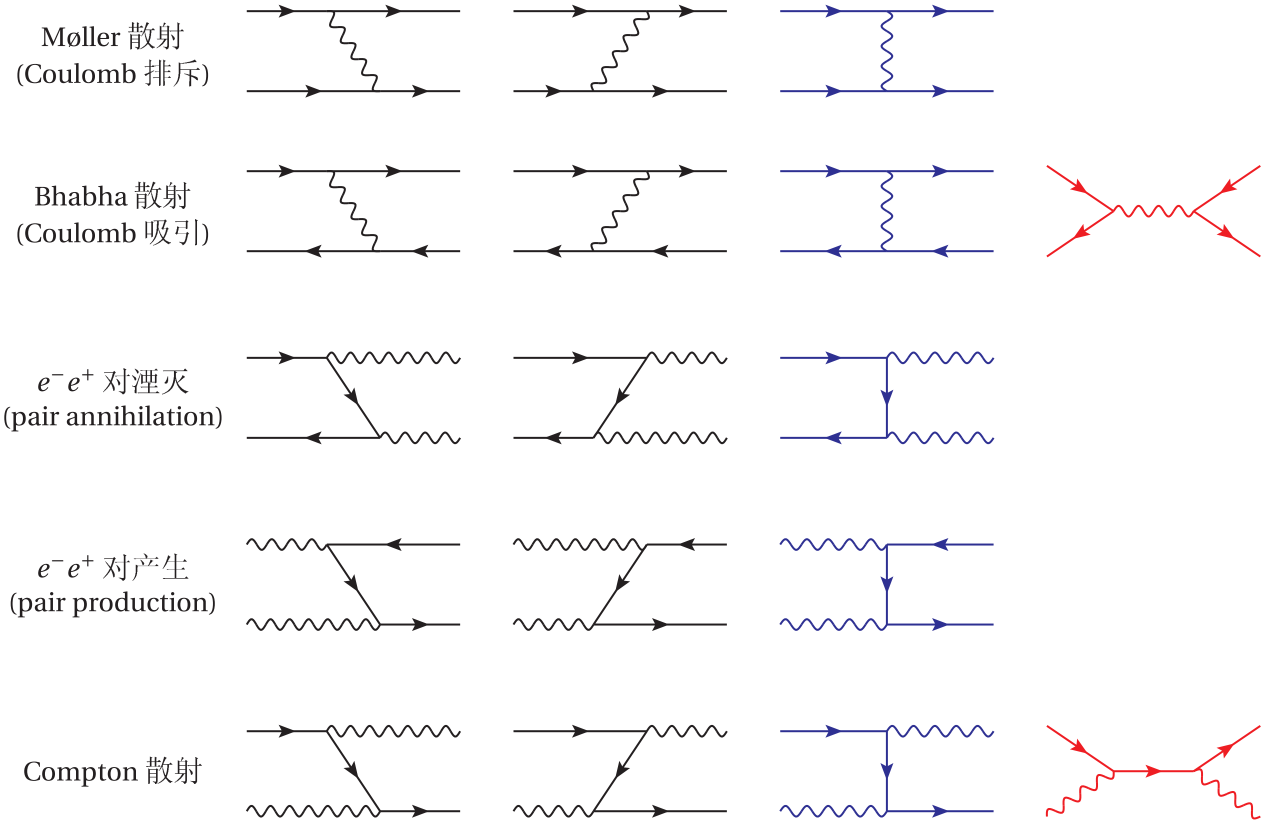


图 1.10: QED 最低阶微扰过程的费曼图。黑色费曼图 (第 2, 3 列) 所表示的过程，差别仅在于时间次序不同，通常把它们合在一起，画成蓝色 (第 4 列) 费曼图。对于 Bhabha 散射和 Compton 散射，还有红色费曼图 (第 5 列) 所示的过程。

图 1.10 中有些线条的两端都是相互作用顶点，这些线条称为内线 (internal line)，代表反应的中间过程，也就是量子场论中的传播子。传播子的能量不守恒，质壳关系不成立：

$$E^2 - \mathbf{p}^2c^2 \neq m^2c^4$$

因而传播子称为**虚粒子 (virtual particle)**，相应的过程称为虚过程 (virtual process)。传递相互作用的虚粒子不是实验可观测对象，但在量子场论中起着很重要的作用。

以图 1.10 中的最低阶 Bhabha 散射过程 $e^- + e^+ \to e^- + e^+$ 为例，电子发射出一个光子，在很短时间 Δt 内被附近的正电子吸收 (第一个黑色费曼图)，在这段时间内光子不

不满足质壳关系，是离壳的虚光子。时间 Δt 由 Heisenberg 不确定关系所描述：

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E} \tag{1.2.33}$$

式中 ΔE 是虚光子的能量不确定度。Bhabha 散射也可以是正电子发射出一个光子，被邻近的电子吸收 (第二个黑色费曼图)。这两个黑色费曼图的差别只在于时间次序的不同，都是真实发生的二阶微扰过程，通常把它们合在一起，如图中蓝色费曼图所示，代表 Bhabha 散射中的弹性散射。Bhabha 散射过程还可以是 e^-e^+ 湮灭为虚光子，再生成 e^-e^+ 对，如图中红色费曼图所示，这是 Bhabha 散射中的非弹性散射。

关于电磁相互作用的 QED 费曼图的几点说明：

- QED 费曼图中的费米子线总是首尾相连在一起的，表明 QED 中带电费米子以电流的形式与电磁场相耦合。带电费米子之间的相互作用可以看成电流之间通过交换电磁场的量子进行的。电磁场是传递电磁相互作用的媒介，它的量子 − 光子有时候也称之为电磁作用的**媒介子 (mediator)**。
- QED 中的费米子并不仅限于电子，只要是带电粒子，例如质子，都有如图1.9 所示的八种基本费曼图。
- 到目前为止，所讨论的 QED 费曼图中的线条都不构成回路，它们的形状具有树的特征，这种费曼图称为**树图 (tree diagram)**。
- 一般地说，如果一个费曼图 (不限于 QED) 可以用 n 个基本费曼图的总和表示，那么与该费曼图相应的反应过程有 n 个相互作用顶点。例如图 1.10 中的任意一个 QED 过程都是由图 1.9 中的两个 QED 基本费曼图组成，因而有两个顶点。

  QED 基本费曼图的顶点对概率振幅的贡献因子是 $\sqrt{\alpha}$，因此 n 个顶点对概率振幅的贡献因子是 $\alpha^{\frac{n}{2}}$，对概率的贡献因子 (忽略概率振幅之间的干涉) 则为 α^n。因为 $\alpha \approx \frac{1}{137}$ 很小，所以对于电磁相互作用通常只要考虑二阶近似即可。

例 1 电子与电子的散射过程也可以通过双光子交换进行，它的某一个时序的费曼图如图 1.11 所示。这样的费曼图称为**箱图 (box digram)**。

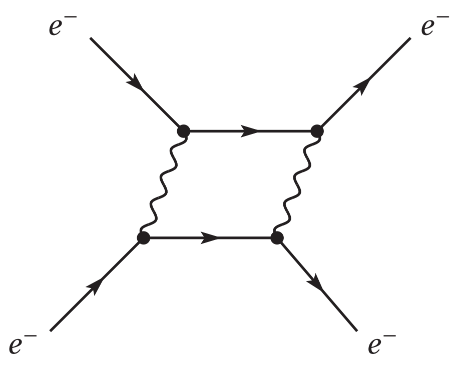


图 1.11: e^-e^- 通过双光子交换的散射过程

由于每个电磁作用顶点对概率振幅的贡献为 $\sqrt{\alpha}$，而双光子过程共有 4 个顶点，因此它对概率振幅的贡献因子是 α^2，对概率的贡献因子是 α^4。即发生双光子交换过程的概率远小于发生单光子交换过程的贡献。

例 2 正负电子湮灭可以产生至少两个光子。对于末态为两个光子的过程，它的某一时序的费曼图如图 1.12 (a) 所示 (共有 $2! = 2$ 种时序)。对于末态为三个光子的过程，它的某一时序的费曼图如图 1.12 (b) 所示 (共有 $3! = 6$ 种时序)。类似上例分析，可知产生三个光子的概率小于产生两个光子的概率，两者比例为：$R = \frac{\text{Rate}(e^-e^+\to 3\gamma)}{\text{Rate}(e^-e^+\to 2\gamma)} = O(\alpha)$。

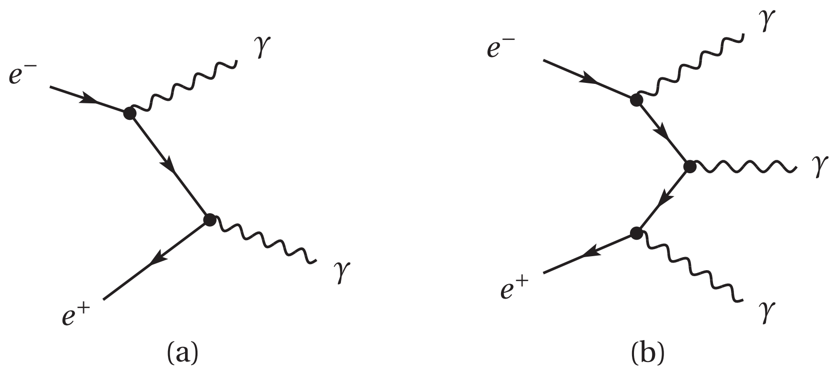


图 1.12: e^-e^+ 湮灭的某一种时序的费曼图。(a) $e^-e^+ \to \gamma\gamma$，(b) $e^-e^+ \to \gamma\gamma\gamma$

原子物理学中一般不需要考虑量子场论。原子由带负电的核外电子与带正电的原子核 (质子) 之间通过 Coulomb 吸引力束缚在一起。现代量子场论认为这种 Coulomb 力是通过在电子和质子之间不断地产生和吸收光子传播子进行的。大量光子的不断产生和吸收导致束缚态原子中电磁作用的量子涨落效应被有效地抹平，因此经典的 Coulomb 定律足以精确地描述电子和质子之间的相互作用。但是在大多数涉及基本粒子的过程中，遇到的是个别传播子的过程，这时相互作用的量子效应不能被忽略，因此量子场论的处理方式是必须的。

1.2.8　中微子

1914 年 Chadwick 在研究放射性元素的 β 衰变时发现电子能量呈现连续谱，例如氚核的 β 衰变能谱如图 1.13 所示。这种连续能量谱在早期是很难理解的，因为当时大量事实已证明放射性衰变过程中放出的 α 射线和 γ 射线的能量都是分立的，与原子核的分立能级相应，既然 β 射线也是从原子核中射出，那么它的能量似乎也应该是分立的。另一方面，当时人们认为中子的 β 衰变是两体衰变，即

$$n \;\to\; p \;+\; e^-$$

在中子质心系中，其衰变末态 p 和 e^- 作背对背运动，它们的动量大小相等、方向相反，按照能量守恒定律，可严格计算得到电子能量为：

$$E = \frac{m_n^2 - m_p^2 - m_{e^-}^2}{2m_n}c^2 \tag{1.2.34}$$

上式表明，对于确定的中子、质子和电子质量，电子能量是一个固定值。这显然与实验结果矛盾。面对这个难题 Bohr 甚至认为 β 衰变过程中能量守恒定律失效。

1930 年 Pauli 提出，β 衰变过程中能量守恒定律仍然成立，能量亏损的原因在于衰变时还产生了一个质量非常小的中性粒子，它同周围物质的相互作用力很弱，所以无法被实验仪器所探测到，但是带走了一部分原子核内释放的能量。E. Fermi 把这种质量极小的中性粒子命名为**中微子 (neutrino)** 。中微子的自旋为 $\frac{\hbar}{2}$，用希腊字符 ν 表示。

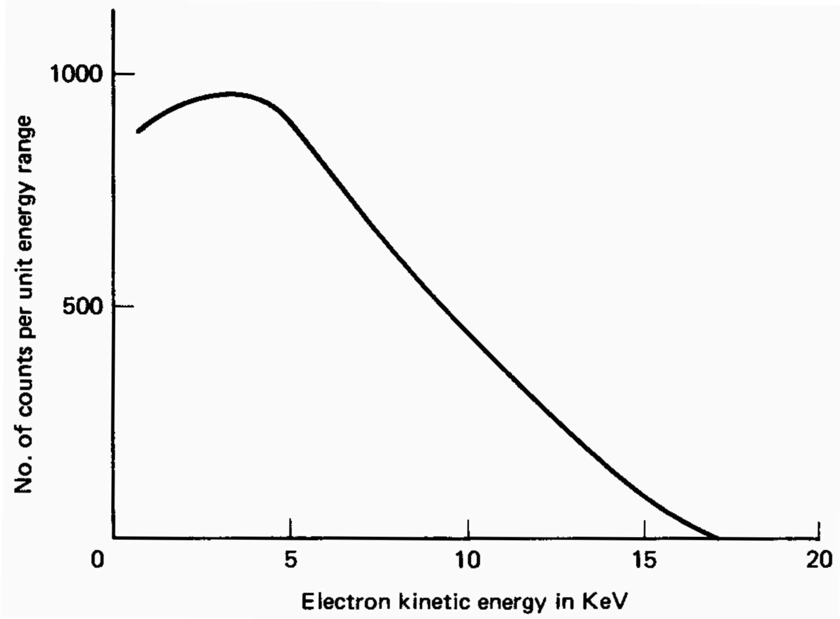


图 1.13: 氚核的 β 衰变能谱 $({}^3_1\mathrm{H} \rightarrow {}^3_2\mathrm{He})$

1933 年 Fermi 根据 Pauli 的中微子假设，对原子核的 β 放射性行为做如下解释：原子核内的中子在衰变成质子的过程中，不仅放出一个电子，同时还放出一个中微子 [10]，即中子的 β 衰变过程可表示为：

$$\boxed{n \;\rightarrow\; p \;+\; e^- \;+\; \overline{\nu}_e} \tag{1.2.35}$$

其中与电子相伴产生的中微子后来认识到是电子反中微子，我们直接用 $\overline{\nu}_e$ 表示。问题在于是什么相互作用导致中子发生 β 衰变？显然电磁相互作用不可能产生这个过程，因为电磁作用的传递者是光子，而在这种衰变中没有光子参加。Fermi 假定 β 衰变过程是由于自然界中某种新的相互作用引起的，它具有如下性质：

- 这种新的相互作用要比电磁作用弱 10^{11} 倍，但比万有引力要强得多；
- 发生在四个自旋为 $\frac{\hbar}{2}$ 的粒子之间；
- 力程极短，几乎为零，参与相互作用的粒子彼此一离开，这个力就迅速消失；
- 不能把粒子束缚在一个复杂体系中，只存在于粒子发生衰变和俘获的瞬间。

Fermi 提出的这种新的相互作用就是**弱相互作用 (weak interaction)** [11]。

Fermi 还提出了中子 β 衰变的第一个弱相互作用量子场论模型。类比 QED，把中子的 β 衰变过程看作是四个费米子组成的两个弱流的直接相互作用，通常称为四费米子相互作用。在这个理论中，中子和质子形成一个与电流类似的带电的矢量流，称

[10] 后来人们发现中微子有三种，分别是电子中微子 ν_e、μ 子中微子 ν_μ 和 τ 子中微子 ν_τ。而且每种中微子都有反粒子，即反中微子，用符号 $\overline{\nu}$ 表示。中子 β 衰变过程中放出的实际上是电子反中微子 $\overline{\nu}_e$。

[11] 也有人认为 β 衰变中包含一种新的相互作用的想法是 G. Gamov 和 E.Teller 首先提出的。不过，正如李政道在《弱相互作用的历史》所言，“… 关于弱相互作用是一个不同的物理作用力的想法，其演化是很缓慢的。只有当实验上发现了其它弱作用过程，如 μ 衰变，μ 俘获等等，并且理论上认识到所有这些作用能够近似地用同一个耦合常数来描述之后，这一看法才变得明朗起来，才产生了普适的弱相互作用的看法。只有在此之后，人们才慢慢地认识到，弱相互作用力形成一个独立的领域。”

为 V 流，电子反中微子和电子形成了另一个矢量流。四个费米子在一点的弱作用，可以看成是矢量流与矢量流的直接相互作用。

图 1.14 给出了该过程的示意图。图中的中子、质子、电子、电子反中微子等费米子均用实线表示，四条费米子线交于顶点，两条费米子线的箭头朝向顶点，两条费米子线的箭头离开顶点。确切地说，图 1.14 不是费曼图，因为量子场论中不存在这种四个费米子的直接相互作用。

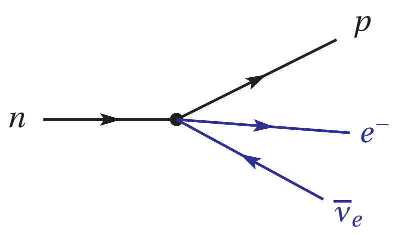


图 1.14: 中子 β 衰变的 Fermi 理论给出的四费米子直接作用过程示意图。

Fermi 关于中子 β 衰变的弱作用理论给出了该过程的 **衰变率 (decay rate)**，即单位时间内的衰变概率，它正比于 Fermi 耦合常数 G_F 的平方。G_F 是弱相互作用的一个特征常数，由下式给出：

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1.16637(1) \times 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2} \tag{1.2.36}$$

中微子的质量极小 [12]，不参与电磁作用和强作用，只与物质发生弱相互作用，且反应截面极小，穿透物质的能力极强。因此直到 1956 年才由 C. Cowan 和 F. Reines 利用美国 South Carolina 州的 Savannah River 核反应堆作为粒子源才被探测到 [13]。确切地说 Cowan 和 Reines 发现的是核反应中产生的电子反中微子 $\overline{\nu}_e$。真正的中微子是 1968 年利用安放在意大利的一个废矿井中的探测器发现的，它们来自太阳内部的核反应。

核反应堆是地球上最大的中微子源，反应产生的中微子的能量是连续的，通常可以达到几个 MeV，中微子流强则正比于反应堆的功率。Savannah River 核反应堆的功率为 0.7 GW，中微子流强为 $\Phi = 10^{17}\,\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$。电子反中微子 $\overline{\nu}_e$ 通过反 β 衰变间接探测：

$$\overline{\nu}_e \;+\; p \;\rightarrow\; e^+ \;+\; n \tag{1.2.37}$$

不过这种过程的截面非常小：

$$\sigma \approx 10^{-47}(E_\nu/\mathrm{MeV})^2\mathrm{m}^2 \tag{1.2.38}$$

对应平均自由程数百万公里。实验中很容易得到的富含质子的物质是水，我们估计一下为了使得计数率达到 $n \approx 10^{-3}\,\mathrm{Hz}$ 需要多少水。取典型值 $E_\nu = 1\,\mathrm{MeV}$，单位时间内打在单位靶质子上的反中微子为 $W = \Phi\sigma = 10^{-30}\,\mathrm{s}^{-1}$，因此需要 $\frac{n}{W} \approx 10^{27}$ 个质子。因为每 mole 水中有 $2N_A \approx 10^{24}$ 个质子，所以需要 1000 mole 或者 10 kg 水。当然实验中水越多越好，考虑到探测效率，Reines 用了 200 kg 水。

实验最大的问题不是事例率，而是如何把信号和大量的本底区分。核反应堆中微子实验有三种主要本底：一是任何核反应堆附近都存在的中子，二是无处不在的宇宙线，三是探测器周围物质的中性放射性。

[12] 粒子物理学的标准模型 (参阅第 1.3.8 节) 假设中微子质量为零。
[13] 参阅文献：Cowan, C.L. *et al.* (1956), *Science* **124** 103。

图 1.15 所示为 1955 年 Cowan 和 Reines 探测中微子的原理图，一个能装大约 100 升水的容器两边是**液体闪烁体 (liquid scintillator)**。核反应堆发出的反中微子与水中质子相互作用产生一个中子和一个正电子。正电子立刻与电子湮灭，产生两个背对背光子，能量都是 511 MeV。这对光子通过液闪传到**光电倍增管 (photomultiplier tube, PMT)** 产生两个同时的信号。为了进一步压制本底，还需要进行中子的探测。由于水是很好的慢化剂，因此中子在水中会迟缓几个微秒。又因为镉俘获中子的截面非常大，所以实验中把 40 公斤的 $CdCl_2$ 溶解在水中。于是一个镉原子核俘获一个延迟的中子后处在激发态，随即退激释放出一个光子。这个延迟光子通过液闪传到 PMT，产生一个延迟的信号。使之与正电子发出的两个信号做符合，得到一个反 β 衰变事例。实验装置示意图如图 1.16 所示。排除本底贡献后，实验结果发现每小时有 $n = 3 \pm 0.2$ 事例，由此人们实验证实电子反中微子存在。此时距离 Pauli 的预言已经过去 $\frac{1}{4}$ 个世纪。

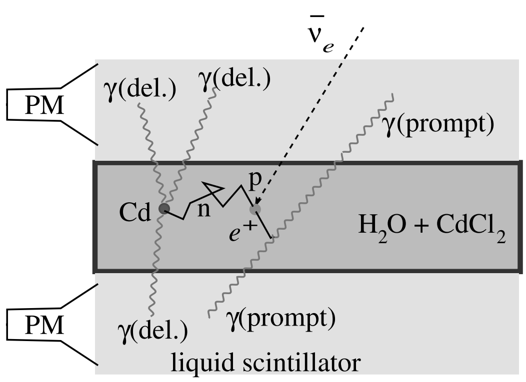


图 1.15: Sanannah River 实验的探测原理图

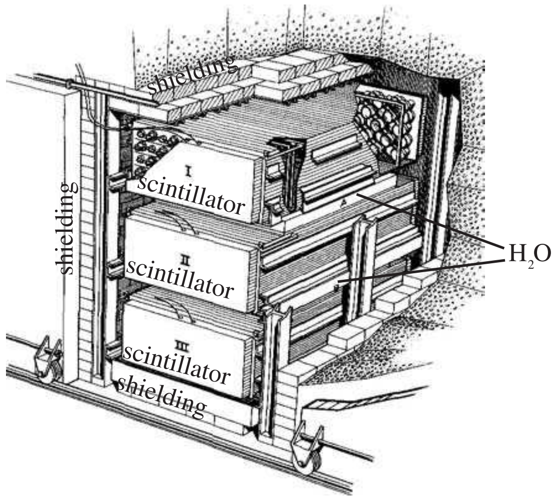


图 1.16: Sanannah River 实验的装置示意图

1.2.9 π 介子

1934 年汤川秀树 (Yukawa Hideki) 类比描写电磁相互作用的 QED 理论，提出核力是通过中子和质子之间一种具有质量的基本粒子传递的。

汤川首先考虑的是描写 $n-p$ 相互作用的静态势的可能形式。由于核力只在 1 – 2 fm 范围内起作用，因此不可能是类似 Coulomb 势的 $\frac{1}{r}$ 形式。汤川假设 $n-p$ 相互作用的静态势形式为：

$$U(\mathbf{r}) = \frac{-g_s^2}{4\pi}\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r} \tag{1.2.39}$$

式中 g_s 是一个类似基本电荷 e 的常数，称为**强荷 (strong charge)** 或者强相互作用耦合常数，$r = |\mathbf{r}|$，$a \sim 1-2\,\mathrm{fm}$ 是核力范围。可以证明该势场 $U(\mathbf{r})$ 满足方程：

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{a^2}\right)U(\mathbf{r}) = g_s^2\delta(\mathbf{r}) \tag{1.2.40}$$

与静电学中的 Poisson 方程 $\boldsymbol{\nabla}^2 V(r) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$ 比较，可知上式描写的是一个位于 $\mathbf{r}$ 处的点状强荷 g_s (测试强荷) 和另外一个位于原点的点状强荷 g_s (源强荷) 之间的相互作用。式中的 $\delta(\mathbf{r})$ 函数明确表明强荷 (作为强场的源) 集中在一个点。

接着汤川把静态势 $U(\mathbf{r})$ 推广到非静态势 $U(\mathbf{r},t)$ 的情形。考虑相对论不变性，在无源自由空间 $r\neq 0$ 处，关于 $U(\mathbf{r},t)$ 的场方程为：

$$\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\frac{1}{a^2}\right)U(\mathbf{r},t)=0 \tag{1.2.41}$$

至此 $U(\mathbf{r},t)$ 仍为经典场。汤川认为 $U(\mathbf{r},t)$ 是量子化的 de Broglie 波：

$$U(\mathbf{r},t)\propto e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} \tag{1.2.42}$$

将上式代入式 (1.2.41)，得到：

$$\frac{E^2}{c^2\hbar^2}=\frac{\mathbf{p}^2}{\hbar^2}+\frac{1}{a^2} \tag{1.2.43}$$

与质量为 m 的粒子的能动量关系 $E^2=\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4$ 比较，得：

$$m_U=\frac{\hbar}{ac} \tag{1.2.44}$$

式中 m_U 是核力场 U 的量子的质量。核力场力程有限 $a\sim 1-2\,\mathrm{fm}$，代入上式可得：

$$m_U\sim 100-200\,\mathrm{MeV} \tag{1.2.45}$$

汤川进一步考虑 $n-p$ 相互作用。对于反应过程：

$$n\ +\ p\ \rightarrow\ n\ +\ p$$

既可以是 n 发射出一个 U^- 量子，U^- 量子很快被邻近的 p 吸收，也可以是 p 发射出一个 U^+ 量子，U^+ 量子很快被邻近的 n 吸收，它们的费曼图如图 1.17 (a) (b) 所示。因此 $U^{\mp}$ 量子是核力的传播子，其电荷根据相互作用顶点处电荷守恒决定。因为中子和质子的自旋为 $\frac{\hbar}{2}$，所以 $U^{\mp}$ 粒子的自旋只能是零，费曼图中用虚线表示。强相互作用顶点的强度由强作用耦合常数 g_s 表征。

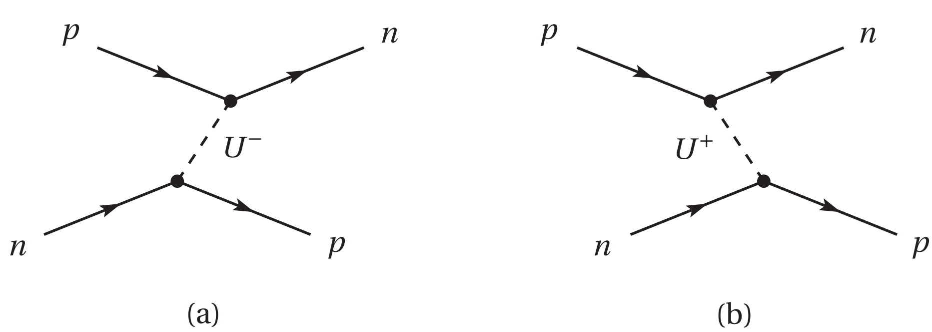


图 1.17: $n-p$ 相互作用的 Yukawa 理论给出的费曼图。(a) U^- 交换 (b) U^+ 交换。

尽管 $U^{\pm}$ 是传播子，但是如果能量涨落 ΔE 很大，它们还是可以得到足够的能量而真实存在在 [14]，因此汤川理论预言了一种新粒子的存在。理论预言 $U^{\pm}$ 粒子的质量介于电子和质子之间，汤川称之为**介子 (meson)**。相应地，质量较介子轻的电子称为轻子 (lepton)，质量较介子重的质子和中子称为重子 (baryon)。后来人们发现用质量对粒

[14]参阅文献：Wick, G.C. (1938), *Nature* **142** 993

子进行分类并不合适，现在介子和重子专指参与强相互作用的两类强子，轻子专指不参与强相互作用的粒子。

1936 年 C.D. Anderson和他的学生 S.H. Neddermeyer 在宇宙线中发现了一种新粒子，其质量是电子质量的 207 倍，他们认为这就是汤川所预言的介子，并命名为 μ **子 (muon)**。当时的 J.C. Street 和 E.C. Stevenson 也独立地发现了μ 子。其后 10 年人们一直认为 μ 子就是汤川预言的传递核力的 π 介子。

1947 年 M. Conversi、E. Pancini 和 O. Piccioni 等人[15] 用计数器统计的方法发现 μ 子并不参与强作用 (μ 子的寿命远大于强相互作用下粒子的典型寿命)。事实上 μ 子除了质量比较大之外，其他方面的性质反而更象一个电子，因此也有人称之为重电子。μ 子进入物质后，像电子那样通过许许多多次电离碰撞逐渐丢失能量后几乎静止在物质中，最后几乎完全按下述方式衰变为电子，并放出两个中微子：

$$\mu^- \;\rightarrow\; e^- \;+\; \overline{\nu}_e \;+\; \nu_\mu \qquad (1.2.46)$$

$$\mu^+ \;\rightarrow\; e^+ \;+\; \nu_e \;+\; \overline{\nu}_\mu \qquad (1.2.47)$$

我们知道中子的 β 衰变过程 $n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$ 中，电子 e^- 和电子反中微子 $\overline{\nu}_e$ 总是相伴产生。类似地，正电子 e^+ 和电子中微子 ν_e、μ^- 子和 μ 子反中微子 $\overline{\nu}_\mu$ 以及 μ^+ 子和 μ 子中微子 ν_μ 也总是相伴产生。式 (1.2.46) 中还利用交叉对称原理把与 μ^- 子相伴产生的 μ 子反中微子移到反应式右边，变成了相应的 μ 子中微子，式 (1.2.47) 中也已经把与 μ^+ 子相伴产生的 μ 子中微子移到反应式右边，变成相应的 μ 子反中微子。

1947 年 C.F. Powell 等人将核乳胶 (一种特制的照相底片) 送到高空记录宇宙线。结果从照片中发现了真正具有强作用的荷电介子，其质量约为电子质量的 273 倍，正是汤川所预言的那种粒子，称为 π **介子 (pion)**。无论 π^+ 还是 π^- 都是不稳定的，平均寿命约为 2.6×10^{-8}s，它们主要按如下方式衰变：

$$\pi^+ \;\rightarrow\; \mu^+ \;+\; \nu_\mu \qquad (1.2.48)$$

$$\pi^- \;\rightarrow\; \mu^- \;+\; \overline{\nu}_\mu \qquad (1.2.49)$$

这也是自然界中的 $\mu^\pm$ 子的主要产生过程。

汤川提出的介子是带电的。1938 年 N. Kemmer 基于核力电荷无关性的实验事实，发展了稍早时候出现的同位旋的概念，建立了核力的SU(2) **味对称 (flavor symmetry)** 理论。这个理论有两个重要的结果：一是除了带正负电的 $\pi^\pm$介子之外，还应当有电中性的 π^0 介子，三种介子的质量应当相同；二是强相互作用的粒子可按同位旋分成一组组的多重态。π^0 介子是第一个根据对称性原理预言的粒子。对于对称性和守恒量的认识，一方面是方法论上的突破，另一方面揭示了自然的本质，这一跨越物理学各个领域的普遍法则已成为科学家探索未知的深层次奥秘的利器。

1950 年在**粒子加速器 (particle accelerator)** 实验中发现了 π^0 介子。π^0 介子的质量比 $\pi^\pm$ 的略小，约是电子质量的 264 倍，平均寿命则更短，约为 0.83×10^{-16}s，它刚一产生就很快衰变，衰变末态主要是两个光子：

$$\pi^0 \;\rightarrow\; \gamma \;+\; \gamma \qquad (1.2.50)$$

人们正是通过探测这两个光子而发现 π^0 的。

---

[15]参阅文献：Conversi, M. *et al.* (1947), *Phys. Rev.* **71** 209 (L)

1.2.10 重整化

1930 年 J.R. Oppenheimer 计算了电子与它自己的场的相互作用，这是一个电子发射一个虚光子然后再把它吸收回去的过程，如图 1.18 (a) 所示。电子与自己的场的这种相互作用称为电子的**自能 (self energy)**，也就是电子的质量。按照 QED，这是一个完全可以发生的过程。计算结果是无穷大，表明电子质量无穷大。

后来人们计算了 QED 允许的如图 1.18 (b) 所示的**真空极化 (vacuum polarization)** 过程，即光子先变成一对虚的正负电子，然后这对虚的正负电子很快地湮没重新变成一个光子的过程，计算结果也是无穷大。它相当于电子的电荷变成了一个无穷大的量。此外，无穷大还来自如图 1.18 (c) 所示的**顶点修正 (vertex correction)** 过程。事实上在用 QED 计算任何物理过程的高阶修正时却都得到无穷大的结果。同样的问题也存在于其他的相对论性量子场论中，这就是量子场论中著名的发散困难[16]。

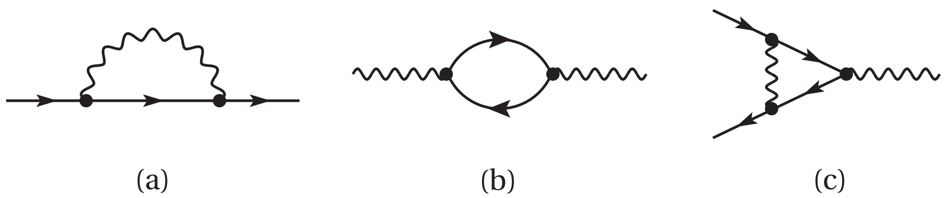


图 1.18: 三种基本的电磁作用发散费曼图：(a) 电子自能，(b) 真空极化，(c) 顶点修正。

图 1.18 所示的几种电磁相互作用费曼图与前述的树图相比，都有一个封闭的圈，这样的费曼图称为**圈图 (loop diagram)**。图 1.18 (a) 有一个由电子和光子组成的圈，图 1.18 (b) 有一个由电子和正电子构成的圈，而图1.18 (c) 有一个由光子、电子和正电子构成的圈。

1936 年 V. Weisskopf 提出了一个建议，他认为电子总是被虚的光子和虚的 e^-e^+ 对所包围，像是穿了身衣服。它的真实面目或裸的电子，我们是看不到的。很可能这些裸电子的电荷、质量本来都是无穷大，刚好与计算得到的无穷大相抵消，使我们所看到的真实的、物理的电子有有限的质量和能量。所以我们尽可以把那些计算得到的无穷大，吸收到电子的质量与电荷的重新定义中去，用观测得到的真实电子的质量和电荷做为理论计算所需的数值。这种技术称为**重整化 (renormalization)**。

不过 Weisskopf 本人不知道怎么进行重整化。四十年代，在 J.S. Schwinger、朝永振一郎 (Shin-Ichiro Tomonaga)、Feynman 以及 F.J. Dyson 等人的努力下，终于找到了消除无穷大的重整化方法，原则上解决了 QED 中出现的发散困难。重整化的普遍理论及其严格证明直到六十年代中才完成。

QED 的重整化微扰论计算在很高的精度上与电子和 μ 子的反常磁矩，以及原子能级的兰姆移位 (Lamb shift) 的实验符合，迄今 QED 通过了所有实验的考验，这些实验表明 QED 在大于 10^{-18} m 处是正确的。

量子电动力学重整化取得的成功使不少粒子物理的理论家相信，用不了多久就会完全地理解所有的相互作用。当时几乎所有的理论家们都企图借助于 QED 中取得的成功经验，通过适当的量子场论方法处理强相互作用和弱相互作用。

[16]量子场论发散的根源在于微观粒子被看作一个点。即使在经典场论中，如果把电子看作一个点，由电子产生的电磁场对本身的作用而引起的电磁质量也是无穷大。量子场论中发散有更多的形式，它们都起源于粒子产生的场对本身的自作用。

强相互作用典型的量子场论是汤川秀树于1935年建立的。五十年代初理论家们很容易地证明了，汤川理论是可以重整化的。但同时他们也发现，这个理论实际上根本不能用。在量子电动力学中，由于相互作用强度正比于精细结构常数 α，它是一个很小的量，因此级别越高的微扰图贡献越小。而强相互作用中与 α 类似的量，其数值大于1，因此对于强作用根本不适用微扰的概念。就连最低阶的计算，也是毫无意义的。

再看弱相互作用。由于弱作用的耦合常数很小，因此微扰展开完全可行。但当人们计算弱作用过程的高阶近似时发现弱作用理论是不可重整的。事实上，随着微扰展开的级数增高，圈图引入的无穷大的种类越来越多。它们不能象QED那样，通过重新定义质量和耦合常数等有限的几个物理常数而消除掉。于是高阶的计算成为没有意义的，人们只好满足于最低阶树图的计算结果。即便如此，人们发现还有问题。用这种四费米子相互作用算得的截面随能量成线性增长，到一定的能量时会破坏量子力学中的概率守恒。

由于扩展QED的尝试接连碰壁，不少人对量子场论的信心从动摇到崩溃，甚至想摒弃场论方法。量子场论发展中的这个低谷一直持续了将近20年。

1.3 从强子到夸克

到1947年，“基本”粒子世界的主要角色似乎已经齐全了，它们之间的相互作用似乎也比较清楚。质子与中子靠 π 介子传递的很强的核力束缚成原子核。原子核与核外电子靠光子传递的电磁相互作用束缚成原子。中微子是 β 衰变理论中必需的，只有 μ 子的存在原因不明。核力比电磁相互作用力要强上千倍。中子、π 介子和 μ 子都是不稳定的粒子，它们的衰变由弱相互作用主导，弱相互作用的强度不到电磁相互作用的万分之一。一直到二十世纪中叶，质子、中子、电子、光子、中微子、π 介子和 μ 子都被认为是“基本”粒子或亚原子粒子。这些“基本”粒子都有相应的反粒子，光子的反粒子是其本身。

但是“基本”粒子世界的这种似乎完美的局面并没有维持多久。就在 π 介子发现的同一年，一些出乎预料的新粒子的发现重新打破了短暂的平静，给“基本”粒子世界带来了前所未有的繁荣。

1.3.1 奇异粒子

1947年G. Rochester和C. Butler在用云室研究宇宙线时发现 V 型事例[17]，如图1.19所示。宇宙线从左上角进入带磁场的云室后打在中间的铅版上，产生一个中性粒子，该粒子飞行一段距离后衰变为两个带电粒子，在云室右下角形成两条 V 型径迹。通过对云室照片的详细分析，知道这两条 V 型径迹是 π^+ 和 π^-，衰变前的中性粒子的质量可以由测得的 π 介子的能量和动量定出。结果发现这个中性粒子的质量介于 π 介子和质子之间，属于重介子，它是一种前所未知的新粒子，当时称之为 V^0，不久改称为 θ^0：

$$\theta^0 \;\to\; \pi^+ \;+\; \pi^-$$

[17]事实上，在更早些的1943年，L. Leprince-Ringuet和M. l'Héritier就已经用云室发现了这种粒子，并测得其质量为 $506\pm61\,\mathrm{MeV}/c^2$，参阅文献：Leprince-Ringuet, L. & l'Héritier, M. (1944) *Compt. Rend.* **219** 618. 不过由于第二次世界大战，他们的工作没有引起注意。

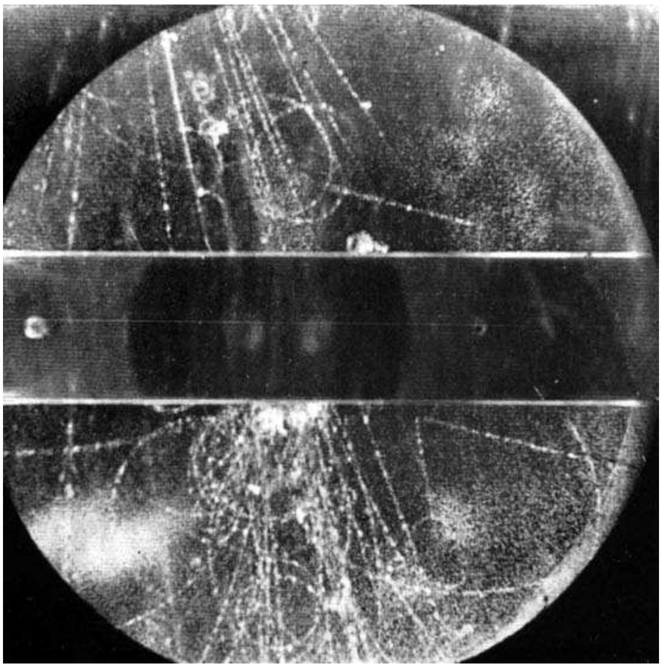


图 1.19: 1947 年 Rochester 和 Butler 发现第一个奇异粒子 $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$ 的云室照片。

这一新的发现引起物理学家们的广泛关注。更多的实验结果发现，有些 V 型事例中的中间粒子是带电的，它们可以衰变为一个带电粒子和一些中性粒子，也可以衰变为三个带电粒子。前者称为 θ^+，后者称为 τ^+：

$$\theta^+ \to \begin{cases} \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^+ + \pi^0 \end{cases}$$

$$\tau^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$$

实验测得 θ^+ 和 τ^+ 的质量和寿命在误差范围内相同，似乎是同一种粒子。但是从 θ^+ 和 τ^+ 的衰变方式根据宇称守恒进行分析，发现它们分别具有奇宇称和偶宇称，表明是两种不同的粒子。这是当时很令人困惑的 $\theta-\tau$ 困惑 (参阅第 节)。一直到 1956 年，李政道 (T.D. Lee) 和杨振宁 (C.N. Yang) 发现弱相互作用下宇称不守恒，才确定 θ^+ 和 τ^+ 是同一个粒子，现在称之为 K^+ 介子。而 θ^0 则是该粒子的中性对应物，现在称为 K^0 介子。K^+ 和 K^0 统称 K **介子 (kaon)**，它们的反粒子是 K^- 和 $\overline{K}^0$。

1950 年 Anderson 发现另一类中性 V 型事例，它们的云室照片与 Rochester 的 V 型事例类似，但是衰变产物为 p 和 π^-，称为 Λ：

$$\Lambda \to p + \pi^- \tag{1.3.1}$$

Λ 粒子的衰变过程的简图如图 1.20 所示。Λ 比质子还重，属于**超子 (hyperon)**。

K^0、K^+、Λ 等新粒子的发现不仅完全出乎人们的意料，而且它们的行为很奇怪：它们的产生很快 ($\sim 10^{-23}$ s)，但是衰变则很慢 ($\sim 10^{-10}$ s)。人们把它们称为**奇异 (strange) 粒子**。奇异粒子的发现引起了物理学家研究宇宙线的新的兴趣，人们开始大量地探测这些天外来客，并在衰变事例中观测到 Σ^-、Σ^+、K^- 等粒子：

$$\Sigma^- \to n + \pi^- \tag{1.3.2}$$

$$\Sigma^+ \to n + \pi^+ \tag{1.3.3}$$

$$\Sigma^+ \to p + \pi^0 \tag{1.3.4}$$

$$K^- \to \pi^- + \pi^0 \tag{1.3.5}$$

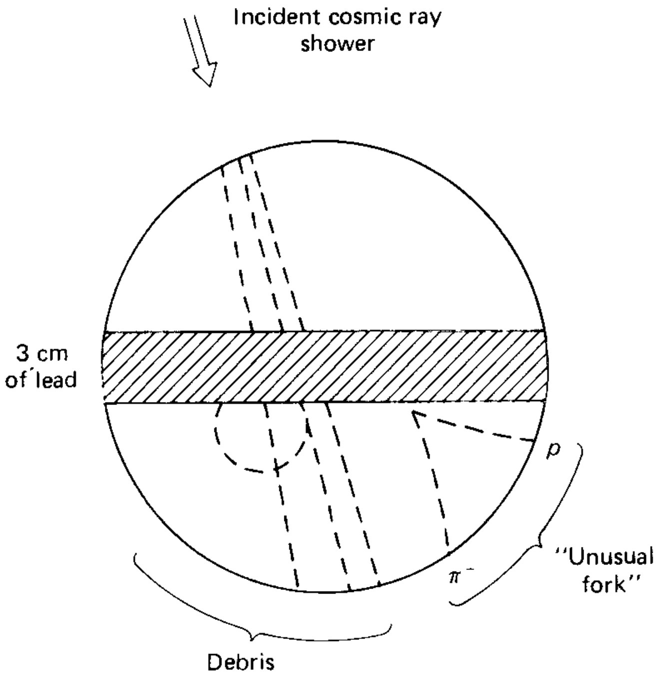


图 1.20: 奇异粒子 $\Lambda \to p + \pi^-$ 衰变过程简图。

针对奇异粒子的这些奇怪特点，1952 年 A. Pais 认为它们通过强作用过程产生，通过弱作用过程衰变，并预言奇异粒子产生时应该成对出现 (协同产生)。Pais 的预言不久被加速器实验证实。

虽然宇宙射线给我们提供了大量信息，人们也在宇宙射线中发现了 e^+、μ、π 以及大部分奇异粒子。但是宇宙射线的流强很弱，而且宇宙射线中粒子的种类、数量和能量无法控制，人们只能被动地记录所发生的事例。于是人们设法在实验室中人工产生高能量的粒子束，这极大地促进了粒子加速器的发展[18]，也促进了许多新的强有力的探测手段如大型气泡室、火花室、多丝正比室、漂移室、量能器、通用磁谱仪等的迅猛发展。1953 年美国布鲁海文国家实验室 (Brookhaven National Laboratory, BNL) 的同步质子加速器 Cosmotron 正式运行，利用该加速器的 1.5 GeV 的 π^- 次级介子轰击质子靶，人们开始用人工方法大量产生各种奇异粒子。实验发现 Λ 和 K^0 确实是协同产生的：

$$\begin{array}{l} \pi^- + p \to \Lambda + K^0 \\ \quad\quad\quad\quad K^0 \hookrightarrow \pi^+ + \pi^- \\ \quad\quad\quad\quad \Lambda \hookrightarrow p + \pi^- \end{array} \tag{1.3.6}$$

人们还观测到 Σ^- 和 K^+ 也是协同产生的：

$$\begin{array}{l} \pi^- + p \to \Sigma^- + K^+ \\ \quad\quad\quad\quad K^+ \hookrightarrow \pi^+ + \pi^0 \\ \quad\quad\quad\quad \Sigma^- \hookrightarrow n + \pi^- \end{array} \tag{1.3.7}$$

[18]1937 年 E.O. Lawrence 设计建成了人类历史上第一台回旋加速器 (cyclotron)。后来人们又设计建造了同步回旋加速器 (synchrocyclotron)。1955 年美国 Berkeley 实验室的质子同步加速器 Bevatron 正式运行。就在 Bevatron 运行当年，O. Chamberlain 发现了早已预言的**反质子** ($\overline{p}$)，次年又发现了**反中子** ($\overline{n}$)。二十世纪六十年代以后，人们开始建造**对撞机 (collider)**。有的用正负电子对撞，有的用质子和质子或反质子对撞，能量从几十 GeV 到几千 GeV。它们的运行对粒子物理的研究起了至关重要的作用。目前粒子加速器已成为粒子物理研究必不可少的实验手段。随着人类对微观物质结构层次的不断深入，要求粒子加速器提供的高能粒子束的能量也不断提高，粒子物理学的研究正日益向高能领域发展，因此人们也称粒子物理学为**高能物理学 (high energy physics)**。

不过 1954 年人们发现双 V 事例，它由 Ξ^- 的级联衰变产生，该过程中有三个奇异粒子出现：

$$\begin{array}{l} \pi^- + p \to \Xi^- + K^+ + K^0 \\ \qquad\qquad\ \ \hookrightarrow \Lambda + \pi^- \\ \qquad\qquad\qquad \hookrightarrow p + \pi^- \end{array} \tag{1.3.8}$$

1952 年 Gell-Mann，以及 1953 年西岛和彦 (Kazuhiko Nishijima) 各自独立地提出了**奇异数 (strangeness)** 的概念。他们指出每种粒子都有称为奇异数 S 的量子数，普通粒子的奇异数为零，奇异粒子的奇异数为整数，强相互作用中奇异数守恒。如同电荷的规定，奇异数的规定也是相对的，最初人们根据反应

$$\pi^0 + p \to \Lambda + K^0$$

规定 K^0 的奇异数为 $S=1$，由强作用中奇异数守恒，得到 Λ 的奇异数为 $S=-1$。其他粒子的奇异数利用各种强相互作用过程确定。例如由反应

$$\pi^+ + n \to \Lambda + K^+$$

可知 K^+ 的奇异数为 $S=1$，于是它的反粒子 K^- 的奇异数为 $S=-1$。根据反应

$$\begin{aligned} \pi^\pm + p &\to \Sigma^\pm + K^+ \\ \pi^- + p &\to \Sigma^0 + K^0 \end{aligned}$$

可以确定 Σ^+、Σ^0、Σ^- 的奇异数均为 $S=-1$。由双 V 型事例 (1.3.8) 可以确定 Ξ^- 的奇异量子数为 $S=-2$。而由反应

$$K^- + p \to \Xi^0 + K^0$$

可知 Ξ^0 的奇异量子数也是 $S=-2$。

后来人们发现奇异数在电磁作用过程中也守恒，但是在弱作用过程中不守恒，不过有一定的选择定则。一般的奇异粒子衰变中，奇异数变化为 $\Delta S=-1$，例如反应 (1.3.8) 中的 Ξ^- 和 Λ 的衰变：

$$\begin{aligned} \Xi^- &\to \Lambda + \pi^- \\ \Lambda &\to p + \pi^- \end{aligned}$$

弱作用中也有 $\Delta S=-2$ 的情况出现，例如：

$$\begin{aligned} \Xi^0 &\to p + \pi^- \\ \Xi^- &\to n + \pi^- \end{aligned}$$

但是这种情况出现的概率很小。

表 1.1 列出了几种奇异粒子和相应的性质。Σ^+ 和 Σ^- 的奇异数均为 -1，说明两者不是互为反粒子，它们的反粒子分别是 $\overline{\Sigma}^+$ 和 $\overline{\Sigma}^0$。注意 K 粒子之间、Σ 粒子之间、Ξ 粒子之间的质量都很接近，且它们的 S 分别为 1、-1、-2，暗示着这些粒子组成多重态。1962 年 Gell-Mann 理论预言 Ω^- 粒子存在，该粒子在 1964 年被实验发现。

表 1.1: 奇异粒子的奇异数 S、质量 m、$c\tau$ 及其反粒子。

奇异粒子	S	m (MeV)	$c\tau$	反粒子
K^+	+1	493.677 (16)	3.712 m	K^-
K^0	+1	497.614 (24)	$\begin{cases} K_S^0: & 2.6842\ \text{cm} \\ K_L^0: & 15.34\ \text{cm} \end{cases}$	$\overline{K}^0$
Λ	−1	1115.683 (6)	7.89 cm	$\overline{\Lambda}$
Σ^+	−1	1189.37 (7)	2.404 cm	$\overline{\Sigma}^+$
Σ^0	−1	1192.642 (24)	2.22×10^{-11} m	$\overline{\Sigma}^0$
Σ^-	−1	1197.449 (30)	4.434 cm	$\overline{\Sigma}^-$
Ξ^-	−2	1321.71 (7)	4.91 cm	$\overline{\Xi}^-$
Ξ^0	−2	1314.86 (20)	8.71 cm	$\overline{\Xi}^0$
Ω^-	−3	1672.45 (29)	2.461 cm	$\overline{\Omega}^-$

1.3.2 共振态

二十世纪五、六十年代起，美国和欧洲相继投入运行了几台大型粒子加速器，利用这些人工产生的极高流强的高能带电粒子，人们深入研究粒子的产生、衰变、湮灭等转化现象，从中发现了一大批短寿命的粒子，使“基本”粒子的数目急剧增加。

1952 年 Fermi 和他的同事们研究了 π^+ 介子与质子的散射过程。在描绘散射总截面随质心系能量的变化关系曲线时，他们发现在质心系能量为 1230 MeV 附近，散射异常强烈。类比波动过程中的共振现象，称这时质子与 π^+ 介子发生了共振，它们束缚在一起，形成了带两个单位正电荷的**共振态 (resonance)**，命名为 Δ^{++}：

$$\pi^+ \ + \ p \ \to \ \Delta^{++} \ \to \ \pi^+ \ + \ p \tag{1.3.9}$$

根据峰的宽度可以推知 Δ^{++} 的寿命为 5.7×10^{-24} s。人们花了一段时间认识到共振态仍然应该认为是粒子，只不过其寿命极短。此后，人们用类似的方法又发现了 Δ^+、Δ^0 和 Δ^- 粒子，它们与 Δ^{++} 的质量差不多，自旋都是 $\frac{3}{2}\hbar$，因而通称为 Δ 粒子。图 1.21 中实线是根据 G. Flaminio 等的实验数据 [19] 绘制而成的 π^+ 与 p 散射的总截面随质心系能量 (即质量) 的变化关系。

Δ 粒子的发现引起了人们用加速器寻找共振态的强烈兴趣。人们发展了一些分析方法，从复杂的多粒子末态中挑出 N 个特定的粒子，测出它们的能量 E_j 和动量 $\mathbf{p}_j$，然后用质壳关系计算出它们的总质量 M：

$$\boxed{M^2c^4 \equiv \Big(\sum_{j=1}^{N} E_j\Big)^2 - \Big(\sum_{j=1}^{N} \mathbf{p}_j\Big)^2 c^2} \tag{1.3.10}$$

称为这 N 个粒子组成的子系统的**不变质量 (invariant mass)**。不同事例的能量、动量不一样，子系统的不变质量也不同。以不变质量为横坐标，每个不变质量对应的事例数为纵坐标，画出一条曲线。如果所挑选的子系统有共振态存在，在这条曲线上就会出现一个共振峰。由共振峰可以估算出共振态的质量和寿命。正是利用这样的分析方法，五十年代末和六十年代初相继发现了 η，ρ，ω，K^* 和 ϕ 等几十个短寿命的粒子。图 1.22 所示是 CERN 固定靶实验中观测到的一些共振态的不变质量谱。

[19] 参阅文献：Flaminio, G. *et al.* (1979), *CERN High Energy Reactions Analysis Group, Report HERA 79-01.*

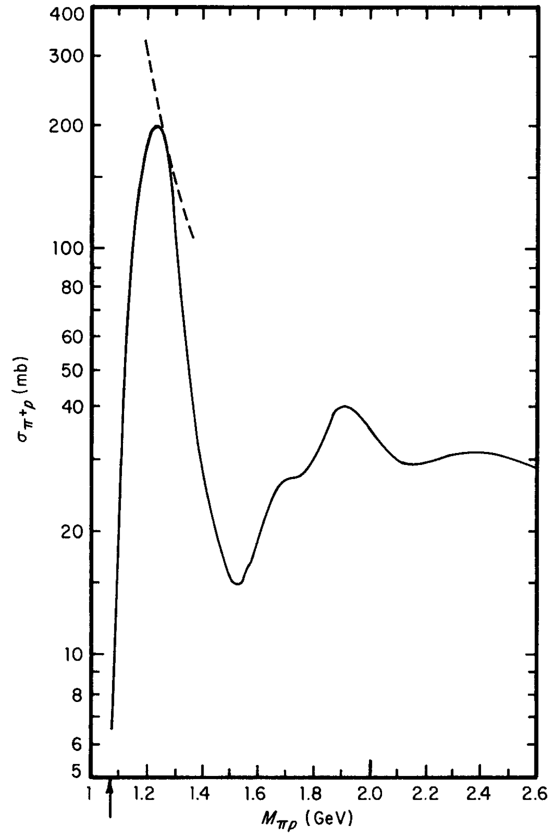


图 1.21: π^+ 介子与质子的散射过程中总截面随质心系能量的变化关系，根据 G. Flaminio 等的实验数据绘制而成。$M_{\pi p}$ = 1.08 GeV 处的箭头表示 $m_\pi + m_p$ 的阈值。最左边的峰对应 $\Delta^{++}(1232)$ 共振态。虚线是散射过程中概率守恒给出的约束。

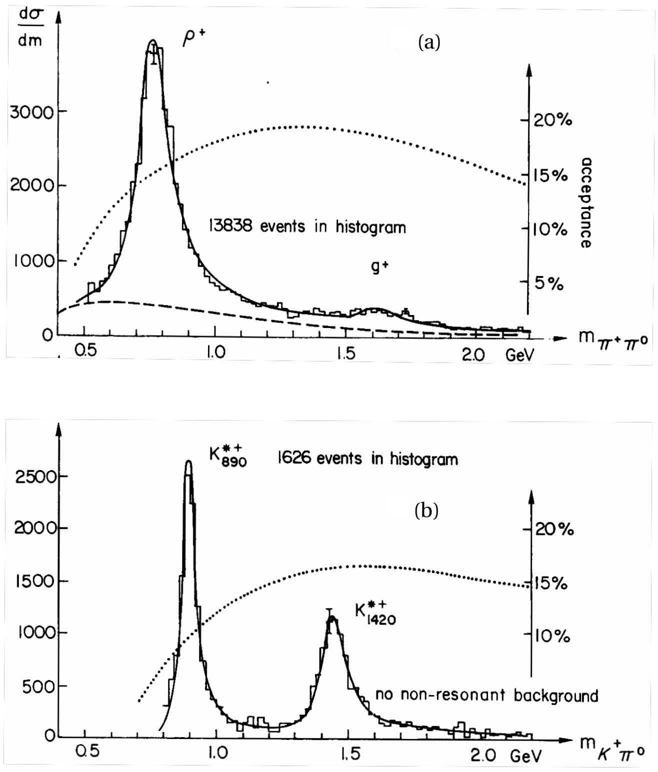


图 1.22: (a) CERN 50 GeV 质子轰击氢靶实验中观测到的 $M_{\pi^+\pi^0}$ 质量谱，左边共振态为 $\rho^+(770)$；(b) CERN 50 GeV K 介子轰击质子实验中观测到的 $M_{K^+\pi^0}$ 质量谱，左边共振态为 $K^{*+}(892)$，右边共振态为 $K_2^{*+}(1430)$。直方图为实验数据，实线为 Breit-Wigner 函数拟合结果，虚线是探测器效率修正。

到六十年代头几年，实验上观察到的“基本”粒子的数目已经增加到比当年元素周期表出现时发现的化学元素的数目还要多，而且发现的势头还有增无已。这些粒子都是基本的吗？它们是否有内部结构？为此，人们用加速器产生的高能粒子 (通常是电子或质子) 作为炮弹轰击中子或质子，试图了解核子的内部结构，以确认它们是否是“真正的基本粒子”。但是，令人惊奇的是在高能粒子轰击下，中子或质子不是破碎成更小的碎片，而是在剧烈的碰撞过程中产生许多新的粒子，有些粒子的质量比质子的质量还要大，因而情况显得更为复杂。

1.3.3 粒子分类和八重法

为了研究这些粒子的性质，首先需要对它们进行分类。最早的尝试是按质量分类，质子、中子以及比它们还重的超子和一些共振态，统称为重子。电子、μ 子以及中微子归类为轻子。质量介于两者之间的如 π、K 以及 η、ρ 等共振态称为介子。光子自成一类。后来实验上又发现了许多质量大于质子质量的介子，例如前面提到的 $K_2^{*+}(1430)$ 介子的质量就比质子质量大很多 (后来发现轻子的情况也类似)。这样，早年提出的“介子”、“轻子”等词已经不合适。但由于习惯，这些名称一直沿用至今。

后来人们按照粒子的相互作用性质把它们分为三大类：

- 不参与强相互作用的一些粒子称为**轻子 (lepton)**。轻子自旋为 $\frac{\hbar}{2}$，是费米子。六十年代初实验观测到的轻子有 e、μ 和 $\overline{\nu}_e$。最早发现的轻子是电子。
- 参与强相互作用的粒子称为**强子 (hadron)**。强子又可以按其自旋分为两类：一类是自旋为 $\frac{\hbar}{2}$ 奇数倍的费米子，称为**重子 (baryon)**，当时实验发现的重子有 p、n、Λ、Σ、Ξ、Δ、以及很多激发态重子。另一类是自旋为零和 $\frac{\hbar}{2}$ 偶数倍的玻色子，称为**介子 (meson)**，当时发现的介子有 π、K、K^*、η、η'、ρ、ω、ϕ 以及很多激发态介子。最早发现的重子是质子，最早发现的介子是 π 介子。
- 光子 γ 只参与电磁相互作用，是电磁场的量子，它仍然自成一类。光子自旋为 1，是玻色子。

在对强子进行分类和结构性质分析的过程中，强子能谱 (典型能量为 GeV) 的研究发挥了重要作用，正如原子光谱 (典型能量为 eV) 在分析原子结构、原子核能谱 (典型能量为 MeV) 在分析原子核结构过程中所扮演的角色。

图 1.23 所示是能量为 4.879 GeV 的入射电子被质子散射后在散射角 10° 处的电子能谱。在 4.879 GeV 处有一个显著的弹性散射峰 (由于反弹效应，峰的位置略有移动)，在能量较低处还有一系列复杂的结构对应着一系列的共振态。对它们的详细解释相当复杂，即使是位于 $E' \approx 4.2$ GeV 附近的峰也需要一番“破译”工作，事实上该峰所对应的就是 Fermi 等发现的 Δ 共振态。

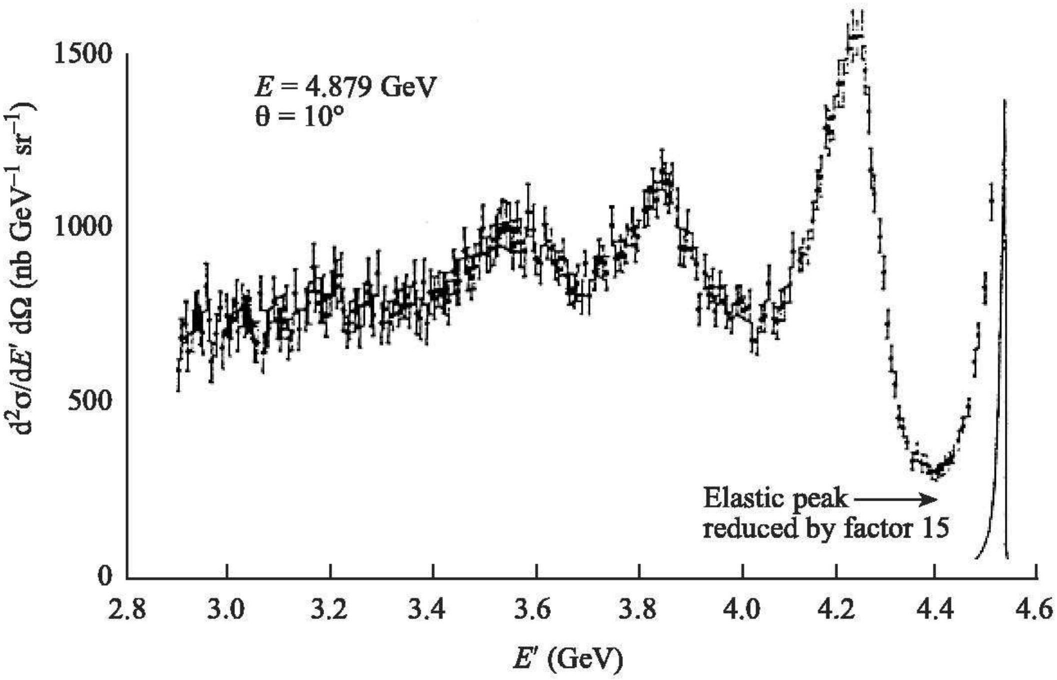


图 1.23: 电子和质子的弹性和非弹性散射：散射角为 10° 处的电子能谱。E 和 E' 分别表示入射和散射的电子能量。

对诸如图 1.23 所示的能谱进行“破译”工作，可以得到各种强子能级。例如图 1.24 (a) 是核子同位旋二重态的能级，略高于 1.5 GeV 的两个态对应着图 1.23 中散射电子能量 $E' \approx 3.8$ GeV 处的峰 (不过略高于 1.4 GeV 的那个态在图 1.23 中无任何迹象)。图 1.24 (b) 是 Δ 粒子同位旋四重态的能级。图 1.25 则是 π 介子同位旋三重态的能级。

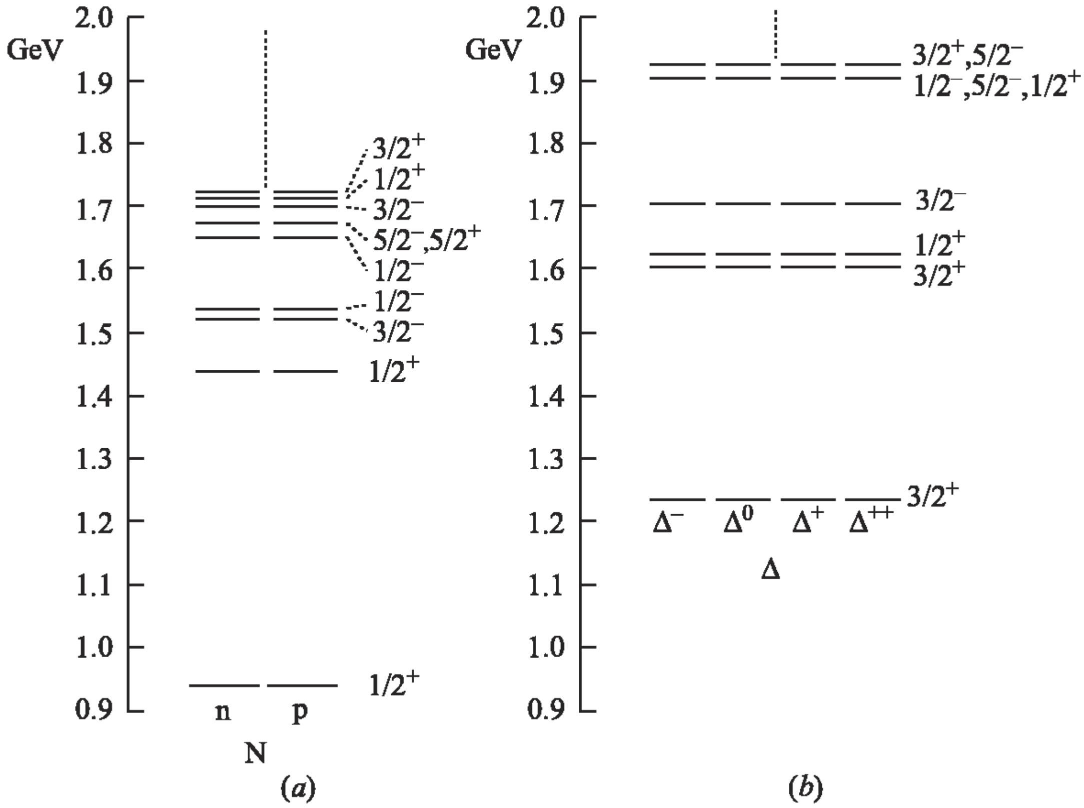


图 1.24: 重子能级：(a) 核子同位旋二重态；(b) Δ 粒子同位旋四重态。

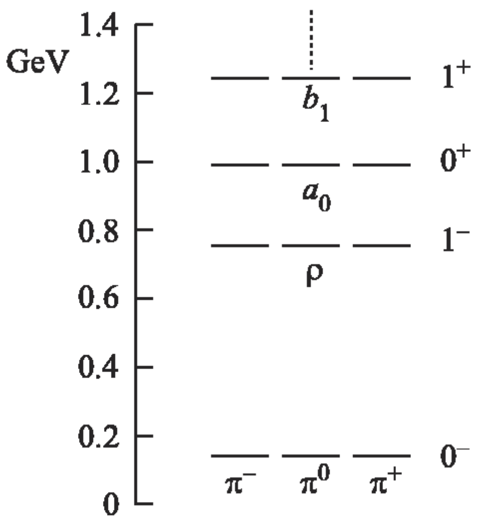


图 1.25: π 介子同位旋三重态的能级。

把所有重子能级谱放在一起，就得到图 1.26 所示的**重子谱 (baryon spectrum)**。类似地可以得到**介子谱 (meson spectrum)**，如图 1.27 所示。对各种强子能谱的“破译”工作形成了二十世纪六十、七十年代**强子谱学 (hadron spectroscopy)** 的研究，是粒子物理学的重要实验基础。

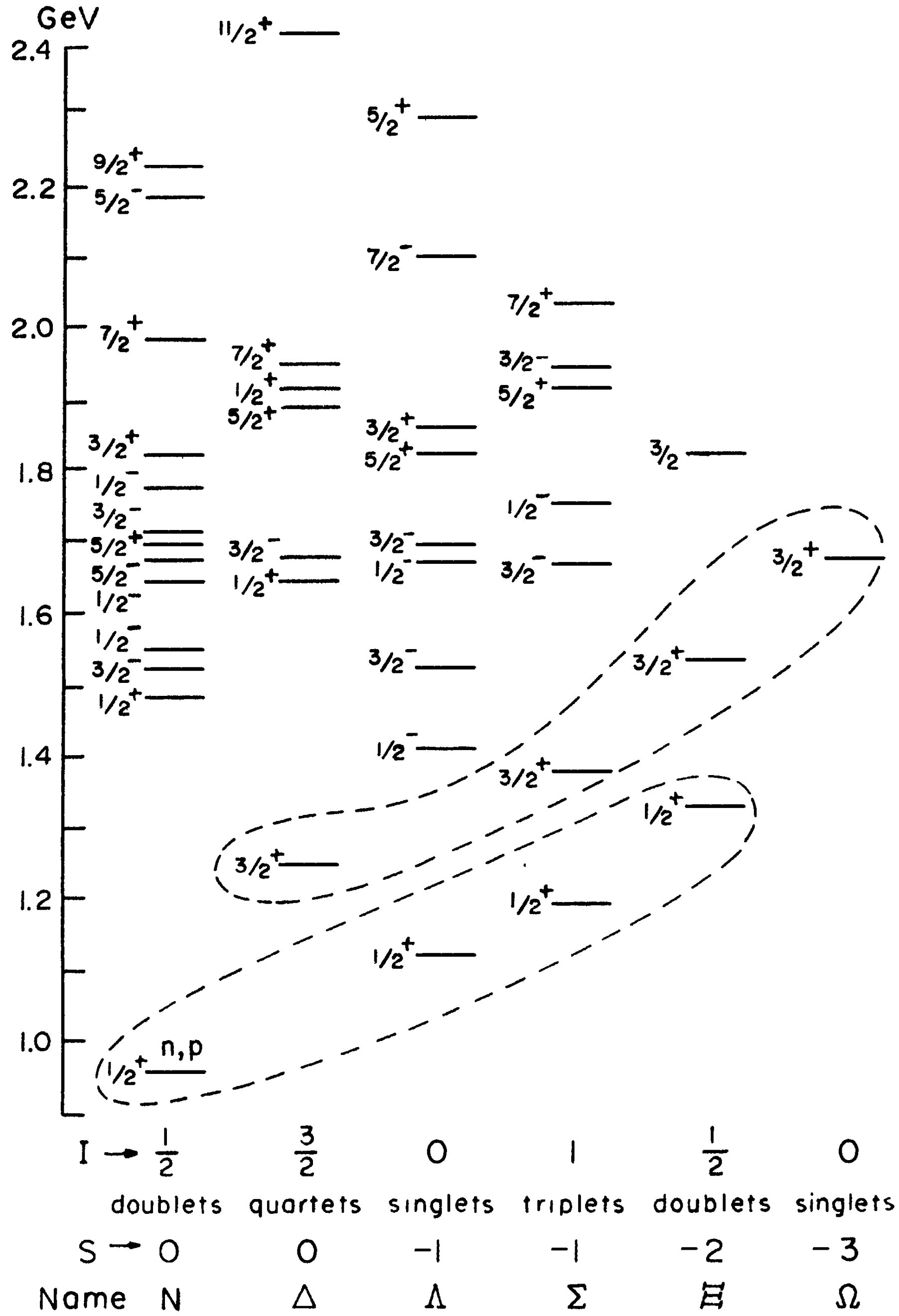


图 1.26: 重子谱。每种重子用短横线表示，左边量子数为 J^P，按量子数 I, S 分成数列。虚线内的是基态重子。

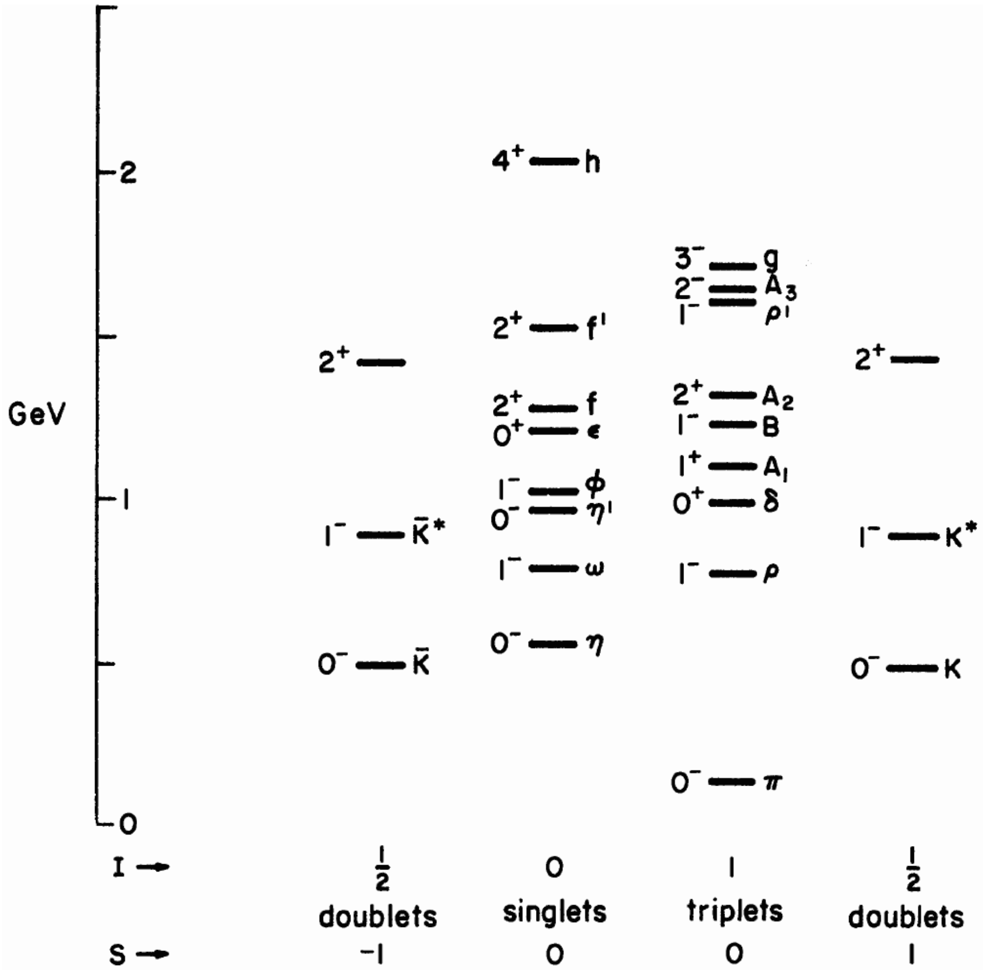


图 1.27: 介子谱。每种介子用短横线表示，左边量子数为 J^P，按量子数 I, S 分成数列。

图 1.26 和 1.27 所示的强子谱中各种强子态用短横线表示，左边的量子数是强子的自旋和宇称 J^P。各种强子按照不同的同位旋 I 和奇异数 S 分成数列，图中还标记了相应强子的名称，以及该强子的同位旋多重态。纵坐标是能量。每一列中强子的同位旋多重态除了轨道角动量为零的基态，还有很多激发态。

以下我们只考虑基态强子 (例如图 1.26 虚线内的重子)。需要指出的是，五十年代中期很多强子态，例如重子谱中的 Σ^0、Ξ^0、Ω^- 粒子等还没有发现。此外，我们引用的图 1.26 和 1.27 比较旧，有些新发现的强子态没有列于图中。

强子构成同位旋多重态。基态重子和介子的同位旋多重态及其相应的量子数和质量如表 1.2 所示。表中 Q 是强子电荷，$\mathcal{B}$ 是**重子数 (baryon number)**。质子是很稳定的粒子，实验测得其寿命大于 10^{31} 年，它不会衰变为 π^+ 介子或者轻子。例如 $p \to e^+ + \gamma$ 这个过程，完全满足电荷守恒和能动量守恒，但是实际上该过程并不存在，这就意味着可能有一种守恒的量子数存在。早在 1939 年 Stückelberg 就提出重子数的概念，规定质子和中子的重子数 $\mathcal{B} = +1$，反质子和反中子的重子数 $\mathcal{B} = -1$，各种相互过程中满足重子数守恒定律，即反应初态的重子数之和，等于反应末态的重子数之和。后来随着奇异重子和共振态重子的发现，上面的规定推广为：所有重子的重子数 $\mathcal{B} = +1$，所有反重子的重子数 $\mathcal{B} = -1$。

表 1.2: 基态强子及其相应的量子数和质量 m

强子	J^P	I	$\mathcal{B}$	S	Q	m (MeV/c^2)
n, p		1/2	1	0	$0, +1$	938,940
$\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+$	$\frac{1}{2}^+$	1	1	-1	$-1, 0, +1$	1197,1193,1189
Ξ^-, Ξ^0		1/2	1	-2	$-1, 0$	1321,1315
Λ		0	1	-1	0	1116
$\Delta^-, \Delta^0, \Delta^+, \Delta^{++}$		3/2	1	0	$-1, 0, +1, +2$	1232,1232,1232,1232
$\Sigma^{*-}, \Sigma^{*0}, \Sigma^{*+}$	$\frac{3}{2}^+$	1	1	-1	$-1, 0, +1$	1387,1384,1383
Ξ^{*-}, Ξ^{*0}		1/2	1	-2	$-1, 0$	1535,1532
Ω		0	1	-3	-1	1672
K^0, K^+		1/2	0	1	$0, +1$	498,494
π^-, π^0, π^+		1	0	0	$-1, 0, +1$	140,135,140
$K^-, \overline{K}^0$	0^-	1/2	0	-1	$-1, 0$	494,498
η		0	0	0	0	549
η'		0	0	0	0	958
K^{*0}, K^{*+}		1/2	0	1	$0, +1$	896,892
ρ^-, ρ^0, ρ^+		1	0	0	$-1, 0, +1$	768,768,768
$K^{*-}, \overline{K}^{*0}$	1^-	1/2	0	-1	$-1, 0$	892,896
ω		0	0	0	0	782
ϕ		0	0	0	0	1019

1953 年西岛，以及 1956 年 Gell-Mann 总结了这些基态强子的量子数，发现属于同一组同位旋多重态的强子，它们的 Q、I_3、$\mathcal{B}$ 和 S 之间存在如下经验关系式：

$$\boxed{Q = I_3 + \frac{\mathcal{B}+S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}} \tag{1.3.11}$$

上式称为 Gell-Mann－西岛公式。式中 Y 称为 **超荷 (hypercharge)** [20]：

$$\boxed{Y \equiv \mathcal{B} + S} \tag{1.3.12}$$

值得指出的是在 Gell-Mann－西岛公式提出之际，Σ^0、Ξ^0 等粒子尚未被发现，这个公式预言了这些粒子，后来陆续为实验所发现。

1961 年 Gell-Mann 把所有已知的基态重子按照不同 J^P 分组，并画于 (Y, I_3) 平面 (群论中称之为权图)，得到 $J^P = \frac{1}{2}^+$ 的基态重子八重态 (octet) 和 $J^P = \frac{3}{2}^+$ 的基态重子十重态 (decuplet)，如图 1.28 所示 (当时 Ω^- 粒子尚未发现)。对基态介子做同样处理，得到 $J^P = 0^-$ 和 $J^P = 1^-$ 的基态介子九重态 (nonet) 各一个，如图 1.29 所示。这些具有相同 J^P 且落在同一个 (Y, I_3) 平面内的粒子称为**超多重态 (supermultiplets)**。人们发现所有强子都可以放在相应的超多重态中，图 1.30 给出了一些介子的超多重态。

上面这种对强子分类的方法就是 Gell-Mann 提出的**八重法 (eightfold way)** [21]。由于强子分类中出现八重态，故而得名。事实上 Y. Ne′eman 在半年前也独立地提出了这种方法。

[20] 后来的粒子物理学发展表明，奇异数是个更好的量子数，现在超荷名称还在，但是已另有所指。

[21] 该名字的出处是佛教的八正道 (eightfold path)。八正道是佛教徒修行达到最高理想境地涅槃的八种方法和途径，包括：正见、正思惟、正语、正业、正命、正精进、正念、正定。八重法的命名反映了 Gell-Mann 本人的某些兴趣。

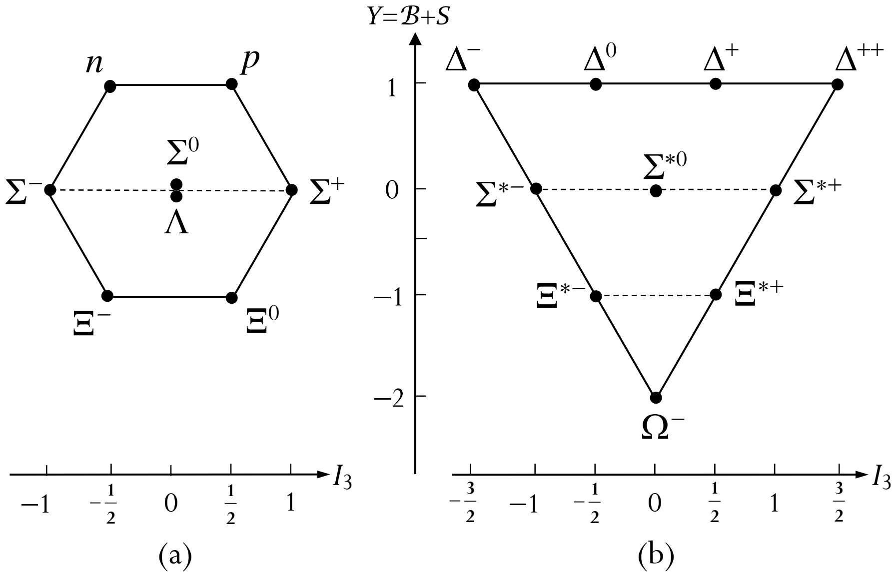


图 1.28: (a) $J^P=\frac{1}{2}^+$ 的基态重子八重态，(b) $J^P=\frac{3}{2}^+$ 的基态重子十重态。

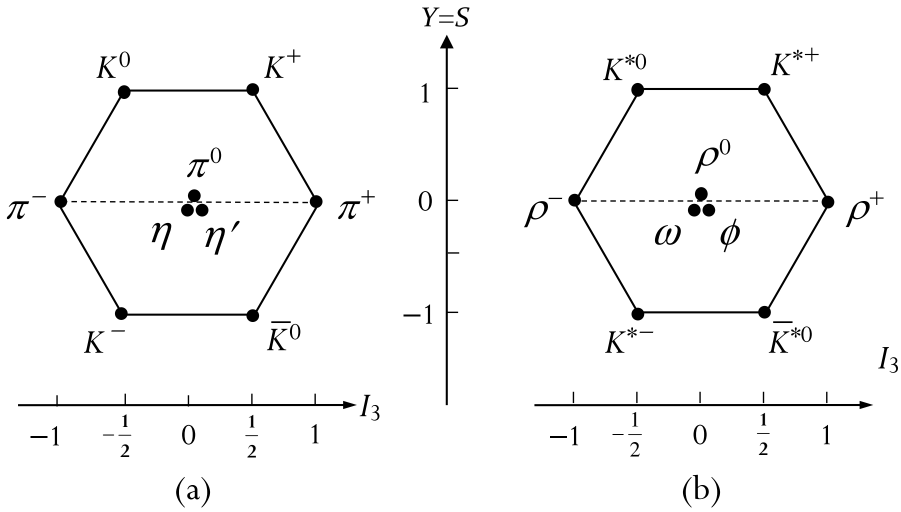


图 1.29: (a) $J^P=0^-$ 的基态介子九重态，(b) $J^P=1^-$ 的基态介子九重态。

八重法分类不但给出了当时已经发现的强子在其中的位置，还准确地预言了一些新的粒子。特别是 1961 年提出八重法方法时，Ω^- 粒子尚未发现。八重法预言应存在 Ω^- 粒子，其量子数为 $J^P=\frac{3}{2}^+$、$I=0$、$Y=-2$、$S=-3$，而且根据重子十重态中前三组同位旋多重态的质量分布是等间距的，间距约为 $146\,\mathrm{MeV}/c^2$ 的规律：

$$\begin{aligned} m_\Omega - m_{\Xi^*} &\approx m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} \\ &\approx m_{\Sigma^*} - m_{\Delta^*} \\ &\approx 146\,\mathrm{MeV}/c^2 \end{aligned}$$

可以估计出 Ω^- 粒子质量为：

$$m_\Omega \approx 1676\,\mathrm{MeV}/c^2$$

1964 年 V.E. Barnes 在 BNL 用气泡室发现了 Ω^- 粒子 [22]。这是八重法的重大胜利。

[22]参阅文献：Barnes, V.E. *et al.* (1964), *Phys. Rev. Lett* **12** (8) 204

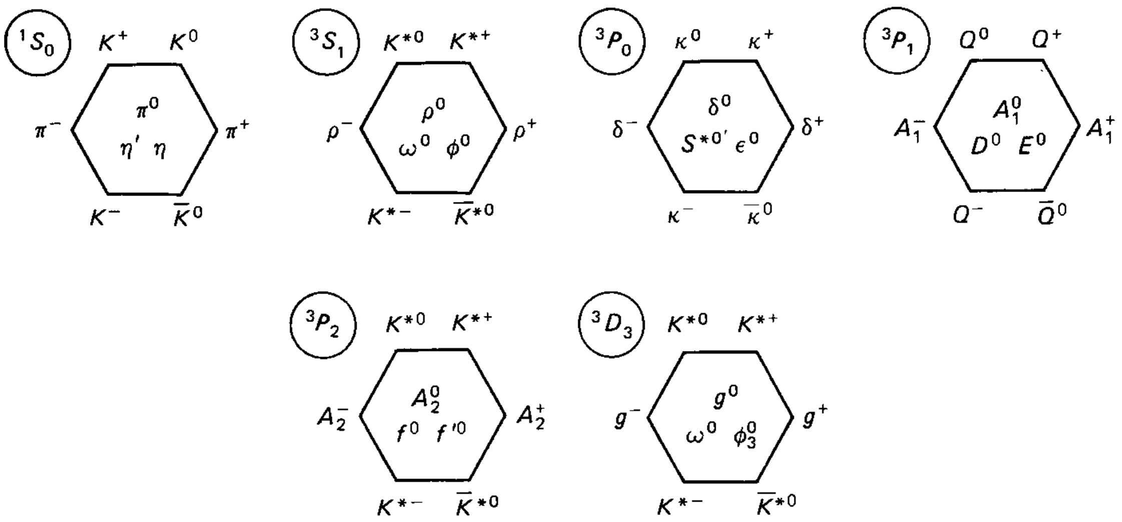


图 1.30: 介子的一些超多重态。圆圈内是超多重态的名称 $^{2S+1}L_J$，其中 $L = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 是轨道量子数，强子谱学中相应地用 $S, P, D, F, \cdots$ 表示，S 是自旋量子数，J 是角动量量子数 $J = L + S$。显然粒子名称很快用完，现在人们习惯用同样的名字附加不同质量或自旋来标记粒子，例如 $K^*(892)$、$K_2^*(1430)$、$K^*(1680)$ 等。注意有些超多重态只是部分填满，还有些粒子可能放在错误的超多重态内。

1.3.4 夸克模型

实验上已发现的几百种粒子绝大部分是强子。这么多强子被发现，很难想象它们都是基本的，大多数物理学家认为强子有结构，由少数几种更基本的成分组成。回顾历史，人们经过几十年的努力才弄清元素的周期性是原子的壳层结构的反映，一百多种元素的真正基本组份只有质子、中子和电子三种。八重法在强子分类方面取得巨大成功，预示着强子有更深层次的结构。不过对强子的分类只是强子结构研究的第一步。我们的目的是找出多种强子的内在联系，找出哪些是更基本的粒子。

我们知道质子很稳定，虽然自由中子不是稳定粒子，但是束缚在原子核中的中子也是稳定的。那么是否可以认为质子和中子是基本粒子，其他强子由它们构成呢？1949 年 Fermi 和杨振宁提出：核子是基本粒子，π 介子是由核子和反核子构成的结合态。这一假设在解释 π 介子的自旋、宇称、电荷、同位旋等量子数上是成功的，但是不能解释奇异粒子的构成。

1955 年坂田昌一 (Sakata Shyoichi) 提出强子是由 p、n、Λ 这三种基础粒子和它们的反粒子构成的 SU(3) 模型，坂田认为介子由一个基础粒子和一个反粒子构成，重子由两个基础粒子和一个反粒子构成。所谓构成一个粒子指的是构成表征这个粒子的全部量子数，同位旋和奇异数分别由核子和 Λ 粒子体现。坂田模型能把当时所知道的强子都由 p、n、Λ 这三个基础粒子和它们的反粒子复合出来。不过坂田模型毕竟是比较粗糙的模型，特别是在解释重子时出现了困难。例如在坂田模型中，$p\overline{n}\Lambda$、$\overline{p}n\Lambda$、$pn\overline{\Lambda}$ 都满足 $\mathcal{B} = 1$，$S = -1$，前面两者可解释为 Σ^+ 和 Σ^- 粒子，但是自然界并不存在 $pn\overline{\Lambda}$ 粒子。

问题是把质子、中子等当作基本粒子并不合适。质子和中子是有内部结构的，这从核子具有反常自旋磁距可以看出来。根据 Dirac 方程，质量为 m、电荷为 Q、自旋为 $\frac{1}{2}$ 的点状带电粒子具有**自旋磁距 (spin magnetic moment)**：

$$\mu = \frac{Q\hbar}{2mc} \tag{1.3.13}$$

点状中性粒子无自旋磁距。如果电子、质子和中子没有内部结构，则它们的自旋磁距应该是：

$$\mu_e = -\frac{e\hbar}{2m_e c}, \qquad \mu_p = +\frac{e\hbar}{2m_p c}, \qquad \mu_n = 0$$

实验非常精确地测定了它们的自旋磁距值：

$$\mu_e = -1.001\,159\,652\,209(31)\frac{e\hbar}{2m_e c}$$
$$\mu_p = +2.792\,8456(11)\frac{e\hbar}{2m_p c}$$
$$\mu_n = -1.913\,041\,84(88)\frac{e\hbar}{2m_n c}$$

这个事实表明，电子确实是无内部结构的点状粒子，质子和中子则有内部电磁结构。

Fermi－杨振宁模型和坂田模型都以费米子为基础。坂田模型的困难在于组成重子时，为了保持重子数守恒出现了与实验不符的 $pn\overline{\Lambda}$ 粒子。如果组成重子的基础粒子不是 p、n、Λ，而是另外三个重子数为 $\frac{1}{3}$ 的费米子，其中两个属于同位旋二重态，代替坂田模型中的 p、n，另一个属于同位旋单态，携带奇异数，代替坂田模型中的 Λ，那么就可以克服坂田模型的困难，很好地解释介子和重子的结构。

1964 年 Gell-Mann 和 G. Zweig 独立提出关于强子结构的**夸克模型 (quark model)**。认为强子由三种基本构造单元组成，Gell-Mann 将它们命名为**夸克 (quark)**，Zweig 称之为 ace。这三种不同类型或者称为**味 (flavor)** 的夸克是 **up**、**down** 和 **strange**，用符号 u、d、s 表示。如果 Gell-Mann－西岛公式仍然成立，则 u、d、s 夸克必须带有分数电荷，它们的电荷分别是基本电荷的 $\frac{2}{3}$、$-\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$。表 1.3 列出了这三种夸克和相应的量子数。

表 1.3: 三种夸克和它们的量子数

夸克	名称	J^P	I	$\mathcal{B}$	S	Q
u	up	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}e$
d	down	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}e$
s	strange	$\frac{1}{2}^+$	0	$\frac{1}{3}$	−1	$-\frac{1}{3}e$

u、d、s 三种夸克构成了 SU(3) 群的三重态。在夸克模型中，这三种不同味的夸克以及对应的反夸克，代替坂田模型中的基础粒子。所有的强子均可以由这三种夸克组合而成。根据简单的夸克模型，只有三种夸克束缚态是允许的：

- 重子：由三个夸克组成 (qqq)，自旋为半整数，因而是费米子。
- 反重子：由三个反夸克组成 $\overline{qqq}$，也是自旋为半整数的费米子。
- 介子：由正反夸克束缚而成 $(q\overline{q})$，自旋为整数，是玻色子。

表 1.4 列出了基态重子和介子的夸克组份和相应的量子数。大多数情况下，重子和介子的夸克组份是很明确的。但是对于 $Y=0, I_3=0$ 的中性介子 η, η' 和 ω, ϕ 的夸克组份，涉及两个 SU(3) 群直和的八重态和单态之间的混合，这个问题留待第 章再详细讨论。

表 1.4: 基态强子的夸克组份和相应的量子数

强子	夸克组份	J^P	I_3	$\mathcal{B}$	S	Q
n, p	udd, uud		$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	1	0	$0, +1$
$\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+$	$dds, \frac{s(du+ud)}{\sqrt{2}}, uus$	$\frac{1}{2}^+$	$-1, 0, +1$	1	-1	$-1, 0, +1$
Ξ^-, Ξ^0	dss, uss		$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	1	-2	$-1, 0$
Λ	$\frac{s(du-ud)}{\sqrt{2}}$		0	1	-1	0
$\Delta^-, \Delta^0, \Delta^+, \Delta^{++}$	ddd, udd, uud, uuu		$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}$	1	0	$-1, 0, +1, +2$
$\Sigma^{*-}, \Sigma^{*0}, \Sigma^{*+}$	dds, uds, uus	$\frac{3}{2}^+$	$-1, 0, +1$	1	-1	$-1, 0, +1$
Ξ^{*-}, Ξ^{*0}	dss, uss		$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	1	-2	$-1, 0$
Ω	sss		0	1	-3	-1
K^0, K^+	$d\bar{s}, u\bar{s}$		$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	0	1	$0, +1$
π^-, π^0, π^+	$d\bar{u}, \frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}, u\bar{d}$		$-1, 0, +1$	0	0	$-1, 0, +1$
$K^-, \bar{K}^0$	$s\bar{u}, d\bar{s}$	0^-	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	0	-1	$-1, 0$
η	参阅第 ??? 节		0	0	0	0
η'			0	0	0	0
K^{*0}, K^{*+}	$d\bar{s}, u\bar{s}$		$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	0	1	$0, +1$
ρ^-, ρ^0, ρ^+	$d\bar{u}, \frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}, u\bar{d}$		$-1, 0, +1$	0	0	$-1, 0, +1$
$K^{*-}, \bar{K}^{*0}$	$s\bar{u}, d\bar{s}$	1^-	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	0	-1	$-1, 0$
ω	参阅第 ??? 节		0	0	0	0
ϕ			0	0	0	0

在相互作用中强子的生成、湮灭可以归结为夸克的转化和重新组合。夸克模型指出了某些不允许出现的组合，这些被禁止的组合果然没有在实验中发现。夸克模型出现后，很快吸引了物理学家的注意，被认为是统一基本粒子的一个卓有成效的方向。

夸克模型建立不久人们发现它违背 Pauli 不相容原理。例如 Ω^- 粒子由三个 s 夸克组成，按照夸克模型，这三个夸克同处于轨道运动的基态，实验测得 Ω^- 总自旋角动量为 $\frac{3}{2}\hbar$，这就要求每个夸克的自旋都是 $\frac{\hbar}{2}$。于是这三个夸克处在完全相同的状态，显然破坏了 Pauli 不相容原理。1965 年南部阳一郎 (Yoichiro Nambu) 研究了这个问题，认为 Pauli 原理仍然成立，但是夸克还有一种未知的量子数，它可以把 Ω^- 的三个夸克区分开来，使得它们处在不同状态而不违反泡利原理。他称这种新量子数为**色 (color)**。这里的“色”是一种借喻，并非它真有什么我们人类能看得见的颜色。

任何一种夸克都有三种色量子数，分别称为红 (r)、绿 (g) 和蓝 (b)，它们也构成一个 SU(3) 群的三重态[23]。正像电子拥有“电荷”而出现了量子电动力学一样，关于夸克的“色荷”出现了**量子色动力学 (quantum chromodynamics, QCD)**。

1.3.5 对称性

二十世纪四、五十年代，由于量子场论遇到困难，这段时间的理论物理学家分成了两个派别，以原子波函数为比拟分别被称为径向物理学家 (radial physicists) 和角向物理学家 (azimuthal physicists)。

[23]夸克的三种色构成色 SU(3) 群，三种夸克味构成味 SU(3) 群。它们不是同一个 SU(3) 群。

径向物理学家们关心的是动力学，尤其是强相互作用的动力学。他们提出了很多试图描述强相互作用的理论，例如色散关系理论、雷其极点理论等。这些理论虽然也曾得到一些好的结果，但是因为它们只包含对散射振幅的普遍要求，缺乏强相互作用独有的特殊性的东西，所以不可能是强作用的基本理论，而只能是一种唯象分析手段。角向物理学家的工作原则是不必试图去理解强相互作用的动力学，他们研究的是一类无需这种理解便可作出预言的东西 — 对称性原理。

所有的对称性原理，均基于下述假设：某些基本量是不可能观察到的。不可观测意味着对称性，即系统在某种对称变换下保持不变。如果系统具有对称性，则必定对应着一种守恒量，反之就有对称性的破坏，不可观测量变成可观测量。粒子物理学中主要的对称性，或破缺的对称性有四组：

- 全同粒子交换对称性。微观粒子或者满足 Bose-Einstein 统计，或者满足 Fermi-Dirac 统计，分别称为玻色子和费米子。这组对称性是严格成立的。

- 连续时空变换对称性。例如时间平移、空间平移、空间转动不变性对应的守恒量分别是能量、动量和角动量。这组对称性也是严格成立的。

- 离散变换。例如宇称变换 P、正反粒子变换 (或电荷共轭变换) C、时间反演变换 T 等。

  在五十年代初期，普遍认为在各种相互作用中，都有着 P、C 和 T 的不变性，与此相对应，这些变换的量子数 P 宇称 (一般称为宇称) 和 C 宇称应该是守恒的。不过，这种观点，除了 1955 年由 Pauli 在很一般的前提下, 从理论上证明了 CPT 联合变换下量子场论的不变性以外，其它都没有被实验或理论严格证明过的。

  1955 年，李政道和杨振宁仔细分析了当时实验上的 $\theta-\tau$ 困惑，了解到在弱作用中 P 宇称守恒事实上并没有得到过实验证实。1956 年，他们提出：在弱作用中 P 宇称是不守恒的，也不存在 $\theta-\tau$ 困惑。1957 年，吴健雄小组在极化原子核 ^{60}Co 的 β 衰变的实验中，证实了弱作用中 P 宇称不守恒。随后不久，宇称不守恒在其他弱作用过程实验中也得到了证实。这些实验同时也证实了在弱作用中 C 宇称的不守恒 (参阅第　　节)。

  1964 年 J.W. Cronin 等人在长寿命 K 介子的衰变实验中发现 CP 联合变换的不变性也遭到破坏。这个实验事实上也证实了在弱作用中 T 变换的不变性的破坏。在弱作用中，与 P 宇称不守恒的程度很大相反，CP 不守恒的程度是极为微弱的，其根本原因至今尚没有足够的了解。

- 规范变换。例如 U(1) 对称性、SU(2) 对称性和 SU(3) 对称性等。

  粒子系统的物理状态用一组复数波函数 ψ 表示，其中每个波函数都有大小和相位。规范对称性 (与电相关的) 断言，不同电荷的两个状态之间的相位差不可能观测到，对应这个对称的守恒量就是电荷。这个概念可以应用于其他相位，导致重子数、轻子数的守恒。

  U(1) 对称性是 1×1 的幺正矩阵，推广到 2×2 或 3×3 的幺正矩阵则分别导致 SU(2) 或 SU(3) 对称性。SU(2) 对称性应用于质子和中子，给出同位旋守恒，SU(3) 对称性应用于夸克的味和色，就构成了夸克模型和 QCD 的基础。规范对称性中，只有 U(1) 和色 SU(3) 才被认为是严格的。

1.3.6 三代轻子

与强子数目急剧增加的情况相反，长期以来实验发现的轻子只有电子、μ 子和电子中微子三种。1962 年 L.M. Lederman、M. Schwartz 和 J. Steinberger 等在 BNL 的 AGS 质子加速器上利用火花室发现了 μ 子中微子 [24]。该实验还证实了 μ 子中微子 ν_μ 和电子中微子 ν_e 是两种不同的中微子。图 1.31 所示为实验装置示意图。

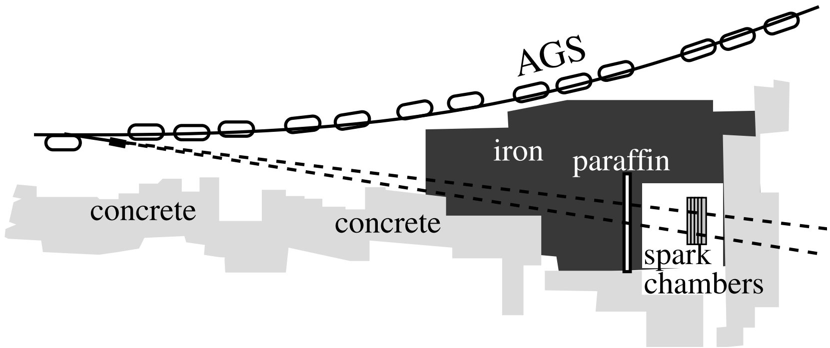


图 1.31: BNL 中微子实验的装置示意图

质子束从加速器束流管引出后打在铍靶上，产生大量的 $\pi^\pm$ 等次级粒子。这些次级粒子衰变产生 $\mu^\pm$ 和相伴随的正反中微子：

$$\begin{aligned} \pi^- &\rightarrow \mu^- + \overline{\nu} \\ \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

式中没有明确给出 ν 的种类，因为伴随 μ 子产生的中微子是否等同于伴随电子产生的中微子尚有待实验检验。在质心系中，这些衰变终态粒子是各向同性的，但在实验室系中则是朝前分布的。考虑到中微子与物质发生相互作用的截面极小，实验中在靶的后面放置了 13.5 m 厚的铁吸收层，使得除了中微子以外的所有其他粒子，包括穿透能力很强的 μ 子都被吸收掉。图中的水泥屏蔽块的作用是屏蔽辐射，保护靶附近实验人员的安全。

为了探测穿过铁吸收层后的中微子，要求实验设备不仅能作为中微子的靶，也能探测中微子与靶物质反应后产生的末态粒子。一个简单的考虑是采用**气泡室 (bubble chamber)**，但是计算结果表明气泡室的质量至少需要 10 吨才能达到实验需求，这在当时的技术条件下是不可行的。因此实验采用了 Conversi 和 A. Gozzini 于 1955 年发明，并由 S. Fukui 和 S. Myamoto 于 1959 年发展的**火花室 (spark chamber)**。

火花室是一种利用气体火花放电原理制成的带电粒子径迹探测器。BNL 实验的火花室共用了 90 个单元。每个火花室单元由两块相距几个毫米铝板电极组成。铝板之间充有惰性气体加适量其他气体的混合气体。其中一块电极接脉冲高压，另一块接地。铝板面积为 $1.1 \times 1.1\,\mathrm{m}^2$。每个火花室单元厚 2.5cm，重 10吨。中微子穿过火花室，发生反 β 衰变，产生带电粒子。此时，电触发线路给出的符合信号把高压脉冲加到电极间，气体被带电粒子电离，产生的电子雪崩式倍增，形成导电通道，继而发展成火花击穿，组成粒子径迹，再用照相法录下火花。

通过对照片的仔细研究，科学家发现了如下反应事例：

$$\begin{aligned} \nu + n &\rightarrow \mu^- + p \\ \overline{\nu} + p &\rightarrow \mu^+ + n \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

[24] 参阅文献：Danby, G. *et al.* (1962), *Phys. Rev. Lett.* **9** 36

而没有看到如下事例：

$$\begin{array}{ccccccc} \nu & + & n & \to & e^- & + & p \\ \overline{\nu} & + & p & \to & e^+ & + & n \end{array} \tag{1.3.16}$$

而 (1.3.16) 式表示的是核反应堆反 β 衰变过程，其中的中微子是电子中微子。因此我们只能认为伴随 μ 子产生的中微子 ν_μ 不同于伴随电子产生的中微子 ν_e。

这样到 1962 年实验发现的轻子共有 e、ν_e 和 μ、ν_μ 四种，它们总是相伴产生或消失，我们称之为**代 (generation)**，记作 $\binom{\nu_e}{e^-}$ 和 $\binom{\nu_\mu}{\mu^-}$。实验发现下列反应是允许发生的：

$$\begin{array}{lllllll} n & \to & p & + & e^- & + & \overline{\nu}_e \\ \mu^- & \to & e^- & + & \overline{\nu}_e & + & \nu_\mu \\ \mu^+ & \to & e^+ & + & \nu_e & + & \overline{\nu}_\mu \\ \pi^- & \to & \mu^- & + & \overline{\nu}_\mu & & \\ \pi^+ & \to & \mu^+ & + & \nu_\mu & & \end{array}$$

而下列反应则是禁戒的：

$$\begin{array}{rcllllll} e^- & + & e^- & \nrightarrow & \pi^- & + & \pi^- & \\ & & \mu^\pm & \nrightarrow & e^\pm & + & \gamma & \\ & & \mu^\pm & \nrightarrow & e^\pm & + & e^+ & + \; e^- \\ & & \pi^- & \nrightarrow & \mu^- & + & +\nu_\mu & \\ & & \pi^- & \nrightarrow & e^- & + & \nu_e & \\ \nu_\mu & + & N & \nrightarrow & e^- & + & N & \end{array}$$

1953 年 E. J. Konopinski 和 H. M. Mahmoud 设想存在某种守恒量子数禁戒了上述这些反应[25]，并称这种量子数为**轻子数 (lepton number)**，用于区分不同代的轻子。粒子物理学规定：

- 第一代 $\binom{\nu_e}{e^-}$ 的轻子数为 $L_e = 1$，第一代反轻子的轻子数为 $L_e = -1$；
- 第二代 $\binom{\nu_\mu}{\mu^-}$ 的轻子数为 $L_\mu = 1$，第二代反轻子的轻子数为 $L_\mu = -1$；
- 其他所有非轻子的代轻子数均为零。

轻子严格遵守代轻子数守恒定律[26]，即单个的轻子不能单独产生，也不能单独消失，它只能和其他轻子同时产生和消失，反应前后每代轻子数 L_e、L_μ 的代数和分别相等。

1967 年 A. Zichichi 提出可能存在第三代质量很大的轻子，称之为重轻子 H_l，相应的中微子为 ν_{H_l}。Zichichi 还提出了寻找 H_l 的具体方法，并在意大利的 ADONE 进行过实验寻找[27]。不过终因 ADONE 的能量不足而没有找到。这里简单介绍 Zichichi 的实验方法。由于轻子数守恒，下列过程是禁戒的：

$$\begin{array}{ccccccc} e^+ & + & e^- & \nrightarrow & e^+ & + & \mu^- \\ e^+ & + & e^- & \nrightarrow & e^- & + & \mu^+ \end{array} \tag{1.3.17}$$

[25] 参阅文献：Konopinski E.J. and Mahmoud H.M. (1953), *Phys. Rev.* **92** 1045

[26] 2002 年加拿大 SNO 和日本 KamLAND 实验的结果，均证实中微子可以发生振荡，即一种中微子在飞行中可以变成另一种中微子。这在科学上具有重要意义，它要求修改粒子物理的标准模型，预示着存在超出标准模型的新物理，如轻子数不守恒、质子衰变等。

[27] 参阅文献：Bernardini, M. *et al.* (1967), *A proposal to search for leptonic quarks and heavy leptons produced at ADONE*, INFN/AE-67/3

如果存在重轻子 $\tau^\pm$，那么有下述反应：

$$e^+ + e^- \rightarrow \tau^+ + \tau^- \tag{1.3.18}$$

产生的 $\tau^\pm$ 按如下方式 (包括电荷共轭过程) 衰变：

$$\begin{aligned}\tau^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\tau \\ \tau^- &\rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu + \nu_\tau\end{aligned}$$

如果在衰变产物中找到 $e^+\mu^-$ 或 $e^-\mu^+$ 对，那么 $e^\pm\mu^\mp$ 对不可能来自违反轻子数守恒定律的过程 (1.3.17)，而只能来自过程 (1.3.18)，即存在 $\tau^\pm$。上述过程的主要本底来自 π 介子的产生，因为这些本底过程的产生率远高于 $e^\pm\mu^\mp$ 对的产生，因此实验要求粒子探测器能很好地进行粒子鉴别。此外，信号过程的末态有四个中微子，因此末态的两根带电径迹与 e^+e^- 束流方向不在同一个平面内。这样的 $e^\pm\mu^\mp$ 对事例最终在 SPEAR 被发现。

1975 年 M. Perl 等在 SLAC 的 SPEAR 正负电子对撞实验中发现了一种新的轻子 [28]，它带正电或带负电，衰变成 μ 子或电子和两个中微子，它的质量很大，为质子质量的两倍，所以又叫重轻子或者 **τ 子 (tauon，tau lepton，tau)**。τ 子的寿命很短，是不稳定粒子。目前最精确的 τ 子质量的测量是由北京正负电子对撞机上 (BEPC) 的北京谱仪 (BES) 合作组于 1992 年给出的。

根据轻子成代出现的规律，必然存在与 τ 轻子相对应的第三种中微子，称为 **τ 子中微子 (tau neutrino)**，用符号 ν_τ 表示。它的存在一直到 2000 年 才由 K. Niwa 和他的合作者在美国费米国家加速器实验室 (Fermi National Accelerator Laboratory, Fermilab, FNAL)的 Tevetron 加速器上给予实验证实 [29] 。此时距离 τ 轻子的发现已过去 $\frac{1}{4}$ 个世纪。从这里也可以看出中微子的探测是何等的困难。

这样粒子物理中共有三代六种轻子以及相应的反轻子：

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\e^-\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\nu_\mu\\\mu^-\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\nu_\tau\\\tau^-\end{pmatrix}\qquad\qquad\begin{pmatrix}\overline{\nu}_e\\e^+\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\overline{\nu}_\mu\\\mu^+\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\overline{\nu}_\tau\\\tau^+\end{pmatrix} \tag{1.3.19}$$

六种轻子和六种反轻子目前认为是基本粒子，因为至今尚未发现轻子有内部结构的实验证据。轻子成代出现的原因是粒子物理研究的中心课题之一。一般认为粒子的质量与相互作用的性质有关。e、μ、τ 粒子的质量迥异，意味着它们的相互作用性质应该有很大不同。但是实验发现它们在相互作用性质上非常相似。其奥秘何在？至今仍不清楚。这可以称为"$e-\mu-\tau$"疑难。

1.3.7 三代夸克

夸克模型建立不久，人们就注意到夸克与轻子似乎存在某种对称性。当时人们认识到的夸克有 u、d、s 三种，发现的轻子也只有 e、μ、ν 三种。这似乎表明自然界有着完善的对称性。但是 1962 年实验发现中微子有 ν_e 和 ν_μ 两种不同的类型，即轻子实际上不是三种而是四种。因此 1964 年 S. Glashow 和 J. Bjorken 猜测还存在第四种夸克才能使夸克与轻子的对称性继续保持。1970 年 Glashow、J. Iliopoulos、L. Maiani 正式预言第四种夸克存在，并命名为 **粲 (charm)** 夸克，用符号 c 表示。u、d 和 s、c 形成两代夸克 $\binom{u}{d}$ 和 $\binom{c}{s}$。

[28]参阅文献：Perl, M.L. *et al.* (1975), *Phys. Rev. Lett.* **35** 1489
[29]参阅文献：Kodama, K. *et al.* (2001), *Phys. Lett.* **B 504** 218

1974 年丁肇中 (Samuel C.C. Ting) 在 BNL，B. Richter 在 SLAC 分别发现 J/ψ 粒子，它的质量很大，寿命却只有大部分共振态的 10^{-4} 倍，这必须将它解释为是由 c 夸克和 $\overline{c}$ 反夸克组成的束缚态。不久一系列新粒子 $\psi(2S)$、$\psi(3770)$、D、F、η_c 等的发现进一步证实了 c 夸克的存在。

1977 年 E288 组在 Fermilab 发现 Υ 粒子，表明第五种夸克 — **底 (bottom)** 夸克的存在，用符号 b 表示。Υ 粒子正是 b 和 $\overline{b}$ 组成的束缚态。轻子和夸克的对称性意味着还有第六种夸克 — **顶 (top)** 夸克，用符号 t 表示。1995 年 CDF 和 D0 组在 Fermilab 实验证实 t 夸克存在。b 夸克和 t 夸克构成第三代夸克。这样粒子物理中共有六种三代夸克以及相应的反夸克：

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{d} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \overline{c} \\ \overline{s} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \overline{t} \\ \overline{b} \end{pmatrix} \tag{1.3.20}$$

粒子物理学中把一个正粒子和一个反粒子组成的束缚态称为偶素，例如把电子和正电子组成的 e^-e^+ 束缚态称为电子偶素 (positronium)，把 $e^-\mu^+$ 束缚态称为 μ 子偶素 (muonium)，$c\overline{c}$ 称为**粲偶素 (charmonium)**，$b\overline{b}$ 称为**底偶素 (bottomonium)**，J/ψ 粒子和 Υ 粒子分别是粲偶素和底偶素中的第一个激发态 (参阅第 节)。

1964 年夸克概念提出后的一段时间内，包括 Gell-Mann 在内的很多人并没有将夸克当成物质实体，认为它只是一种比较方便的数学假设。只是由于夸克模型在解释实验事实上越来越成功，人们才越来越相信夸克确实就是存在于更深层次的物质实体。为了接受夸克是一种实在，必须从实验上找到夸克存在的证据。

根据历史上原子核和核子的发现经验，人们仍然采用高能粒子撞击核子的实验方法寻找夸克。早在 1955 年 R. Hofstadter 就用高能电子测出了质子和中子的电荷和磁矩分布，显示了它们有内部结构 (参阅第 节)。

1968 年开始在 SLAC 进行了一系列用高能量的电子作为探针来研究质子内部结构的实验，结果 (例如质子的能级谱 1.24) 表明质子内部存在点状结构。类似的实验也在中子上进行，得到了相同的结论。后来又用高能量的中微子作为探针来研究质子和中子结构。根据对散射截面的分析，也可以得到核子里存在点状物的结论。这正像当年 Rutherford 在实验中发现原子核的结构一样，显示质子或其它强子似乎都由一些更小的颗粒组成 (参阅第 节)。

以上根据强子谱得到的强子有内部结构的实验证据是间接的。从图 1.32 我们可以直接“看”到质子的组份。这其实是一系列电子质子散射的实验结果。图中每一条曲线对应不同散射角 θ 处的电子能量转移 (图 1.23 是某个特定散射角 $\theta = 10°$ 处的电子能量)。当散射角很小时，记录到的电子以弹性散射为主 (但是也能记录到一些激发态)，这相当于图中最上面一条曲线的情形。随着散射角的增加，发生弹性散射的概率以指数形式下降，说明质子的电荷分布以指数形式下降 (参考原子核的电荷分布图 1.5)，其他激发态也有类似的指数下降趋势，说明这些质子激发态都有一定的空间范围。但是当能量转移很大时，曲线不再随着散射角的增加而下降，说明电子被充分反弹，意味着质子里面存在近似自由的、质量不大的、坚硬的点状成分，这可以认为是夸克 [30] 存在的直接证据。强子中的成分在高能量转移下 (或很小尺度内) 如同自由粒子的性质称为**渐近自由 (asymptotic freedom)** (参阅第 节)，。

夸克的电荷可以由正负电子湮没为强子的总截面加以验证。由正负电子湮没为强子的过程，同正负电子湮没成一对 $\mu^-\mu^+$ 子的过程相仿，从理论上知道，在高能下这两个过程的总截面之比为：

$$R = \frac{\sigma(e^-e^+ \to \text{强子})}{\sigma(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+)}$$

[30] 事实上还包括强相互作用的传播子—胶子。

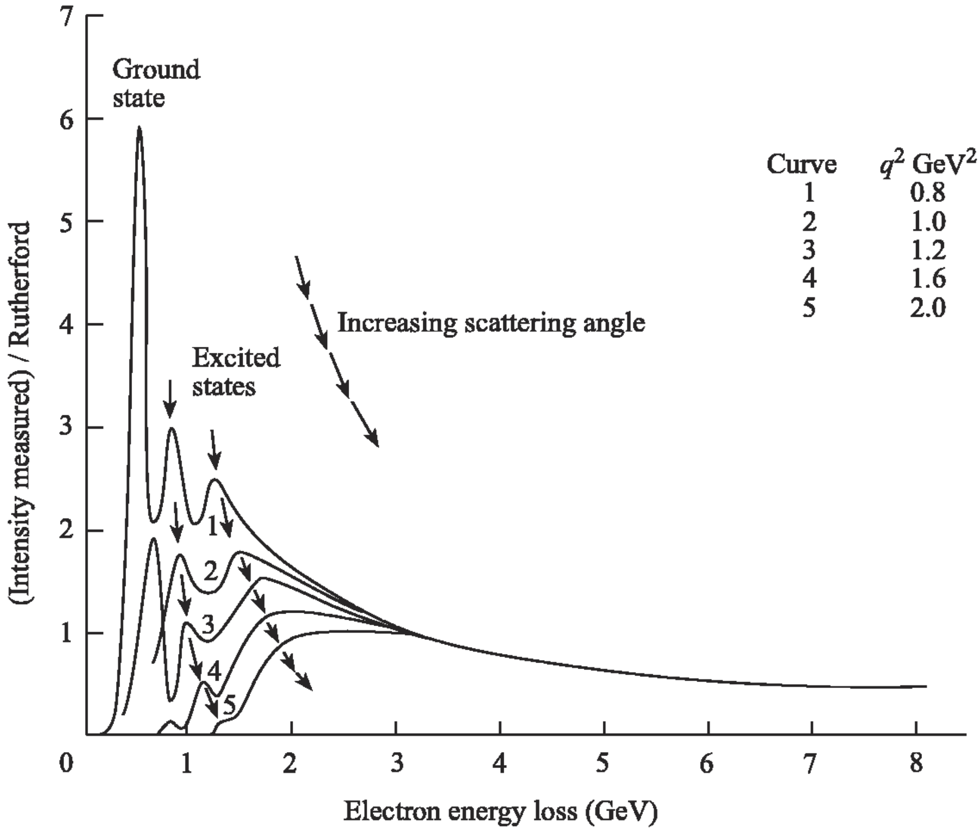


图 1.32: $e-p$ 散射实验中电子的能量转移。

R 值大小和夸克的电荷 q_i 有关，i 表示夸克的类型。二十世纪七十年代初的 R 实验值和理论上的夸克电荷值基本上能满足这个关系式，从而给予了夸克模型以很大的支持。

虽然实验上找到的质子、中子、π 介子、K 介子、J/ψ 粒子、Υ 粒子等可以用夸克模型完美地进行解释，另外 $e-p$、$e-n$ 等深度非弹性散射实验以及 R 值的测量也提供了夸克存在的证据，但是实验中从未发现这些单个的自由夸克。事实上二十世纪六十年代以来，人们在宇宙线、加速器以及岩石中，都进行了对夸克的实验找寻，但没有被确证为成功的报道。在六十年代和七十年代，有更多的能量更高、性能更好的加速器建成。在这些加速器上仍然没有找到自由的夸克。夸克总是被囚禁在强子内部，这种现象称为**夸克禁闭 (quark confinement)**。

1.3.8 粒子物理学的标准模型

从二十世纪六十年代开始，伴随着粒子世界层出不穷的新现象的发现，人们在电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用理论方面也经历了许多突破性进展，并最终建立了统一描述这三种相互作用的粒子物理学的**标准模型 (standard model)** [31]。

在已经发现的四种相互作用中，弱作用是最独特的一种。Fermi 理论中弱作用是四个费米子的直接相互作用。四十年代末，人们受 QED 启发，提出了带电中间矢量玻色子理论，即把“电荷”换成“弱荷”，把“电流”换成“弱流”，把传递电磁作用的“光子”换成传递弱作用的“矢量玻色子”。这里弱作用通过一种荷电的中间矢量玻色子 (intermediate vector boson) 传递，记作 $W^{\pm}$ 粒子。

[31] 关于标准模型诞生过程中一系列激动人心的进展，可参阅 2003 年 S. Weiberg 在 CERN 的一次纪念会上所做的讲演：*The Making of the Standard Model*。

根据中间矢量玻色子理论，中子的 β 衰变 $n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$ 如图 1.33 (a) 所示。从夸克层次看，这是中子的一个 d 夸克弱衰变到 u 夸克 $d \to u + W^-$，如图 1.33 (b) 所示。中子的另外两个组份夸克 u 和 d 见证了该 d 夸克的弱衰变，称为**旁观者 (spectator)**。费曼图 1.33 中 W 玻色子用波浪线表示 (也有人用虚线表示)，其符号由顶点处电荷守恒确定。由于 $W^\pm$ 带电，因此这种弱作用过程称为**弱带电流 (weak charged current)** 过程。

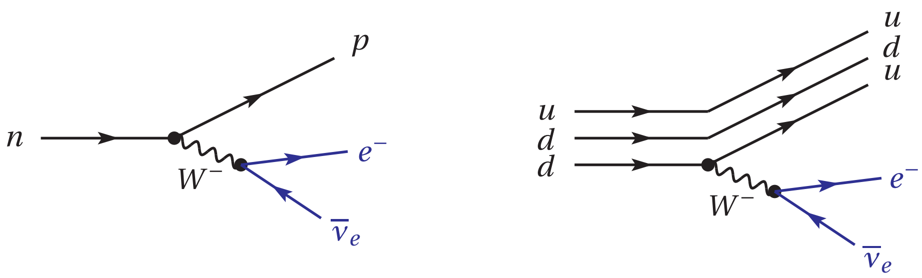


图 1.33: 中子 β 衰变的费曼图。(a) 强子层次 $n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$，(b) 夸克层次 $d \to u + W^-$。

相互作用力程与传播子的质量成反比 (参阅第 1.5.3 节)。电磁相互作用和万有引力的力程为无限大，它们的相互作用传播子，光子和引力子的质量为零。而弱相互作用的力程很短 (小于 10^{-15} cm)，其传播子 $W^\pm$ 粒子的质量必然很大。中间矢量玻色子理论计算出这种粒子的质量，约为质子质量的 75 倍。正因为中间玻色子太重，当时的高能加速器很难把它产生出来，中间玻色子的思想没有引起很大的重视。

至此，弱相互作用的理论仍然是两个矢量流之间的耦合，这样的理论在宇称变换下不变，不满足弱相互作用中宇称不守恒的要求。1958 年 Feynman 和 Gell-Mann 以及 E. Sudarshan 和 R. Marshak 两组理论家几乎同时提出了弱作用的 $V-A$ 理论。$V-A$ 理论适用于所有弱作用过程，被称为普适 Fermi 型弱相互作用理论。按照 $V-A$ 理论，中子与质子或中微子与电子不仅形成了矢量流 V，还形成了一种轴矢量流 A。流流耦合还是对的，只不过现在是矢量流与轴矢量流的耦合。$V-A$ 理论在宇称变换前后不同，符合宇称不守恒要求。

既然弱相互作用和电磁相互作用如此相似，那么它们之间应该具有更加深刻的内在联系。1968 年，经过 10 年左右的不断探索，Glashow、Weinberg、A. Salam 等提出了**电弱统一理论 (unified electro-weak theory)**。这个理论的基础是 1954 年杨振宁和 R.L. Mills 提出的 non-Abelian **规范场论 (gauge theory)**。电弱统一理论提出：电磁相互作用和弱相互作用具有自发破缺的 SU(2) ⊗ U(1) 对称性。其中 U(1) 对称性是电磁相互作用所具有的，它的 Abelian 规范场粒子 — 光子是传递电磁作用的粒子，这是已为人们了解的；而 SU(2) 对称性则是弱相互作用应具有的对称性，它的 non-Abelian 规范场粒子有 W^+、W^- 和 Z^0 三种，它们是传递弱作用的粒子，由于对称性的自发破缺的，作为规范场粒子的 $W^\pm$ 和 Z^0 有静止质量。在这个理论中，电磁相互作用和弱相互作用是统一的，两种耦合常数有着确定的关系。

电弱统一理论有两个重要预言：

- 其一是预言了**弱中性流 (weak neutral current)** 过程的存在。弱中性流过程形式上与弱带电流过程相同，只是不改变费米子的电荷，这是以前的理论中所没有过的。例如 $\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-$ 就是一种弱中性流过程，弱相互作用通过中性的 Z^0 矢量玻色子传递，其费曼图如图 1.34 所示。图中 Z^0 玻色子也用波浪线表示。1973 年 CERN 的实验家们发现了弱中性流事例，从而证明了弱相互作用中性流的存在。这使得电弱统一模型得到了充分的肯定。

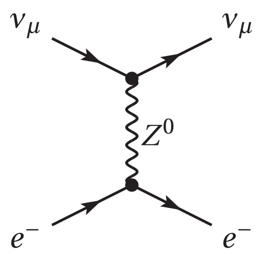


图 1.34: 一种弱中性流过程：$\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-$。

- 其二是预言 $W^\pm$、Z^0 粒子的质量约为 80 GeV/c^2 和 90 GeV/c^2。该理论提出之际，这三种传递弱相互作用的规范粒子还没有被发现。1983 年 C. Rubbia 实验组等在 CERN 的质心能量为 540 GeV 的高能 $p-\overline{p}$ 对撞实验中发现 $W^\pm$ 和 Z^0 规范粒子，质量及特性同理论期待完全相符，这给予电弱统一理论以极大的支持，目前已成为粒子物理学的标准模型的重要组成部分。

电弱统一理论也有不足的地方。① 从某种意义上说，这还不是一个真正统一理论，因其中含有两个规范群，有两个独立的耦合常数。② 没有解释为什么电荷是量子化的。③ 理论含有太多的参量，主要是标量粒子的各种自作用耦合常数以及标量粒子与各费米子间的耦合常数。

1973 年 G. 't Hooft 和 D.J. Gross 等人发展了强相互作用的 QCD 理论。QCD 也是粒子物理学的标准模型的重要组成部分。QCD 中严格的对称性是色 SU(3) 对称性，夸克之间的强相互作用通过交换**胶子 (gluon)** 传递。胶子是 SU(3) 规范粒子，共有八种，用 g 表示。它们如同光子一样，没有静止质量。图 1.35 表示的是与 QED 中 e^-e^+ 散射类似的 $q+q \to q+q$ 散射过程。该过程由两个基本顶点 qqg 组成，是 QCD 最低阶过程，费曼图中胶子用螺旋线表示。

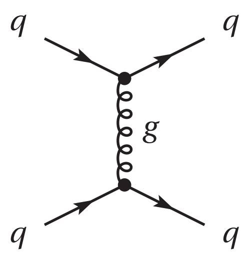


图 1.35: 一种 QCD 最低阶过程：$q+q \to q+q$。

作为一个成功的强相互作用理论，QCD 能够完美解释夸克的渐近自由和禁闭现象。事实上 QCD 与 QED 最大的不同在于光子没有电荷，而胶子却带有色荷，所以电磁相互作用没有渐近自由性质，而强相互作用却具有着渐近自由的性质。正因为强作用渐近自由的特点，在小距离范围 (10^{-16} m) 内，强作用耦合常数很小，QCD 可以做微扰论展开。但在大距离范围中 ($> 10^{-16}$ m)，QCD 除了不能用微扰论展开的困难外，还另有一些根本性问题，这些都有待解决及澄清。

对于实验上没有找到自由夸克的事实，QCD 理论认为：所有的夸克都有色，但由它们组合而成的强子却是无色的，实验中只可能看到不带色的粒子，因此所有的夸克均因其“色”而被禁闭在强子之中，自然界中不可能有自由夸克。这就是夸克禁闭假设。不过目前对夸克禁闭性质尚未弄清，不得不引进诸如复合、碎裂等唯象概念。

虽然有夸克禁闭假设，QCD 理论也认为：足够大的能量和温度应该能拆解强子，并使夸克和胶子重新结合形成**夸克胶子等离子体 (quark gluon plasma, QGP)**。QGP 是一种新型的物质形态，曾广泛存在于宇宙诞生后的百万分之几秒内。BNL 实验室的研究人员正在进行让金原子核以接近光速的速度相撞的实验，产生的巨大能量和温度足以“融解”质子和中子，使夸克以自由形态释放出来，并形成夸克胶子等离子体。

这样，到二十世纪七十年代，随着电弱统一理论和 QCD 的建立，人们最终建立了描述物质基本组成单元及其相互作用的理论模型，即粒子物理学的标准模型。其主要内容总结如下：

1. 自然界存在四种相互作用：引力相互作用、电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用。注意标准模型并不讨论大家熟知的引力相互作用。

2. 在轻子和夸克层次上，粒子分为轻子、夸克、规范矢量玻色子和 Higgs 标量玻色子。它们都是点粒子，可称为目前的基本粒子。所有粒子都有对应的反粒子，有些粒子的反粒子是其本身。

   (a) 轻子和夸克是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的基本费米子，各有六种，分为三代，每代包括两种轻子和两种夸克：

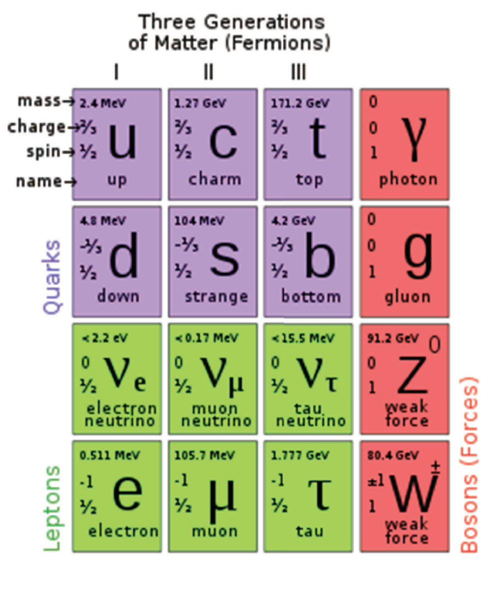
$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu^-\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau^-\end{pmatrix}\qquad\qquad\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}t\\ b\end{pmatrix}$$

   每种夸克都带有三种色荷。所有基本费米子都参与弱相互作用。所有带电的基本费米子都有电磁相互作用。夸克以参与强相互作用为特征，轻子以不参与强相互作用为其特征。

   (b) 规范矢量玻色子是传递相互作用的传播子，共有 12 种：

相互作用	媒介子		数目	J^P	质量 (GeV/c^2)
电磁	光子	γ	1	1^-	0
弱	中间玻色子	$W^\pm$,Z^0	3	1^-	80.398 (25), 91.1876 (21)
强	胶子	g	8	1^-	0

   总结基本费米子和传递相互作用的规范矢量玻色子如下图所示：



(c) Higgs 标量玻色子是标准模型引入的 Higgs 标量场的激发态，用于解释电弱作用的规范玻色子以及费米子为什么有质量。理论不能对 Higgs 粒子质量给出肯定的预言。理论预言自然界至少存在一种 Higgs 标量玻色子。

3. 标准模型的理论包括两部分：一是有关电磁相互作用和弱相互作用的电弱统一理论；二是揭示夸克内部性质及其运动规律的 QCD 理论。

在结束这一节之前，我们简要说明粒子物理学中的质量问题。标准模型的理论基础是杨振宁和 Mills 的 non-Abelian 规范理论。但直接将此规范理论应用到弱作用遇到重大障碍，即规范理论的规范对称性禁止规范玻色子带有任何质量，而规范玻色子 W 和 Z 应该有很大的质量。另外弱作用的宇称不守恒也为建立严格的对称性理论造成了困难。严格的弱作用内部对称性要求费米子的质量也必须为零，然而除了中微子以外，所有的费米子都是有质量的。因此，如果不能解决质量问题，将使得整个研究失去理论基础。

1962 年 P.W. Higgs 提出 **Higgs 机制 (Higgs Mechanism)**，并于 1967 年由 Weiberg 引入电弱统一理论，最终成为粒子物理学标准模型的一部分。在简单的 Higgs 机制中，要求存在一种 Higgs 场，它导致电弱相互作用的对称性自发破缺[32]。光子和中微子不与 Higgs 场发生相互作用，所以没有质量。W、Z 和其他费米子粒子通过与 Higgs 场的相互作用获得质量。此外 Higgs 机制还预言了 Higgs 粒子的存在，它是 Higgs 场的激发，也是玻色子，通过自相互作用而获得质量。

Higgs 玻色子在标准模型中扮演非常重要的角色，是解释粒子质量来源的关键。它是标准模型中唯一一个尚未被实验所观测到粒子。因此发现 Higgs 粒子是 LHC 最重要的物理目标。

> *“Well, those were great days. The 1960s and 1970s were a time when experimentalists and theorists were really interested in what each other had to say, and made great discoveries through their mutual interchange. We have not seen such great days in elementary particle physics since that time, but I expect that we will see good times return again in a few years, with the beginning of a new generation of experiments at this laboratory.”*
>
> “那是一个伟大的时代。二十世纪六十年代和七十年代是一个实验物理学家和理论物理学家彼此关注，在合作中做出伟大发现的年代。自那以后在基本粒子物理中我们再也不曾有过同样伟大的日子，但是我希望再过几年，随着这个实验室 (即 CERN) 新一代实验的开始，我们能够看到那个伟大时代的回归。”
>
> *“The Making of the Standard Model”*, 2004 — S. Weiberg

[32]对称性自发破缺的概念是 1960 年左右被南部阳一郎 (Yoichiro Nambu) 等物理学家从固体物理学引入到粒子物理学中的。就电弱相互作用而言，电弱统一理论给出电磁作用和弱作用的统一描述，但是在能量低于一定条件后，电磁作用和弱作用将呈现为不同的相互作用，这被称为电弱相互作用的对称性自发破缺。

1.4 单位制

物理学中单位制的使用一直是个问题，原因是物理学的各个分支学科都倾向于使用自己惯常使用的单位制，粒子物理学也不例外。粒子物理学除了会遇到力学、电磁学和热力学相关的物理定律和物理量，在描写微观粒子的运动规律时，经常遇到光速 c 和 Planck 常数 $\hbar$ 这两个量。因此粒子物理学也选取了一套基本物理量及其单位，构成了适合自己学科的单位制。

1.4.1 电磁学单位制

物理学常用的单位制有国际单位制 (SI) 和厘米克秒制 (cgs) 两种。如果只是选取长度、质量和时间这三个力学量为基本物理量，那么国际制中的基本单位 (米、千克、秒) 和 cgs 制中的基本单位 (厘米、克、秒) 其实没有原则区别，除了相关物理量的值会有 10^n 倍的差别，物理定律的形式，即公式完全一样。

但是一旦问题涉及到电磁现象，那么立即可以发现，在不同单位制下，不仅相同物理量具有不同的值，而且反映同一物理规律的公式具有不同的数学形式。电磁学中常见的单位制，除了国际单位制，还有静电单位制 (esu)，静磁单位制 (emu)，高斯 (Gaussian) 单位制和 Heaviside-Lorentz (HL) 单位制等。关于电磁学单位制的一些讨论、常见电磁学定律在这些单位制中的具体形式等，可参阅 J.D. Jackson 的 *Classical Electrodynamics* 附录。

这里我们就粒子物理学涉及的电磁学单位制，作以下几点说明：

- 粒子物理学的教材通常采用三种电磁学单位制，一是高斯单位制 (例如章乃森、Griffiths)，二是 HL 单位制 (例如 Halzen & Martin、Perkins)，三是国际单位制 (例如 Martin & Shaw)。粒子物理学的理论书籍以采用高斯单位制和 HL 单位制为主。

- 高斯单位制的力学单位基于厘米克秒制，电学单位基于静电单位制，磁学单位则基于静磁单位制。与国际单位制相比，Maxwell 方程组在高斯单位制中不出现真空的介电常数 (permittivity, dielectric constant) ϵ_0 和磁导率 (permeability) μ_0，但是出现无理因子 4π 和光速 c。

  HL 单位制则是对于高斯单位制的有理化。从高斯单位制转换到 HL 单位制是很容易实现的，只需对高斯单位制电磁学公式中的源 $\rho, q, \mathbf{j}, I, \mathbf{M}, \mathbf{P}$ 等乘以因子 $\sqrt{4\pi}$，对公式中的场 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \phi, \mathbf{A}$ 等除以因子 $\sqrt{4\pi}$。这样 HL 单位制的 Maxwell 方程组既没有 ϵ_0, μ_0，也不出现 4π，特别简洁整齐。(当然对于 Coulomb 定律、精细结构常数 α 等，HL 单位制反而较高斯单位制出现 4π 因子。)

  表 1.5 给出了一些国际单位制、高斯单位制到、HL 单位制中的电磁学公式。高斯单位制和 HL 单位制中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 具有相同的量纲，具有等同的地位，更明显地说明电磁场的统一。例如大家所熟知的 Lorentz 力公式为 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$。

- 国际单位制的力学和电磁学部分的基本物理量除了长度、质量和时间外，还选取电流作为第四个基本物理量，其单位是安培 (ampere)，电荷则是导出物理量。而高斯单位制的力学和电磁学部分的基本物理量仍然只有长度、质量和时间三个，无论电流还是电荷都是导出量。

- 电磁学公式从高斯单位制到国际单位制的转换可以利用表 1.6 进行。事实上只需对高斯单位制电磁学公式中的物理量 (表中第二列) 用第三列代替即可。

今后除非特别说明，在电磁学方面我们将使用 HL 单位制。

表 1.5: 国际单位制、高斯单位制、HL 单位制中的电磁学公式

国际单位制	高斯单位制	HL 单位制
$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$
$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{j}$	$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$	$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{1}{c}\mathbf{j}$
$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{E}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$
$\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+\mathbf{P}$
$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\mathbf{M}$	$\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}$	$\mathbf{H}=\mathbf{B}-\mathbf{M}$
$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$	$\mathbf{F}=q\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right)$	$\mathbf{F}=q\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right)$
$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$	$\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}$	$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\hbar c}$

表 1.6: 物理量从高斯单位制到国际单位制的转换

物理量	高斯单位制	国际单位制
真空中的光速	c	$\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$
电场、电势、电位差	$\mathbf{E}\{\phi,V\}$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0}\mathbf{E}\{\phi,V\}$
电位移	$\mathbf{D}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}\mathbf{D}$
电荷、电流、电荷密度、电流密度、极化	$q\{I,\rho,\mathbf{j},\mathbf{P}\}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}q\{I,\rho,\mathbf{j},\mathbf{P}\}$
磁感应	$\mathbf{B}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\mathbf{B}$
磁场	$\mathbf{H}$	$\sqrt{4\pi\mu_0}\mathbf{H}$
磁化	$\mathbf{M}$	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\mathbf{M}$
传导 (conductivity)、电容 (capacity)	$\sigma\{C\}$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sigma\{C\}$
介电常数	ϵ	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
磁导率	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$
电阻、阻抗 (impedance)、电感 (inductivity)	$R\{Z,L\}$	$4\pi\epsilon_0 R\{Z,L\}$

1.4.2 自然单位制

由于粒子物理学公式中经常出现体现微观粒子运动的量 $\hbar$ 和体现高速运动的量 c，粒子物理学在采用特定电磁学单位制的基础上，进一步引进了自然单位制 (natural units)。

- 利用真空中的光速：

$$c = 2.99\,792\,458 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s} \tag{1.4.1}$$

  令其值为无量纲的数 1，这样时间和长度将具有相同的量纲，可以用同一单位度量，这时原有的时间和长度的换算关系为：

$$1\,\mathrm{s} = 2.99\,792\,458 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$$

- 利用 Planck 常数：

$$\hbar = 6.582\,118\,99(16) \times 10^{-22}\,\mathrm{MeV\,s} \tag{1.4.2}$$

  令其值为无量纲的数 1，这样时间和能量的倒数将具有相同的量纲，可以用同一单位度量，这时原有的时间和能量的换算关系为：

$$1\,\mathrm{MeV}^{-1} = 6.582\,118\,99(16) \times 10^{-22}\,\mathrm{s}$$

- 式 (1.4.1)、(1.4.2) 表明

$$\hbar c = 197.326\,9631\,\mathrm{MeV\,fm} \tag{1.4.3}$$

  是一个无量纲的数 1，由此得到长度和能量的换算关系为：

$$1\,\mathrm{fm} = 5.067\,731\,16\,\mathrm{GeV}^{-1}$$

- 在上述规定下，只剩下一个独立的基本物理量，它可以由长度、质量、时间或其他任何一种有量纲的物理量中选取。粒子物理学通常选能量为基本物理量，单位用 GeV 或者 MeV。这就是粒子物理学中的的自然单位制。

今后除非特别说明，我们将采用自然单位制，在公式中省略 c、$\hbar$。

1.4.3 单位制转换

为了和实验结果进行比较，往往需要将物理公式从自然单位制转换回普通单位制 (我们采用的是 HL 单位制) 并进行相应的数字计算。这可以通过如下方法进行：首先通过量纲分析找回 c 和 $\hbar$ 这两个量，然后利用式(1.4.1)、(1.4.2) 和 (1.4.3) 等进行数字计算。

自然单位制中所有物理量的量纲都可以用能量量纲 $[E]$ 表示，特别是动量 $[P]$、质量 $[M]$、长度 $[L]$ 和时间 $[T]$ 量纲满足如下关系：

$$[P] = [E]\frac{1}{c}, \quad [M] = [E]\frac{1}{c^2}, \quad [L] = \hbar c[E]^{-1}, \quad [T] = \hbar[E]^{-1} \tag{1.4.4}$$

表 1.7: 物理量在普通单位制中的量纲 $[M]^p[L]^q[T]^r$ 和自然单位制中的量纲 $[E]^{p-q-r}$

物理量	普通单位制 p	q	r	自然单位制 n
$\hbar$、角动量	1	2	−1	0
c、速度	0	1	−1	0
电荷	0	0	0	0
质量	1	0	0	1
长度	0	1	0	−1
时间	0	0	1	−1
动量	1	1	−1	1
能量	1	2	−2	1
精细结构常数 α	1	3	−2	0
Fermi 耦合常数 G_F	1	5	−2	−2

因此动量和质量的量纲与能量的量纲相同，长度和时间的量纲与能量倒数的量纲相同。于是质子和电子的质量可表示成：

$$m_p = 938.272\,013(23)\,\text{MeV}, \qquad m_e = 0.511\,998\,910(13)\,\text{MeV} \tag{1.4.5}$$

如果某个物理量在普通单位制中的量纲为 $[M]^p[L]^q[T]^r$，那么它在自然单位制中的量纲为 $[E]^{p-q-r}$。表 1.7 列出了普通单位制和自然单位制中一些物理量的量纲。

例：低能 Compton 散射 (即 Thomson 散射) 的总散射截面在自然单位制中的表达式为

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{m_e^2}$$

为了将它转换到普通单位制，把上式写为：

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{m_e^2}\hbar^a c^b$$

式中整数 a, b 待定。

在普通单位制中，上式左边截面具有长度平方的量纲 $[L]^2$，根据表 1.7，上式右边 m_e^2 量纲为 $[M]^2$，$\hbar^a$ 量纲为 $[M]^a[L]^{2a}[T]^{-a}$，c^b 量纲为 $[L]^b[T]^{-b}$，于是

$$[L]^2 = \frac{[M]^a[L]^{2a}[T]^{-a}\,[L]^b[T]^{-b}}{[M]^2}$$

得到 $a = 2, b = -2$. 所以在普通单位制中 Thomson 散射公式为

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2(\hbar c)^2}{(m_e c^2)^2}$$

利用 (1.4.3) 和 (1.4.5) 算得其值为 $6.65\times10^{-29}\,\text{m}^2$。

粒子物理中更常用的截面单位单位是 barn (b)，millibarn (mb) 或 microbarn (μb)：

$$1\,\text{b} = 10^{-28}\,\text{m}^2, \quad 1\,\text{mb} = 10^{-3}\,\text{b}, \quad 1\,\mu\text{b} = 10^{-6}\,\text{b} \tag{1.4.6}$$

1.5 相互作用及其传递

物质世界运动变化的多样性在于粒子的产生、衰变和转化，这又归结于自然界存在的四种相互作用。在粒子反应过程中，万有引力及其微弱，其效应可以忽略。这里我们对反应过程进行量子力学描述 (不涉及相互作用动力学)，进而得到相互作用的传播子。接着一般讨论电磁相互作用、强相互作用和弱相互作用，最后介绍相互作用耦合常数的量纲分析。

1.5.1 量子力学描述

根据量子力学微扰论，单位时间内一个微观系统 (例如粒子或粒子系统) 从初态 $|i\rangle$ 过渡 (跃迁、产生、衰变) 到末态 $|f\rangle$ 的概率，即**跃迁速率 (transition rate)** 由 Fermi 的黄金规则 (Fermi's golden rule)得到：

$$\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_f) \tag{1.5.1}$$

式中 E_f 是末态能量，$\rho(E_f)$ 是末态态密度，T_{fi} 是跃迁矩阵元，是一系列的微扰展开：

$$T_{fi} = \langle f|V|i\rangle + \sum_{j\neq i} \frac{\langle f|V|j\rangle\langle j|V|i\rangle}{E_i - E_f} + \cdots \tag{1.5.2}$$

求和遍及所有中间态 j，其中 E_i 和 E_j 是初态和中间态能量。上式中的第一和第二项分别是微扰级数的一阶和二阶修正项。对于散射过程，前二阶微扰修正如图 1.36 所示，一阶过程可视为粒子被一个静态势散射，二阶过程则相当于通过一个中间态的散射。注意 $|i\rangle$ 和 $|f\rangle$ 应理解为量子系统 (当然可以是粒子)。

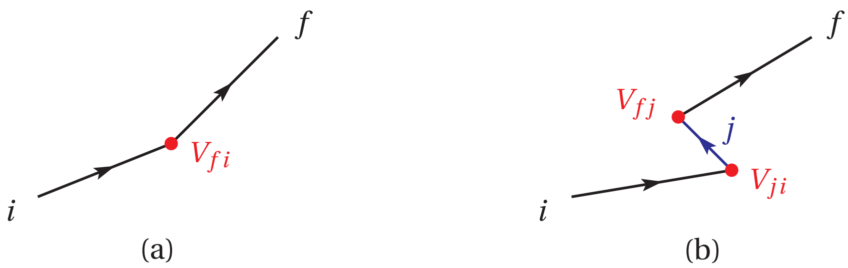


图 1.36: $|i\rangle \to |f\rangle$ 跃迁矩阵元。(a) 一阶微扰贡献，(b) 二阶微扰贡献。

我们考虑如下通过中间粒子 X 传递相互作用的弹性散射过程 [33]：

$$a \;+\; b \;\to\; c \;+\; d$$

根据上面的讨论可知，这是一个量子力学的二阶微扰过程，它有两个可能的时间和空间图像，如图 1.37 所示。这里：

$$\begin{aligned} \text{初态}\,|i\rangle: &\quad a+b \\ \text{末态}\,|f\rangle: &\quad c+d \\ \text{中间态}\,|j\rangle: &\quad b+c+X \end{aligned}$$

[33] 确切地说，这个反应过程应该写为 $a+b\to a+b$。这里为了讨论清楚，用 c,d 代替散射后的 a,b。

其中图 1.37 (a) 包括以下两个按时间次序发生的相互作用过程：

(1) $a \to c + X$： a 发出一个粒子 X 后变成 c
(2) $X + b \to d$： a 发出的粒子 X 被 b 吸收后变成 d

类似地，图 1.37 (b) 包括以下两个按时间次序发生的相互作用过程：

(1) $b \to d + X$： b 发出一个粒子 X 后变成 d
(2) $X + a \to c$： b 发出的粒子 X 被 a 吸收后变成 c

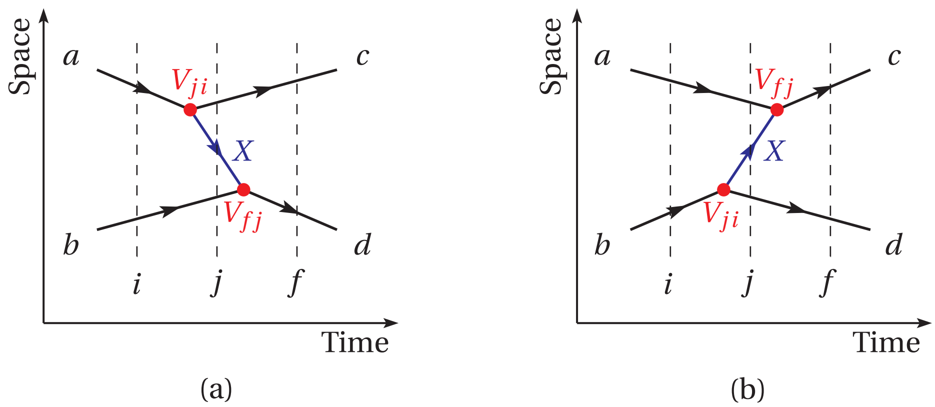


图 1.37: 散射过程 $a + b \to c + d$ 的两种时序图。

考虑图 1.37 (a) 所示的二阶微扰过程。利用 (1.5.2) 式可知其二阶微扰项为：

$$T_{fi}^{ab} = \frac{\langle d|V|X+b\rangle\langle c+X|V|a\rangle}{(E_a+E_b)-(E_c+E_X+E_b)} \tag{1.5.3}$$

其中上标 ab 说明该过程的时序为：a 发出 X 然后被 b 吸收。为了计算矩阵元 T_{fi}^{ab}，我们需要知道 $\langle c+X|V|a\rangle$ 和 $\langle d|V|X+b\rangle$ 的具体表达式。注意 T_{fi} 在不同惯性参考系中取值是不一样的，即它不是一个 Lorentz 变换下的不变量。不过一般情况下可以把 T_{fi} 写成 Lorentz 不变的矩阵元 $\mathcal{M}_{fi}$ (参阅第 节)：

$$T_{fi} = \prod_k \frac{\mathcal{M}_{fi}}{\sqrt{2E_k}} \tag{1.5.4}$$

其中 k 遍及矩阵元中的所有粒子。应用到此处的 T_{fi}^{ab} 情形：

$$\langle c+X|V|a\rangle = \frac{\mathcal{M}_{a\to c+X}}{\sqrt{2E_a 2E_c 2E_X}}$$
$$\langle d|V|X+b\rangle = \frac{\mathcal{M}_{X+b\to d}}{\sqrt{2E_b 2E_d 2E_X}}$$

式中 $\mathcal{M}_{a\to c+X}$ 和 $\mathcal{M}_{X+b\to d}$ 分别是过程 $a \to c+X$ 和 $b+X \to d$ 的 Lorentz 不变矩阵元。最简单的 Lorentz 不变量是一个标量，因此又可以把上式写为：

$$\begin{aligned}\langle c+X|V|a\rangle &= \frac{g_a}{\sqrt{2E_a 2E_c 2E_X}}\\ \langle d|V|X+b\rangle &= \frac{g_b}{\sqrt{2E_b 2E_d 2E_X}}\end{aligned} \tag{1.5.5}$$

其中 g_a 和 g_b 是描写过程 $a \to c + X$ 和 $b + X \to d$ 相互作用强度的标量。式 (1.5.5) 表明 g_a、g_b 并非无量纲的量。把它代入 (1.5.3) 式，得到：

$$T_{fi}^{ab} = \frac{1}{\sqrt{2E_a 2E_b 2E_c 2E_d}} \frac{1}{2E_X} \frac{g_a g_b}{E_a - E_c - E_X}$$

将上式与 (1.5.4)式比较，得到图 1.37 (a) 所示的整个过程的的矩阵元：

$$\mathcal{M}_{fi}^{ab} = \frac{1}{2E_X} \frac{g_a g_b}{E_a - E_c - E_X} \tag{1.5.6}$$

对于图 1.37 (b) 所示的时序过程作类似处理，得到

$$\mathcal{M}_{fi}^{ba} = \frac{1}{2E_X} \frac{g_a g_b}{E_b - E_d - E_X} \tag{1.5.7}$$

于是总的跃迁矩阵元是：

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{ab} + \mathcal{M}_{fi}^{ba} = \frac{g_a g_b}{2E_X} \left(\frac{1}{E_a - E_c - E_X} + \frac{1}{E_b - E_d - E_X} \right)$$

由于能量守恒：

$$E_a + E_b = E_c + E_d$$

故总的跃迁矩阵元为：

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - E_X^2} = \frac{g_a g_b}{(E_d - E_b)^2 - E_X^2}$$

图 1.37 (a) 时序的 $a \to c + X$ 过程中 X 在壳：

$$E_X^2 = \mathbf{p}_X^2 + m_X^2 = (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_c)^2 + m_X^2$$

于是有：

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_c)^2 - m_X^2} = \frac{g_a g_b}{(p_a - p_c)^2 - m_X^2} \tag{1.5.8}$$

式中 p_a、p_c 是粒子 a 和 c 的四维动量，定义四维动量转移：

$$\boxed{q \equiv p_a - p_c} \tag{1.5.9}$$

得到：

$$\boxed{\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{q^2 - m_X^2}} \tag{1.5.10}$$

由于四动量的平方 q^2 是个 Lorentz 不变量 (参阅第 节)，因此上式表明：把所有可能的时序过程相加后，跃迁矩阵元 $\mathcal{M}_{fi}$ 确实是一个与惯性参考系无关的 Lorentz 不变量。注意：① 也可以用 $X + b \to d$ 过程中 X 在壳，定义 $q \equiv p_d - p_b$ 得到 (1.5.10) 式；② 以上推导考虑的是 a, b 的弹性散射过程，同样结果也可以通过 a, b 的湮灭过程得到。

1.5.2 传播子

根据量子场论的观点，反应 $a+b\to c+d$ 的相互作用是通过粒子 X 传递的。图 1.37 可以看成是两个正粒子 a、b 发生散射生成两个正粒子 c、d 的情形下，两种不同时序的费曼图。反应的矩阵元 $\mathcal{M}_{fi}$ 依赖于两个相互作用顶点的强度 g_a 和 g_b，也与 X 携带的四动量转移的平方 q^2 有关。式 (1.5.10) 中的因子：

$$\boxed{\frac{1}{q^2-m_X^2}} \tag{1.5.11}$$

称为相互作用的传播子，我们也常把粒子 X 称为传播子。

前面我们已经得到传播子 X 的能量为 $E_X=E_a-E_c$，动量为 $\mathbf{p}_X=\mathbf{p}_a-\mathbf{p}_c$，并且由此定义四动量转移 $E_X^2-\mathbf{p}_X^2\equiv q^2$ (参阅 (1.5.8)、(1.5.9) 式)。而传播子的 $q^2\neq m_X^2$ (参阅 (1.5.11) 式)，因此传播子不满足质壳关系式，即 $E_X^2-\mathbf{p}_X^2\neq m_X^2$，是离壳的虚粒子。式 (1.5.10) 表明：虚粒子离壳程度越大，则虚过程发生的概率越小。事实上 q^2 可以是正的，也可以是负的，例如:

- 对于图 1.38 (a) 所示的弹性散射过程，有：

$$\boxed{q=p_1-p_3=p_4-p_2} \tag{1.5.12}$$

弹性散射时

$$p_1=(E,\mathbf{p}_1),\qquad p_3=(E,\mathbf{p}_3)$$

代入 (1.5.12) 式，得到:

$$q^2=(E-E)^2-(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2<0$$

这样的过程称为**类空 (space-like)** 过程，转移的是动量。

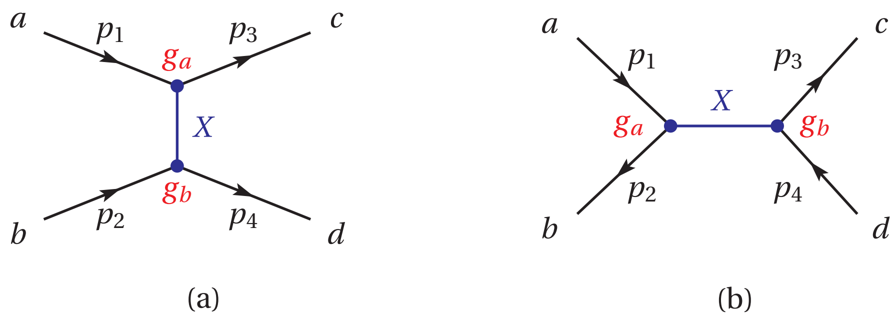


图 1.38: (a) 散射过程 (类空过程)，(b) 湮灭过程 (类时过程)。

- 对于图 1.38 (b) 所示的湮灭过程，有：

$$\boxed{q=p_1+p_2=p_3+p_4} \tag{1.5.13}$$

在质心系中

$$p_1=(E,\mathbf{p}_1),\qquad p_2=(E,-\mathbf{p})$$

代入 (1.5.13) 式，得到:

$$q^2=(E+E)^2-(\mathbf{p}-\mathbf{p})^2=4E^2>0$$

这样的过程称为**类时 (time-like)** 过程，转移的是能量。

对于电子 e^- 轰击静止质子靶 p 这样的过程，既可以用上面介绍的通过粒子 X 传递相互作用的二阶微扰理论来处理，从而得到 (1.5.10) 式所示的跃迁矩阵元。也可以认为是入射电子被质子产生的 Yukawa 静态势散射：

$$V(r) = -\frac{g_b}{4\pi}\frac{e^{-mr}}{r}$$

然后利用一阶微扰论计算跃迁矩阵元：

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle f|V(r)|i\rangle$$

结果与 (1.5.10) 式给出的完全一样。具体讨论可参阅 Perkins 第 2.3 节。

1.5.3 力程

考虑如图 1.39 所示的弹性散射过程：

$$a \ + \ b \ \rightarrow \ a \ + \ b$$

相互作用通过质量为 m_X 的传播子传递，设 X 与粒子 a 和 b 的耦合常数均为 g。

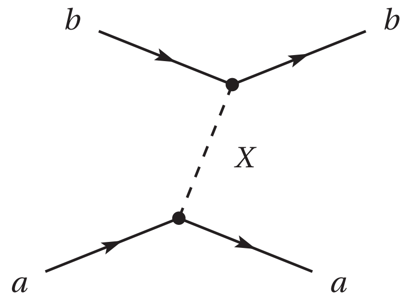


图 1.39: $a+b \to a+b$ 弹性散射过程及其传播子 X。

在入射粒子 a 的质心系中，下面那个顶点代表如下过程：

$$\begin{matrix} a & \rightarrow & a & + & X \\ (m_a,\mathbf{0}) & & (E_a,\mathbf{p}) & & (E_X,-\mathbf{p}) \end{matrix} \tag{1.5.14}$$

其中

$$E_a = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_a^2}, \qquad E_X = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_X^2} \tag{1.5.15}$$

初态和末态之间的能量差为：

$$\Delta E = E_X + E_a - m_a \rightarrow \begin{cases} 2|\mathbf{p}|, & |\mathbf{p}| \rightarrow \infty \\ m_X, & |\mathbf{p}| \rightarrow 0 \end{cases} \tag{1.5.16}$$

即对于任意 $|\mathbf{p}|$，有：

$$\Delta E \geqslant m_X \tag{1.5.17}$$

根据不确定关系，由 (1.5.17) 式表示的能量守恒在时间 Δt 内允许破坏：

$$\Delta t \sim \frac{1}{\Delta E} = \frac{1}{m_X}$$

于是立即得到传播子在被 b 粒子吸收前可以运动的最大距离为：

$$\boxed{R \equiv \frac{1}{m_X}} \tag{1.5.18}$$

我们称 R 为相互作用的力程。

电磁相互作用的传播子是无质量的光子，因此其力程为 ∞。强相互作用的传播子是无质量的胶子，因此其力程也是 ∞，但是强子之间的核力并不是单个胶子传递的，核力的力程为 $1-2\,\mathrm{fm}$。弱相互作用通过质量很大的 W, Z 玻色子传递，利用第 50 页中给出的 W, Z 的实验测量值，得到弱作用力程为：

$$R_{W,Z} = \frac{1}{m_W} \approx 2\times 10^{-3}\,\mathrm{fm} \tag{1.5.19}$$

在大多数情况下，该力程比反应过程中所有参与粒子的 de Broglie 波长还短，故可以近似地认为弱作用是力程为零的点相互作用，正如中子 β 衰变的 Fermi 理论中的四费米子直接相互作用。这种近似相当于取极限 $m_X \to \infty$。

1.5.4 三种相互作用

下面从轻子和夸克的层次一般地讨论三种相互作用过程，包括基本顶点和实际发生的物理过程。强子等具有内部结构的粒子之间的相互作用，实质上是组成它们的基本粒子之间的相互作用。

1. **电磁相互作用过程**

- 所有电磁现象最终归结为图 1.40 所示的基本 QED 顶点。该图包括了八种基本费曼图 (参阅图 1.9)。带电粒子之间的电磁相互作用是通过光子 γ 来传递的，带电粒子可以是带电轻子 $l = e,\mu,\tau$，也可以是夸克 q。电磁相互作用中带电粒子味道保持不变，作用顶点处电荷等相加性量子数守恒。

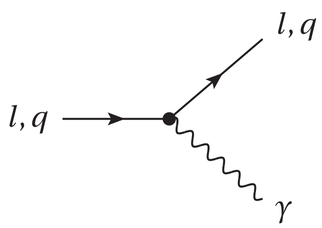


图 1.40: QED 基本作用顶点。

- QED 的八种基本过程都违背能量守恒，因而不是实际发生的 QED 过程。一个顶点发出的虚粒子必须在足够短时间 $\Delta t < \frac{\hbar}{\Delta E}$ 内被另外一个顶点吸收，这些才是可能发生的电磁作用过程。因此实际发生的电磁相互作用过程都是由两个或两个以上基本 QED 顶点组成的，例如图 1.10 中的 QED 最低阶树图，图 1.18 中的电子自能、真空极化、顶点修正等 QED 最低阶圈图，图 1.11 所示的 QED 四阶箱图等。
- 电磁相互作用中，如果传播子是光子，例如 $e^- - p$ 散射，则根据 (1.5.10) 式，有 $m_X = 0$，$g_a = Q_a e$，$g_b = Q_b e$，于是跃迁概率幅：

$$\propto \mathcal{M}_{fi} = \frac{(Q_a e)(Q_b e)}{q^2} \propto \frac{Q_a Q_b \alpha}{q^2} \tag{1.5.20}$$

其中 Q 是带电粒子的电荷因子。带电轻子、u 型夸克和 d 型夸克的电荷因子分别为 $Q = -1$、$\frac{2}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$。α 则是精细结构常数：

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \tag{1.5.21}$$

式 (1.5.20) 表明 QED 顶点发射或吸收光子的概率振幅 $\propto Qe$，概率 $\propto Q^2\alpha$。

2. **强相互作用过程**

- QCD 中的色荷相当于 QED 中的电荷，QCD 中的胶子 g 则扮演着 QED 中光子的角色，带色粒子例如夸克 q 之间的强相互作用是通过胶子传播的。因此可以把 QED 直接推广到 QCD，其基本顶点如图 1.41 所示，该图同样代表了八种 QCD 基本费曼图。强相互作用中夸克味道保持不变，作用顶点处色荷等相加性量子数守恒。

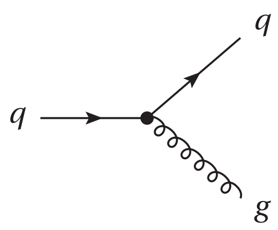


图 1.41: QCD 基本作用顶点。

- 同光子一样，胶子也没有质量，这八种基本 QCD 顶点违反能量守恒，因此只有两个或者两个以上的基本 QCD 顶点合在一起才是实际可以发生的强作用物理过程，例如图 1.35 所示的散射过程 $q+q \to q+q$。
- 但是 QCD 与 QED 有很大的不同，表现在 QED 只有一种电荷[34]，而 QCD 中夸克携带 r、g、b 三种色荷，因此在基本 QCD 顶点处，夸克颜色可能改变。例如任意一种味道的蓝色夸克可能转化为同样味道的红色夸克：

$$q^b \;\to\; q^r \;+\; g^{b\bar{r}} \tag{1.5.22}$$

反应前后的色荷之差由胶子携带。当然颜色也可能不变，例如：

$$q^r \;\to\; q^r \;+\; g^{r\bar{r}} \tag{1.5.23}$$

以上两个过程的示意图如图 1.42 所示。

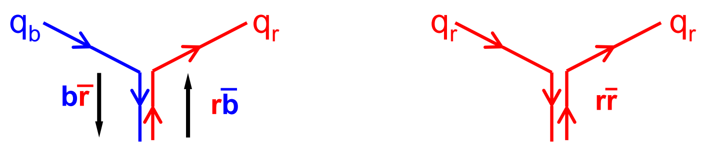


图 1.42: QCD 顶点：(左) 夸克色改变，(右) 夸克色不变。

显然传递强相互作用的胶子是双色的 (bicolored)，携带一种色以及一种反色，例如式 (1.5.22) 过程中的 $b\bar{r}$，以及式 (1.5.23) 过程中的 $r\bar{r}$。QCD 中共有三种色和三种反色，因此共有九种可能组合。事实上共有八种双色胶子，还有一种是色单态胶子自然界中并不存在 (参阅第 节)。

注意：由于强相互作用过程中夸克色守恒，因此在夸克层次画费曼图时，通常不需要对夸克和胶子标记颜色，默认夸克和胶子携带色量子数即可。例如夸克散射和湮灭的 QCD 最低阶过程一般如图 (1.43) 中黑色费曼图所示，不需要考虑颜色。

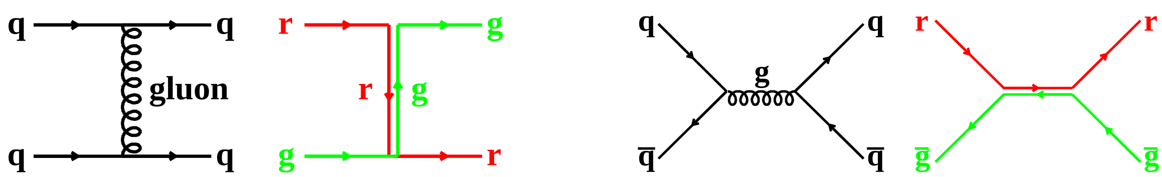


图 1.43: 夸克散射和湮灭的 QCD 最低阶过程。

[34]虽然电荷可正可负，但是只需要一个值就可以表示电荷，或者说 QED 中只有一种标量电荷。

○ 强作用的传播子是胶子，$m_X = 0$，$g_a = c_a g_s$，$g_b = c_b g_s$，根据 (1.5.10) 式，跃迁概率幅为：

$$\propto \mathcal{M}_{fi} = \frac{(c_a g_s)(c_b g_s)}{q^2} \propto \frac{c_a c_b \alpha_s}{q^2} \tag{1.5.24}$$

其中 c_a, c_b 是强作用顶点的色因子，它们对应胶子波函数的相关振幅 (参阅第 节)。α_s 则是与强相互作用耦合常数 g_s 相关的无量纲常数：

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} \tag{1.5.25}$$

需要指出的是无量纲常数 α_s (也包括 α) 并不是真正的常数，它们与动量转移的平方 q^2 有关，因而称为**跑动的耦合常数 (running coupling constant)**。实验测量和理论计算表明：当 q^2 很大时，α_s 相对较小，但是当 q^2 很小时，α_s 很大。例如：

$$\begin{aligned} &\alpha_s \approx 0.12 && q^2 \approx m_Z^2 \\ &\alpha_s \approx 1 && q^2 \approx 1\,\mathrm{GeV} \\ &\alpha_s > 1 && q^2 < 1\,\mathrm{GeV} \end{aligned} \tag{1.5.26}$$

α_s 随 q 跑动的 QCD 预言和实验值如图 1.44 所示。图中 q 用 μ 表示，DIS 指的是深度非弹性散射，jet 则是指强子喷注 (参阅第 节)。

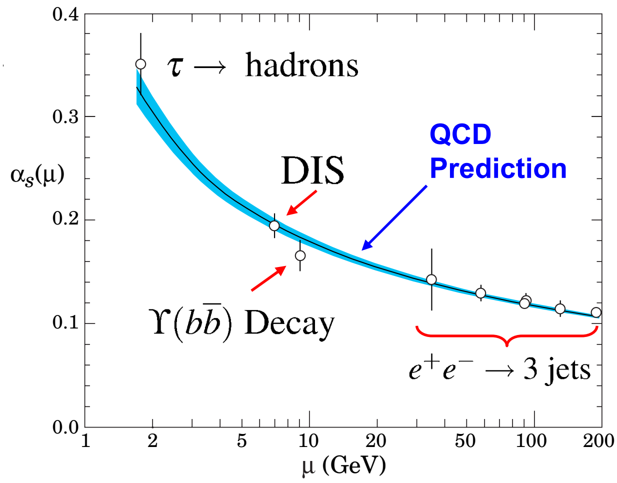


图 1.44: 强作用无量纲常数 α_s 随着 $\mu \approx q$ 跑动。

○ 由于胶子携带色荷，因此胶子之间也存在强相互作用。QCD 中除了基本的夸克夸克胶子 (qqg) 顶点，还有三胶子 (ggg) 顶点以及四胶子 ($gggg$) 顶点 [35]，如图 1.45 所示。此外，类似 QED 中的真空极化等圈图，QCD 中也有胶子圈图。

可见 QCD 远比 QED 复杂，同时其物理内容也更加丰富。例如 QCD 预言存在完全由胶子束缚而成的**胶子球 (glueball)**、由夸克反夸克以及胶子束缚成的 $q\bar{q}g$ **混杂态 (hybrid)**等。实验上有一些胶子球的候选者，但是由于胶子球的质量可以接近介子，量子数也可以与介子的一样，因此实验还无法对它们进行区分。

[35] QCD 中胶子顶点只有三胶子顶点和四胶子顶点两种，这是由规范场论的可重整化要求导致的。

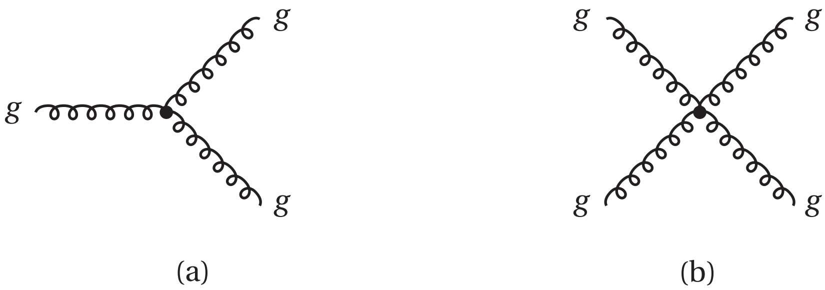


图 1.45: (a) 三胶子作用顶点，(b) 四胶子作用顶点。

3. **弱相互作用过程**

- 如同电磁相互作用和强相互作用有电荷和色荷，可以认为弱相互作用也有荷，称为弱荷 (weak charge)。不过弱荷这个名称不如电荷和色荷那样使用广泛，因为所有夸克和轻子均参与弱相互作用，因而都有弱荷。弱相互作用可以分为带电的和中性的两种，带电弱作用由带电规范玻色子 $W^{\pm}$ 传播，中性弱作用由中性规范玻色子 Z^0 传播。不同于 QED 中的光子和 QCD 中的胶子，弱作用的传播子都是有质量的。
- 类比 QED 过程，很容易得到弱相互作用的基本顶点，如图 1.46 所示。这些顶点包括轻子的弱带电流、夸克的弱带电流、轻子的弱中性弱和夸克的弱中性流等。大部分基本顶点不满足能量守恒，但是也有少数例外，例如 $W^- \to l^-\overline{\nu}_l$、$Z^0 \to l\overline{l}$、$t \to b + W^+$ 等。因此实际过程是这些基本顶点的组合。组合时需要注意弱作用过程中并非所有相加性量子数都守恒，特别是在弱带电流过程中，轻子和夸克的味道是改变的，这是弱相互作用的特点。
- 弱作用的传播子是质量很大的中间矢量玻色子，$m_X = m_W$，$g_a = g_b = g_w$，根据 (1.5.10) 式，跃迁振幅为：

$$\propto \mathscr{M}_{fi} = \frac{g_w^2}{q^2 - m_W^2} \xrightarrow{|q| \ll m_W} \frac{\alpha_w}{m_W^2} \tag{1.5.27}$$

其中 g_w 是弱荷或弱作用耦合常数，α_w 则是与 g_w 相关的无量纲常数：

$$\alpha_w \equiv \frac{g_w^2}{4\pi} \tag{1.5.28}$$

式 (1.5.27) 表明，当动量转移很小时，弱相互作用的跃迁速率 $\propto |\mathscr{M}_{fi}|^2$，它与传播子质量 m_W 的四次方成反比。因为 m_W 很大，因此弱作用发生概率很小。但是弱作用特征量 — 无量纲常数 α_w 并不很小。事实上弱作用耦合常数 g_w 与 Fermi 耦合常数 G_F 有如下关系：

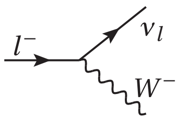
$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{g_w^2}{m_W^2} \tag{1.5.29}$$

自然单位制中 $\hbar c = 1$，把 (1.5.28) 式以及 G_F、m_W 的测量值 (参阅 (1.2.36) 式和第 50 页表) 代入 (1.5.29) 式，可以得到：

$$\alpha_w \approx \frac{1}{30} \tag{1.5.30}$$

弱作用之所以弱的原因在于传播子质量很大。

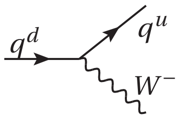
轻子的弱带电流
(轻子味道改变)



3代轻子 $\binom{l^-}{\nu_l}=\binom{e^-,\ \mu^-,\ \tau^-}{\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}$
×8种交叉过程
×2种细致平衡过程

$l^- \to \nu_l + W^-$	$\nu_l + W^- \to l^-$
$l^- + \overline{\nu}_l \to W^-$	$W^- \to l^- + \overline{\nu}_l$
$l^- + W^+ \to \nu_l$	$\nu_l \to l^- + W^+$
$\overline{\nu}_l \to l^+ + W^-$	$l^+ + W^- \to \overline{\nu}_l$
$\overline{\nu}_l + W^+ \to l^+$	$l^+ \to \overline{\nu}_l + W^+$
$W^+ \to l^+ + \nu_l$	$l^+ + \nu_l \to W^+$
$l^- + \overline{\nu}_l + W^+ \to \emptyset$	$\emptyset \to l^- + \overline{\nu}_l + W^+$
$\emptyset \to l^+ + \nu_l + W^-$	$l^+ + \nu_l + W^- \to \emptyset$

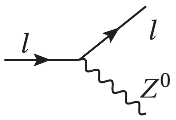
夸克的弱带电流
(夸克味道改变)



3代夸克 $\binom{q^u}{q^d}=\binom{u,c,t}{d,s,b}$
×8种交叉过程
×2种细致平衡过程

$q^d \to q^u + W^-$	$q^u + W^- \to q^d$
$q^d + \overline{q}^u \to W^-$	$W^- \to q^d + \overline{q}^u$
$q^d + W^+ \to q^u$	$q^u \to q^d + W^+$
$\overline{q}^u \to \overline{q}^d + W^-$	$\overline{q}^d + W^- \to \overline{q}^u$
$\overline{q}^u + W^+ \to \overline{q}^d$	$\overline{q}^d \to \overline{q}^u + W^+$
$W^+ \to \overline{q}^d + q^u$	$\overline{q}^d + q^u \to W^+$
$q^d + \overline{q}^u + W^+ \to \emptyset$	$\emptyset \to q^d + \overline{q}^u + W^+$
$\emptyset \to \overline{q}^d + q^u + W^-$	$\overline{q}^d + q^u + W^- \to \emptyset$

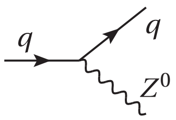
轻子的弱中性流
(轻子味道不变)



6种轻子 $l = e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$
×8种交叉或细致平衡过程

$l \to l + Z^0$
$l + \overline{l} \to Z^0$
$l + Z^0 \to l$
$\overline{l} \to \overline{l} + Z^0$
$\overline{l} + Z^0 \to \overline{l}$
$Z^0 \to l + \overline{l}$
$l + \overline{l} + Z^0 \to \emptyset$
$\emptyset \to l + \overline{l} + Z^0$

夸克的弱中性流
(夸克味道不变)



6种夸克 $q = u, d, c, s, t, b$
×8种交叉或细致平衡过程

$q \to q + Z^0$
$q + \overline{q} \to Z^0$
$q + Z^0 \to q$
$\overline{q} \to \overline{q} + Z^0$
$\overline{q} + Z^0 \to \overline{q}$
$Z^0 \to q + \overline{q}$
$q + \overline{q} + Z^0 \to \emptyset$
$\emptyset \to q + \overline{q} + Z^0$

图 1.46: 弱作用的基本顶点，注意在夸克的弱带电流中尚未考虑夸克代之间的跃迁。

❍ 以上讨论中，夸克和轻子完全对称，即轻子的弱带电流和夸克的弱带电流对称，轻子的弱中性流和夸克的弱中性流对称。这种描述对于夸克的弱带电流过程过于简单，因为这相当于只考虑了同代夸克之间的跃迁，如图 1.47 中黑实线所示。

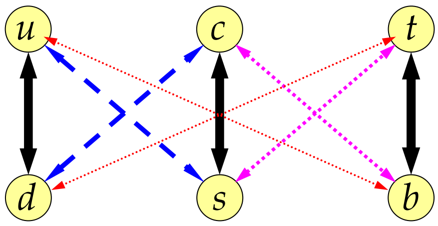


图 1.47: 夸克代之间的跃迁。

事实上在夸克的弱带电流过程中经常出现诸如图 1.47 中蓝、紫、红虚线所示的各种不同代夸克之间的跃迁。例如实验观测到奇异粒子 Λ 的衰变过程：

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda & \to & p & + & \pi^+ \\ uds & & uud & & ud \end{array}$$

从夸克层次看，发生的是 Λ 中的 s 夸克弱衰变到 u 夸克，如图 1.48 所示。

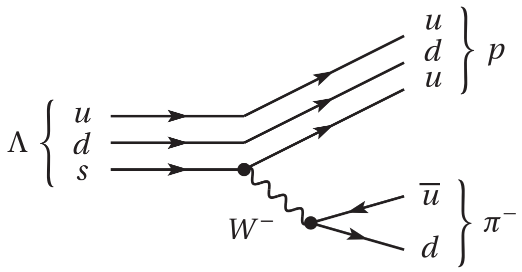


图 1.48: $\Lambda \to p^+\pi^-$ 在夸克层次的跃迁过程：$s \to u + W^-$。

夸克不同代之间发生跃迁的原因在于夸克在不参与弱作用时 (可以参与强作用或电磁作用) 的量子态，与参与弱作用时的量子态不一致，即夸克的质量本征态不是夸克的弱作用本征态。

1963 年 N. Cabibbo 在仅考虑 u, d, s 夸克的基础上，提出夸克的弱作用本征态 d' 是质量本征态 d, s 的叠加：

$$d' = d\cos\theta_C + s\sin\theta_C \tag{1.5.31}$$

以前认为的 $d \to u + W^-$ 跃迁实际上是 $d' \to u + W'$ 的跃迁，初步解决了以上难题。夸克的这个性质称为**夸克混合 (quark mixing)**。式 (1.5.31) 中的 θ_C 称为 **Cabbibo angle**：

$$\theta_C = 12.9^\circ, \qquad \cos\theta_C = 0.974, \qquad \sin\theta_C = 0.221$$

1970 年 Glashow、Iliopoulos 和 Maiani 进一步认为夸克的弱作用本征态 s' 也是质量本征态 d, s 的叠加：

$$s' = -d\sin\theta_C + s\cos\theta_C \tag{1.5.32}$$

这就预言了第四种夸克 c 的存在。于是参与弱作用的两代夸克是：

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \tag{1.5.33}$$

显然弱作用本征态 d', s' 和质量本征态 d, s 这两组基之间的关系为：

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{1.5.34}$$

这称为 **GIM 机制 (GIM mechanics)**。1973 年 M. Kobayashi 和 K. Maskawa 将之推广到三代夸克，此时夸克混合的变换为：

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{1.5.35}$$

式中的变换矩阵 V 称为 **CKM 矩阵 (CKM matrix)**。

4. **其它作用顶点**

标准模型中，规范粒子和费米子与 Higgs 标量场耦合从而得到质量。这些作用顶点如图 1.49 所示。其中 Higgs 粒子与费米子之间的相互作用称为 **Yukawa 耦合**。

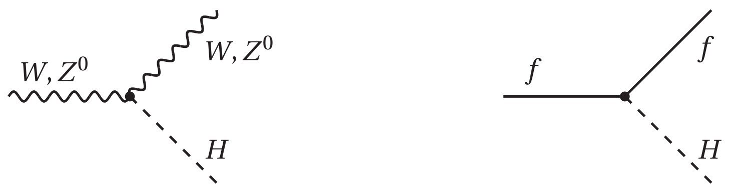


图 1.49: 规范粒子和费米子与 Higgs 粒子的作用顶点。

电弱统一理论中还有规范玻色子 W、Z、γ 之间的作用顶点 (正如 QCD 中有胶子之间存在相互作用)，如图 1.50 所示。这些顶点从规范理论的自洽性上很重要，但是目前看来还没有实际应用。

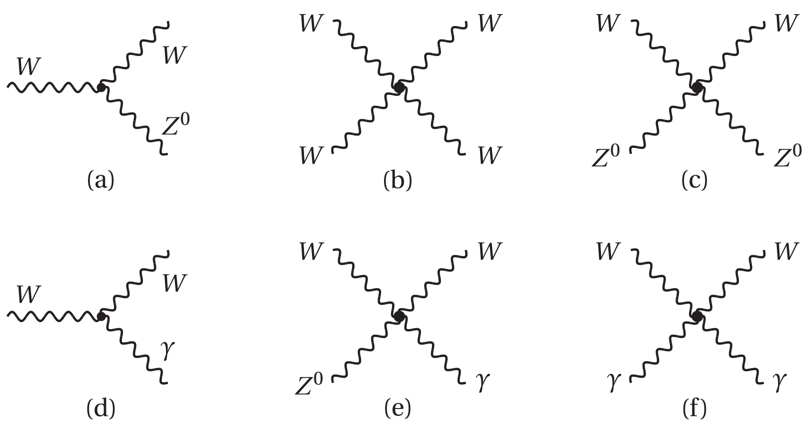


图 1.50: W、Z、γ 的三玻色子和四玻色子作用顶点。

在结束这一节前，我们把粒子物理学涉及的强、电磁、弱三种相互作用的典型性质总结在表 1.8 中。注意表中数据，特别是弱作用有关的数据仅作参考。

表 1.8: 三种相互作用的典型性质

相互作用	相对强度	力程 (m)	衰变过程 典型寿命 (s)	散射过程 典型截面 (mb)
强/核力	1	$\infty/10^{-15}$	10^{-23}	10
电磁	10^{-2}	∞	10^{-20}	10^{-2}
弱	10^{-7}	10^{-17}	10^{-8}	10^{-13}

1.5.5 耦合常数的量纲

粒子物理学中经常遇到各种涉及不同相互作用的反应过程，例如粒子对撞和打靶等散射过程，以及粒子的衰变过程。为了对这些过程进行比较，需要对涉及的相互作用的耦合常数有深入了解。这里我们介绍一下耦合常数的量纲分析。

量子场论中，相互作用的哈密顿量 (Hamiltonian) $\hat{H}_{\text{int}}$ 由哈密顿密度或者拉格朗日密度 (Lagrangian density) 表示：

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\int \mathscr{L}_{\text{int}} \mathrm{d}^3 x \tag{1.5.36}$$

其中拉氏密度 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 是参与相互作用的基本粒子的一系列场算符的线性叠加，系数就是相互作用耦合常数。在写出拉氏密度时需要区分玻色子和费米子，这是因为玻色子可以任意数目地产生或消失，费米子却总是成对产生或消失。我们用 ϕ 表示玻色子的产生或消失，用 $\overline{\psi}\psi$ 表示一对费米子的产生或消失，于是任意一个反应过程都可以用这些量来定性表示。例如一个玻色子消失和两个费米子产生的过程：

$$\pi \quad \rightarrow \quad \mu \quad + \quad \nu$$

其拉氏密度可以写为：

$$g\phi\overline{\psi}\psi \tag{1.5.37}$$

类似的拉氏密度还有：

$$\mu\phi\phi\phi, \qquad \lambda\phi\phi\phi\phi, \qquad G\overline{\psi}\psi\overline{\psi}\psi \tag{1.5.38}$$

式 (1.5.37)、(1.5.38) 中的 g,μ,λ,G 就是相互作用耦合常数。以上 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 的几种表示均不涉及 ϕ、ψ 的具体形式。

下面我们分析耦合常数 g,μ,λ,G 的量纲。这里需要用到量子场论的两个结果：

- 质量为 m 的玻色子的拉氏密度为 $m^2\phi^2$
- 质量为 m 的费米子的拉氏密度为 $m\overline{\psi}\psi$

注意到 (1.5.36) 式具有能量的量纲，在自然单位制中，d^3x 的量纲为 $[E]^{-3}$，因此拉氏密度的量纲是 $[E]^4$。于是 ϕ^2 的量纲是 $[E]^2$，或 ϕ 的量纲是 $[E]$，$\overline{\psi}\psi$ 的量纲是 $[E]^3$，

或 ψ 的量纲是 $[E]^{\frac{3}{2}}$。已知 $\mathscr{L}$、ϕ 和 ψ 的量纲，立即得到 (1.5.37)、(1.5.38) 式中耦合常数的量纲为：

相互作用	耦合常数	量纲
$\phi\overline{\psi}\psi$	g	0
$\phi\phi\phi$	μ	1
$\phi\phi\phi\phi$	λ	0
$\overline{\psi}\psi\overline{\psi}\psi$	G	−2

(1.5.39)

电磁相互作用过程的拉氏密度可以写成上式中第一项的形式，因此电磁作用的耦合常数 α 是无量纲的。至于弱相互作用过程，我们知道在 β 衰变的费米理论中，四个费米子直接相互作用为：

$$G_F(\overline{\psi}\psi)(\overline{\psi}\psi)$$

正是式中第四项。于是 Fermi 耦合常数 G_F 的量纲为 $[E]^{-2}$，是一个有量纲的常数。

关于耦合常数量纲需要指出两点：

- 有些耦合常数是无量纲的，因此它们相互作用相对强度的比较是有意义的。特别是目前理论认为，三种原先认为完全不同的相互作用可能统一，即强相互作用、弱相互作用和电磁相互作用有相同的强度。
- 更重要的是，那些耦合常数具有负能量量纲的相互作用是不能重整的。如果一个量子场论的高阶微扰项包含如下形式的对中间粒子四动量的积分：

  $$\int^{\infty}\frac{1}{q^2}\mathrm{d}^4q$$

  那么这个积分形式上就是发散的。标准做法是引入一个切断参数 Λ，然后积分直到 Λ，最后令 $\Lambda\to\infty$，希望得到一个不依赖于 Λ 的有限结果。对于具有负量纲的耦合常数，这是不可能的。

图 1.51 所示为目前可重整化的相互作用顶点和相应的拉氏密度。其中虚线代表玻色子，指标 a,b 代表胶子的色荷。

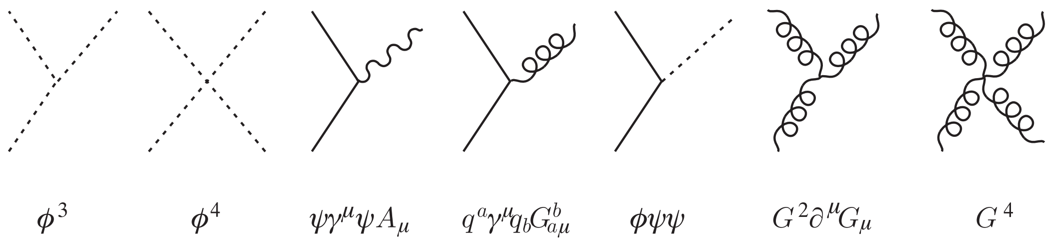


图 1.51: 目前理论中可重整化的相互作用顶点。

第 2 章　粒子的基本性质

到目前为止实验上发现的粒子多达几百种。对于如此众多的粒子如何辨认？量子力学认为辨认一个微观粒子就是要确定粒子的基本特性，包括电荷、质量、寿命、自旋、宇称、同位旋等，它们不随粒子产生来源和运动状态而变化。所有这些基本属性的总和是判别粒子种类的依据。实验还发现这几百种粒子中绝大部分是不稳定的，会发生衰变。为了对粒子进行研究，一般是利用加速器通过碰撞的方法人工产生。粒子的产生和衰变的根源在于粒子参与的相互作用。本章首先介绍高速运动学，接着讨论粒子的产生和衰变的一般描述，以及粒子的相加性量子数和相乘性量子数等基本性质。最后介绍强子的一些性质以及他们的产生和衰变规律。

2.1　相对论运动学

粒子的速度接近光速时，需要用相对论来处理问题。在狭义相对论中，时间和空间、能量与动量等并不独立，在不同惯性系之间的时间和空间、能量和动量由 Lorentz 变换联系。因此处理高速粒子相互作用的问题，首先要掌握相对论运动学。粒子物理的所有反应过程必须满足相对论协变性，或者说描述粒子系统的基本方程在所有惯性参考系中必须具有相同的形式。

2.1.1　四维矢量

在狭义相对论中，一个时间维和三个空间维构成四维 Minkowski 空间。该空间中的任何一点都代表一个事件，用**四维矢量 (four-vector)** a 表示。可以把一个四矢量写成带上指标的**逆变 (contravariant)** 形式：

$$a^{\mu} \equiv (a^0, \mathbf{a}) \tag{2.1.1}$$

或者带下指标的**协变 (covariant)** 形式：

$$a_{\mu} \equiv (a_0, -\mathbf{a}) \tag{2.1.2}$$

常见的逆变形式的四矢量有：

$$\begin{array}{lllll} \text{四维位置} & x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) & = (t, x, y, z) & = (t, \mathbf{x}) \\ \text{四维动量} & p^{\mu} = (p^0, p^1, p^2, p^3) & = (E, p_x, p_y, p_z) & = (E, \mathbf{p}) \\ \text{四维势} & A^{\mu} = (A^0, A^1, A^2, A^3) & = (\phi, A_x, A_y, A_z) & = (\phi, \mathbf{A}) \\ \text{四维流} & j^{\mu} = (j^0, j^1, j^2, j^3) & = (\rho, j_x, j_y, j_z) & = (\rho, \mathbf{j}) \end{array} \tag{2.1.3}$$

相应的协变形式的四矢量为：

$$
\begin{aligned}
x_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) &&= (t, -x, -y, -z) &&= (t, -\mathbf{x}) \\
p_\mu &= (p_0, p_1, p_2, p_3) &&= (E, -p_x, -p_y, -p_z) &&= (E, -\mathbf{p}) \\
A_\mu &= (A_0, A_1, A_2, A_3) &&= (\phi, -A_x, -A_y, -A_z) &&= (\phi, -\mathbf{A}) \\
j_\mu &= (j_0, j_1, j_2, j_3) &&= (\rho, -j_x, -j_y, -j_z) &&= (\rho, -\mathbf{j})
\end{aligned}
\tag{2.1.4}
$$

定义 $g_{\mu\nu}$ 为**度规张量 (metric tensor)**：

$$
g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\tag{2.1.5}
$$

协变矢量和逆变矢量通过度规张量联系：

$$
a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \qquad a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu
\tag{2.1.6}
$$

式中我们采用了 Einstein 求和惯例，即对于任意一对重复的上下指标自动求和，求和遍及 0,1,2,3。例如：

$$
g_{\mu\nu} x^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu 0} x^0 + g_{\mu 1} x^1 + g_{\mu 2} x^2 + g_{\mu 3} x^3
$$

对四维坐标的偏导数也有逆变和协变形式，它们也是四矢量，定义为：

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) &&= \left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right) \\
\partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right) &&= \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right)
\end{aligned}
\tag{2.1.7}
$$

于是量子力学中的能量算符 $i\frac{\partial}{\partial t}$ 和动量算符 $-i\boldsymbol{\nabla}$ 可以写成如下四矢量的形式：

$$
i\partial^\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\boldsymbol{\nabla}\right)
\tag{2.1.8}
$$

2.1.2 标量积

对于两个四矢量 a 和 b，定义它们的**内积 (inner product)** 为：

$$
a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^\mu b_\mu
\tag{2.1.9}
$$

利用两个矢量的分量形式 $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$、$b^\mu = (b^0, \mathbf{b})$，它们的内积可明显写为：

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 \\
&= a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \\
&= a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}
\end{aligned}
\tag{2.1.10}
$$

显然这是一个不变量或称为标量，即在不同惯性参考系中内积的值不变，因此内积又称为**标量积 (scalar product)**。

下面给出几个不变量的例子。

- 两个四动量的标量积：

$$p_1 \cdot p_2 = p_{1\mu} p_2^\mu = E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = E_1 E_2 - |\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2| \cos\theta \tag{2.1.11}$$

  式中 θ 是 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 之间的夹角。

- 四动量和四维坐标的标量积：

$$p \cdot x = p_\mu x^\mu = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \tag{2.1.12}$$

  于是描述平面波传播的相因子 $e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)} = e^{-ip\cdot x}$ 是不变量。

- 四动量的模：

$$p \cdot p = p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \tag{2.1.13}$$

  上式就是能动量关系式，或质壳关系，质量 m 是不变量。

- 连续性方程：

$$\partial_\mu j^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \cdot (\rho, \mathbf{j}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{2.1.14}$$

- d’Alembertian 算符 $\Box^2$ 也是个不变量：

$$\Box^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{2.1.15}$$

注意两个四维矢量的标量积并不具有正定性。狭义相对论根据四矢量 a 的标量积 a^2 的符号将 a 分为三类：

$$\begin{aligned} a^2 > 0, &\qquad a \text{ 是类时矢量} \\ a^2 < 0, &\qquad a \text{ 是类空矢量} \\ a^2 = 0, &\qquad a \text{ 是类光矢量 (零矢量)} \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

例如第 1.5.2 节中，对于式 (1.5.12) 表示的弹性散射过程，四动量转移平方 $q^2 < 0$，可知相应的四动量转移 q 是类空四矢量，故称该过程为类空过程。而对于 (1.5.13) 式表示的湮灭过程，四动量转移平方 $q^2 > 0$，可知相应的四动量转移 q 是类时四矢量，故称该过程为类时过程。

2.1.3 能量和动量

考虑一个质量为 m、以速度 $\mathbf{u}$ 运动的自由粒子。根据狭义相对论，该粒子的能量和动量分别为：

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \gamma(u) m \\ \mathbf{p} &= \gamma(u) m \mathbf{u} \end{aligned}} \tag{2.1.17}$$

其中 $u = |\mathbf{u}| \leqslant 1$ 是无量纲的量，$\gamma(u) \geqslant 1$ 称为 **Lorentz 因子**：

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} \tag{2.1.18}$$

- 由于 $\gamma(u) \geqslant 1$，因此粒子能量 $E \geqslant m$，多余的能量等于**粒子动能 (kinetic energy)**，记做 T，这样粒子的能量是以下两部分之和：

$$E = m + T \tag{2.1.19}$$

- 式 (2.1.17) 表明粒子运动速度可以由其动量和能量表述：

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{E} \tag{2.1.20}$$

代入 Lorentz 因子定义 (2.1.18) 式，有如下有用的表达式：

$$\gamma = \frac{E}{m}, \qquad \gamma\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{m} \tag{2.1.21}$$

- 由 (2.1.17) 式还可以得到质壳关系式：

$$m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 \tag{2.1.22}$$

我们考虑两个特殊情形：① 如果粒子无质量，那么 $E = |\mathbf{p}|$，于是沿着 z 向运动的粒子的四动量可写为 $p^\mu = (E, 0, 0, E)$；② 如果粒子质量 $m \neq 0$，那么在粒子静止系中，粒子的四动量可写为 $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$。

- 考虑粒子的衰变过程 $a \to 1 + 2 + \cdots + n$，反应前后的总能量和总动量守恒：

$$E_a = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$
$$\mathbf{p}_a = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n$$

上式可以写为四动量守恒：

$$p_a = p_1 + p_2 + \cdots + p_n \tag{2.1.23}$$

在粒子 a 的质心系中，根据能量守恒，有

$$m_a = E_1 + E_2 + \cdots + E_n = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n) + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n)$$

因为动能 T_j 恒为正，所以

$$m_a \geqslant m_1 + m_2 + \cdots + m_n \tag{2.1.24}$$

即初态粒子 a 的质量 m_a必然大于末态所有粒子的质量之和，除非各末态粒子相对初态粒子静止。由于上面表达式涉及的质量都是标量，故该结论适用于任意参考系。上式表明：即使粒子被加速到非常高的能量，其衰变产物中仍然不可能有质量比它大的粒子。

- 对于粒子的散射过程 $a + b \to 1 + 2 + 3 + \cdots + n$，反应前后的总能量和总动量守恒：

$$E_a + E_b = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$
$$\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n$$

或者写为四动量守恒：

$$p_a + p_b = p_1 + p_2 + \cdots + p_n \tag{2.1.25}$$

如果反应过程中初态粒子的动能等于末态粒子的动能，则称该过程为弹性散射过程。故弹性散射过程要求初态粒子完全等同于末态粒子。例如 $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$ 一定是弹性散射过程，而 $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ 一定是非弹性散射过程。

❍ 由 n 个粒子组成的系统的四动量是所有粒子的四动量之和：

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n \tag{2.1.26}$$

粒子系统的不变质量 M 定义为：

$$M^2 = p^2 = (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2 \tag{2.1.27}$$

与前面推理过程类似，有：

$$M \geqslant m_1 + m_2 + \cdots + m_n \tag{2.1.28}$$

即粒子系统的不变质量总是大于组成该系统的任意一个粒子的质量。

2.1.4 Lorentz 变换

考虑四维 Minkowski 空间中的两个惯性参考系 $\Sigma(t,x,y,z)$ 和 $\Sigma'(t',x',y',z')$，设初始时刻 $t = t' = 0$，两个惯性系的坐标原点重合，且 Σ' 沿着 z 方向以速度 β 相对 Σ 运动。则空间中的任意一个矢量 a 在两个惯性系中的变换为：

$$\boxed{a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu}} \tag{2.1.29}$$

其中 Λ^{μ}_{ν} 是 **Lorentz 变换 (Lorentz transformation)** 矩阵，这是一个幺正矩阵：

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{2.1.30}$$

式中：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.1.31}$$

如果一个物理方程式在不同的坐标中具有相同的形式，则称该方程式是 Lorentz 协变的。显然能够用标量或四维矢量表述的方程总是Lorentz 协变的。

根据 (2.1.29) 式，我们写出四维位置 $x^{\mu} = (t,x,y,z)$ 的 Lorentz 变换为：

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \beta z) \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma(z - \beta t) \end{aligned} \tag{2.1.32}$$

四动量 $p^{\mu} = (E, p_x, p_y, p_z)$ 的 Lorentz 变换为：

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - \beta p_z) \\ p'_x &= p_x \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= \gamma(p_z - \beta E) \end{aligned} \tag{2.1.33}$$

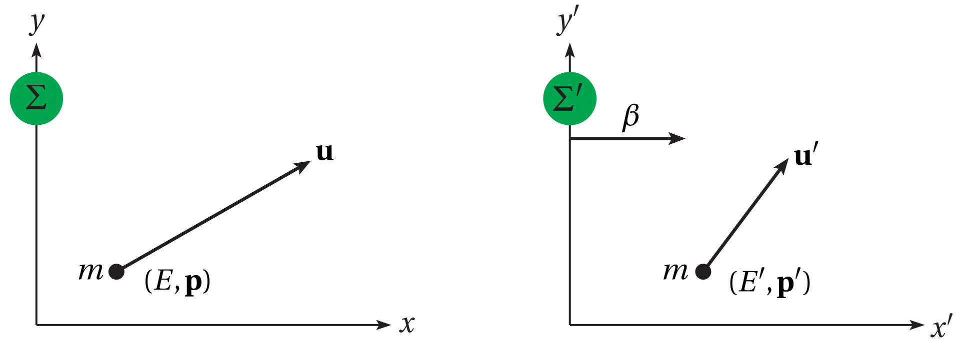


图 2.1: 以相对速度 β 运动的惯性参考系 Σ 和 Σ' 中观测到的粒子的能量、动量、速度。

请注意区分惯性参考系之间的相对运动速度 β 和粒子在惯性系 Σ 中的速度 $\mathbf{u}$，以及粒子在惯性系 Σ' 中的速度 $\mathbf{u}'$，如图 2.1 所示。

例 1： 证明 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{E}$ 是 Lorentz 变换下的不变量。

根据 Lorentz 变换式 (2.1.33)，有：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}p'_x = \mathrm{d}p_x \\
&\mathrm{d}p'_y = \mathrm{d}p_y \\
&\mathrm{d}p'_z = \gamma(\mathrm{d}p_z - \beta \mathrm{d}E) = \gamma \mathrm{d}p_z\left(1 - \beta\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p_z}\right) = \gamma \mathrm{d}p_z\left(1 - \beta\frac{p_z}{E}\right)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\mathrm{d}\mathbf{p}' = \mathrm{d}p'_x\mathrm{d}p'_y\mathrm{d}p'_z = \gamma\mathrm{d}\mathbf{p}\left(1 - \beta\frac{p_z}{E}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{E}\gamma(E - \beta p_z) = \frac{E'}{E}\mathrm{d}\mathbf{p}
$$

或者写为：

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{E} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}'}{E'}
$$

因此 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{E}$ 是 Lorentz 不变量。

因子 $\frac{1}{E}$ 还可以这样来考虑。假设有一个质量为 m 体积为 V 的箱子。在相对箱子静止的参考系中，箱子的密度为 $\rho = \frac{m}{V}$。当箱子运动时，由于箱子在运动方向收缩 Lorentz 因子 $\gamma = \frac{E}{m}$，因此其密度增加 γ 倍。为了保证箱子密度在任何惯性系中都一样，必须除以 γ 因子。考虑到 γ 中 m 是不变量，因此只需除以 E 即可。

例 2： 考虑三个惯性参考系 Σ、Σ' 和 Σ''。如果 Σ' 相对 Σ 以速度 β' 沿 z 方向运动，Σ'' 相对 Σ' 以速度 β'' 沿 z 方向运动，则 Σ'' 相对于 Σ 系沿 z 方向运动的速度 β 为：

$$
\beta = \frac{\beta' + \beta''}{1 + \beta'\beta''} \tag{2.1.34}
$$

这就是狭义相对论的速度相加公式。

2.1.5 实验室系和质心系

在处理粒子反应过程时，常遇到两个惯性参考系，实验室系和质心系。对反应过程微分截面、角分布等的测量在实验室中进行，相应的理论研究通常在质心系中进行。

设一个质量为 m 的粒子，以速度 β 相对于探测器运动。我们在探测器上建立惯性参考系 Σ，探测器固定在 Σ 中，Σ 称为实验室系 (laboratory frame)。在运动粒子上建立惯性参考系 Σ'，使得粒子相对于 Σ' 静止，Σ' 称为粒子的质心系 (center of mass frame) (确切地说是动量中心系)。质心系中的物理量通常用上标 * 或者下标 $_{\mathrm{CM}}$ 标记，我们采用前者。于是在实验室系和质心系中测得粒子的四动量分别为：

$$\begin{aligned} p\ \ &= (E,\mathbf{p}) \\ p^* &= (E^*,\mathbf{p}^*) = (m,0) \end{aligned} \tag{2.1.35}$$

上述关于实验室系和质心系的讨论也适用于一个由 n 个粒子组成的系统。此时实验室系和质心系中的观察者测得粒子系统的四动量分别为：

$$\begin{aligned} p\ \ &= (E,\mathbf{p}) \quad\ = \left(\sum_{j=1}^{n} E_j, \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j\right) \\ p^* &= (E^*,\mathbf{p}^*) = \left(\sum_{j=1}^{n} E_j^*, \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j^*\right) = (M,0) \end{aligned} \tag{2.1.36}$$

其中 M 是粒子系统的不变质量：

$$M = E^* = \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2} \tag{2.1.37}$$

粒子系统相对实验室系的运动可视为一个质量为 M、能量为 E、动量为 $\mathbf{p}$ 的单粒子。

粒子 (或粒子系统) 的质心运动只反映粒子的运动学 (kinematics) 效应，不反映它的动力学 (dynamic) 机制，而实验观测结果既包括粒子的运动学效应也包含动力学结果。为了寻找粒子相互作用的物理实质，在分析中必须设法消除其运动学效应。质心系得到的粒子运动的行为才真正包含了相互作用的动力学机制。

考虑一个粒子 1 轰击固定靶 2 产生两个末态粒子 (或者粒子系统) 3 和 4 的实验，它在实验室系 Σ 和粒子 1、2 质心系 Σ' 中的示意图分别如图 2.2 (a) 和 (b) 所示。我们的目的是分析末态粒子 3 的运动。通常取粒子 1 的入射方向为 z (z') 轴，则可以把粒子 3 的动量 $\mathbf{p}$ ($\mathbf{p}'$) 分解为沿着 z 方向的**纵动量 (longitudinal momentum)** p_L (P_L') 和垂直 z 方向的**横动量 (transverse momentum)** $\mathbf{p}_T$ ($\mathbf{p}_T'$)。纵动量是一维的，横动量二维的。这样粒子 3 的纵动量是粒子系统 1、2 的质心运动造成的，其横动量则全部由相互作用的动力学机制决定。

初态粒子 1、2 的质心系也就是末态粒子 3、4 的质心系 Σ'。如果质心系 Σ' 相对于实验室系 Σ 运动的速度为 β，那么粒子 3 的四动量在两个惯性参考系之间的 Lorentz 变换关系是：

$$\begin{aligned} E' \ &= \gamma(E - \beta p_L) \\ \mathbf{p}_T' &= \mathbf{p}_T \\ p_L' &= \gamma(P_L - \beta E) \end{aligned} \tag{2.1.38}$$

式 (2.1.38) 表明粒子 3 的横动量 $\mathbf{p}_T$ 是 Lorentz 变换下不变的。

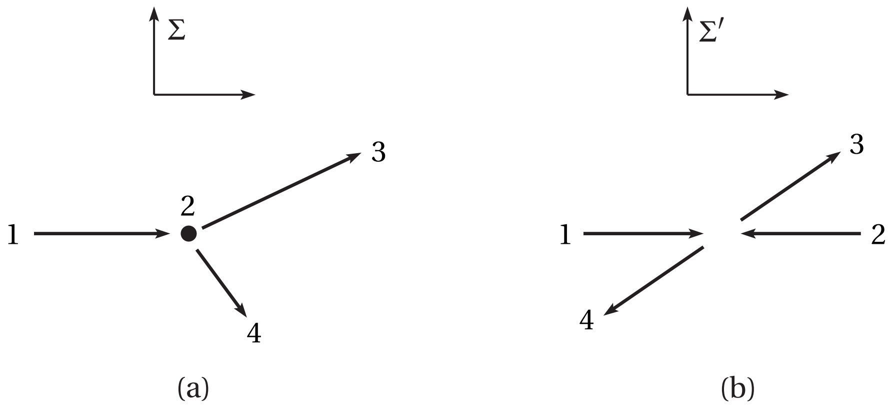


图 2.2: 粒子散射 $1+2\to 3+4$ 的运动学。(a) 实验室系，(b) 质心系。

粒子物理实验研究中，常测量粒子的横能量：

$$E_T \equiv E\sin\theta = \sqrt{\mathbf{p}_T^2 + m^2\sin^2\theta} \tag{2.1.39}$$

式中 θ 是粒子运动方向与 $z\,(z')$ 方向之间的夹角。由于 $\mathbf{p}_T$ 和 m 都是 Lorentz 变换下的不变量，上式表明：横能量随着 $\sin^2\theta$ 的增加而增加，能量则随着 $\sin^2\theta$ 的增加而减少。粒子物理学中还有横质量的概念，其定义为：

$$m_T \equiv \sqrt{m^2 + p_T^2} \tag{2.1.40}$$

2.1.6 快度和赝快度

粒子运动快慢除了可以用速度 u 来描写外，也可以用**快度 (rapidity)** 来描写。快度 y 的定义为：

$$\tanh y \equiv u = \frac{p}{E} \tag{2.1.41}$$

式中 p, E 是粒子的动量和能量。由此得到：

$$\begin{aligned} \sinh y &= \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \\ \cosh y &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \end{aligned} \tag{2.1.42}$$

显然当速度很小时有 $y = u$。根据快度的定义可知 y 与 u 是一一对应的：

$$\begin{array}{cccccc} u: & -1 & \to & 0 & \to & +1 \\ y: & -\infty & \to & 0 & \to & +\infty \end{array} \tag{2.1.43}$$

假设惯性参考系 Σ' 相对 Σ 沿着 z 方向运动，则 Lorentz 变换矩阵 (2.1.30) 式的快度表示为：

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \cosh y & 0 & 0 & -\sinh y \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y & 0 & 0 & \cosh y \end{pmatrix} \tag{2.1.44}$$

四动量的 Lorentz 变换的快度表示为：

$$\begin{aligned} E' &= E\cosh Y - p_z \sinh Y \\ p'_x &= p_x \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= -E\sinh Y + p_z \cosh Y \end{aligned} \tag{2.1.45}$$

相对论公式用快度描写时，有时会变得很简单。例如狭义相对论中的速度相加公式 (2.1.34)，若用快度表示则为：

$$y = y' + y'' \tag{2.1.46}$$

可见快度可以简单地相加，这给计算带来很大方便。上式表明实验室系和质心系的粒子快度分布形状完全一样，只不过分布有一个平移。

粒子物理实验分析中还经常用**赝快度 (pseudorapidity)** 代替快度来描写粒子运动，赝快度 η 的定义是：

$$\eta = -\ln\tan\frac{\theta}{2} \tag{2.1.47}$$

其中 θ 是粒子运动方向相对 z 方向的夹角。赝快度的优点是可以直接测量，它和快度之间关系为：

$$y = \tanh^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{1+m^2/\mathbf{p}^2}}\tanh\eta\right]$$

2.1.7 反应过程中的不变量

考虑一个粒子衰变或两个粒子散射所发生的反应。设初态和末态共涉及 n 个粒子，我们考察由这 n 个粒子的四动量 p_i^μ, $i = 1,2,\cdots,n$，可以组成的 Lorentz 不变量。

由于反应过程中四动量守恒，因此这 n 个四动量中只有 $n-1$ 个是独立的。式 (2.1.10) 表明任意两个四动量的点积可以组成一个 Lorentz 不变量，所以 $n-1$ 个四动量能够构成 $n(n-1)/2$ 个 Lorentz 不变量。但是其中又有 n 个不变量是 n 个粒子的质壳条件。这样还有 $n(n-3)/2$ 个可以变化。由此可见 n 个粒子反应中独立可变的 Lorentz 不变量个数如表 2.1 所示，它们随着 n 的增加而迅速增长。

表 2.1: n 个粒子反应中独立可变的 Lorentz 不变量的数目。

n	4	5	6	7	8	9
衰变过程的末态粒子数	3	4	5	6	7	8
反应过程的末态粒子数	2	3	4	5	6	7
独立的 Lorentz 不变量数目	2	5	9	14	20	27

例如，对于 $1+2\to 3+4$ 反应过程，共有四个粒子，因此独立可变的 Lorentz 不变量的个数为两个。一般定义三个 Lorentz 不变量：

$$s \equiv (p_1+p_2)^2 = (p_3+p_4)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1\cdot p_2 \tag{2.1.48}$$

$$t \equiv (p_1-p_3)^2 = (p_4-p_2)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2p_1\cdot p_3 \tag{2.1.49}$$

$$u \equiv (p_1-p_4)^2 = (p_3-p_2)^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2p_1\cdot p_4 \tag{2.1.50}$$

这三个 Lorentz 不变量称为 **Mandelstam 变量**。其中 s 的物理意义是质心系总能量的平方，t 和 u 的物理意义是四动量转移的平方。根据不变量 s 和 t 的定义，第 1.5.2 节中类空的散射过程又称为 **t-道 (t-channel)**，类时的湮灭过程则称为 **s-道 (s-channel)**。由于 Mandelstam 变量是 Lorentz 不变量，因此用它们表示的散射过程的跃迁矩阵元具有明显的 Lorentz 不变性，适用于任意惯性参考系。

容易证明三个 Mandelstam 变量满足如下关系：

$$s+t+u=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2 \tag{2.1.51}$$

事实上只要把 (2.1.48)、(2.1.49)、(2.1.50) 式相加即可证明上式：

$$\begin{aligned}
s+t+u &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+2(m_1^2+p_1\cdot p_2-p_1\cdot p_3-p_1\cdot p_4) \\
&= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+2\big(m_1^2+p_1\cdot(p_2-p_3-p_4)\big) \\
&= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+2(m_1^2-p_1\cdot p_1) \\
&= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+2(m_1^2-m_1^2)
\end{aligned}$$

虽然 s,t,u 中只有两个独立，但是实际使用中都会用到这三个变量。另外对于极端相对论情形，即极高能量的反应过程，粒子质量可以忽略，此时有 $s+t+u\approx 0$。

2.2 衰变率和散射截面

粒子物理学中主要处理两类反应过程 — 粒子的衰变和散射。这两类过程的跃迁速率分别称为衰变率和散射截面，它们都是实验可观测的物理量。根据不同的实验目的和手段，我们可以对反应末态作不同程度的限制。例如实验可以明确指明末态粒子方向、极化，可以指定某个粒子在某个方向的一个立体角内等。如果实验测量的是总跃迁速率，都必须对没有观测的变量积分。

2.2.1 跃迁速率

当三种相互作用耦合常数相关的无量纲常数 α、α_w、α_s 很小时，跃迁速率可以用微扰论计算。这种计算的出发点是描述初态 $|i\rangle$ 跃迁到末态 $|f\rangle$ 的 Fermi 的黄金规则。设系统的哈密顿量 $\hat{H}$ 可以分为两部分：

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$$

其中 $\hat{H}'$ 是微扰，$\hat{H}_0$ 是未受微扰作用时系统的哈密顿量。在粒子的衰变或散射过程中，微扰可以视为有限时间内的常微扰。在此微扰作用下，系统由能量为 E_i 的初态 $|i\rangle$ 跃迁到能量为 $E_f = E_i$ 的末态 $|f\rangle$ 的跃迁速率，即单位时间内的跃迁概率，由 Fermi 的黄金规则求得：

$$\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_f) \tag{2.2.1}$$

其中 E_f 是末态能量，T_{ji} 是跃迁矩阵元 (已在第 1.5 节中作了初步讨论)，$\rho(E_f)$ 是末态态密度，即能量为 $E_f \to E_f + \mathrm{d}E_f$ 范围内的末态数目 $\mathrm{d}n$：

$$\rho(E_f) = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E_f}$$

对所有允许的终态能量积分，并考虑跃迁过程中能量守恒，有：

$$\rho(E_f) = \int \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E_f} \delta(E - E_i) \mathrm{d}E$$

式中 δ 函数反映系统能量守恒，表示只有当初态和末态能量相等的情况下才有可观的跃迁发生。把上式代入 (2.2.1) 式，跃迁速率变为：

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \mathrm{d}n \tag{2.2.2}$$

如果入射和出射粒子能量都比较高，那么在远离相互作用区域它们可以认为是自由粒子，用能量为 E、动量为 $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ 的平面波表示：

$$\psi(\mathbf{r}, t) = N e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)}$$

对波函数实施箱归一化。设动量空间中立方体箱的边长为 L，则归一化的波函数为：

$$\psi = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)}$$

相应的动量必须是 $\frac{2\pi}{L}$ 的整数倍：

$$p_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \qquad p_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \qquad p_z = \frac{2\pi}{L} n_z$$

每一组 $\{n_x, n_y, n_z\}$ 的值代表一个态。于是动量空间中 $\mathbf{p} \to \mathbf{p} + \mathrm{d}\mathbf{p}$ 内粒子的状态数目为：

$$\mathrm{d}n = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3}$$

但是箱体积总可以在计算中消去，故令其为 $L^3 = 1$，则：

$$\mathrm{d}n = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \tag{2.2.3}$$

注意，此时波函数的归一化条件是单位体积内有一个粒子：

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \tag{2.2.4}$$

1. 考虑如下 n 体衰变过程，即初态粒子 a 衰变到 n 个末态粒子的过程：

$$a \;\to\; 1 \;+\; 2 \;+\; \cdots \;+\; n$$

把 (2.2.3) 式代入 (2.2.2) 式，跃迁速率为：

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta\Big(E_i - \sum_{j=1}^{n} E_j\Big) \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{n-1}}{(2\pi)^3}$$

其中 $E_j = \sqrt{\mathbf{p}_j^2 + m_j^2}$ 是末态第 j 个粒子的能量。上式中没有对 $\mathrm{d}\mathbf{p}_n$ 积分，这是因为 $\mathbf{p}_n$ 完全由初态粒子动量 $\mathbf{p}_a$ 和其他 $n-1$ 个末态粒子的动量确定：

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \cdots - \mathbf{p}_n$$

可以引入一个三维 δ 函数，把该动量约束条件包含在跃迁速率中：

$$\Gamma_{fi} = (2\pi)^4 \int |T_{fi}|^2 \delta\Big(E_i - \sum_{j=1}^{n} E_j\Big) \delta^{(3)}\Big(\mathbf{p}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_j\Big) \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{n-1}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3}$$

此时式中包含对 $\mathrm{d}\mathbf{p}_n$ 的积分。进一步把两个 δ 函数用一个四维 δ 函数表示：

$$\Gamma_{fi} = (2\pi)^4 \int |T_{fi}|^2 \delta^{(4)}\Big(p_i - \sum_{j=1}^{n} p_j\Big) \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3}$$

我们尽量把跃迁速率 Γ_{fi} 写成与惯性参考系无关的形式，即尽量把跃迁速率表达式中的各成分写成相对论不变的形式。第 2.1.4 节中已证明 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{E}$ 是一个 Lorentz 不变量，我们把式中的动量体积元写成 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_j}{2E_j}$ 以保证该部分是 Lorentz 不变的，这里因子 2 是个惯例。这相当于把 (2.2.4) 式中的波函数 ψ 重新归一化到单位体积内有 $2E$ 个粒子：

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = 2E \tag{2.2.5}$$

重新归一化的波函数为：

$$|\psi'\rangle = (2E)^{\frac{1}{2}}|\psi\rangle$$

定义 Lorentz 不变的跃迁矩阵元 $\mathscr{M}_{fi}$：

$$\mathscr{M}_{fi} \equiv \langle\psi_1'\psi_2'\cdots\psi_n'|\hat{H}'|\psi_a'\rangle = (2E_a)^{\frac{1}{2}}(2E_1)^{\frac{1}{2}}\cdots(2E_n)^{\frac{1}{2}}T_{fi}$$

于是 n 体衰变过程的跃迁速率为：

$$\boxed{\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2E_a}\int|\mathscr{M}_{fi}|^2 \underbrace{\delta^{(4)}\Big(p_i - \sum_{j=1}^{n} p_j\Big)\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1}\cdots\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n}}_{\mathrm{d}\Phi}} \tag{2.2.6}$$

上式表示的衰变过程的跃迁速率依赖于惯性系的选择，这可以由积分号外的因子 $\frac{1}{2E_a}$ 看出。事实上 Γ_{fi} 反比于衰变粒子 a 的能量 E_a，它明显与参考系有关。不过现在积分号内的每一项都是Lorentz 不变的。

2. 类似地可以讨论初态粒子 a 和 b 散射到 n 个末态粒子的 n 体散射过程：

$$a \ + \ b \ \to \ 1 \ + \ 2 \ + \ \cdots \ + \ n$$

定义 Lorentz 不变的跃迁矩阵元 $\mathscr{M}_{fi}$：

$$\mathscr{M}_{fi} \equiv \langle\psi_1'\psi_2'\cdots\psi_n'|\hat{H}'|\psi_a'\psi_b'\rangle = (2E_a)^{\frac{1}{2}}(2E_b)^{\frac{1}{2}}(2E_1)^{\frac{1}{2}}\cdots(2E_n)^{\frac{1}{2}}T_{fi}$$

则 n 体散射过程的跃迁速率为：

$$\boxed{\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2E_a 2E_b}\int|\mathscr{M}_{fi}|^2 \underbrace{\delta^{(4)}\Big(p_a + p_b - \sum_{j=1}^{n} p_j\Big)\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1}\cdots\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n}}_{\mathrm{d}\Phi}} \tag{2.2.7}$$

因子 $\frac{1}{E_a E_b}$ 表明散射过程的跃迁速率也不是Lorentz 不变的。

考虑一个特殊情形。如果两个初态粒子 — 入射粒子和靶粒子都是非极化的，即它们的自旋取向是杂乱的，而且实验也不测量末态粒子的极化，那么在计算散射过程的跃迁速率时，必须对末态自旋态求和，对初态自旋态求平均，即上式中 $|\mathscr{M}_{fi}|^2$ 用下面的因子替代：

$$\overline{\sum_i}\sum_f|\mathscr{M}_{fi}|^2$$

所谓对初态自旋态求平均，也就是对初态自旋态求和再除以初态自旋态的数目。设两个散射粒子的自旋分别是 s_a 和 s_b，则自旋态数目分别是 $2s_a+1$ 和 $2s_b+1$，于是上面的因子变为：

$$\boxed{\frac{1}{(2s_a+1)(2s_b+1)}\sum_i\sum_f|\mathscr{M}_{fi}|^2} \tag{2.2.8}$$

2.2.2 不变相空间

式 (2.2.6)、(2.2.7) 中的 $\mathrm{d}\Phi$ 称为 **Lorentz 不变相空间 (Lorentz invariant phase space)** 体积元。因为该体积元是定义在动量空间中的，所以称之为相空间体积元，而 Lorentz 不变表现在因子 $\frac{1}{2E}$ 中。式 (2.2.6)、(2.2.7) 表明，无论是衰变过程还是散射过程，跃迁概率的计算主要表现为对 Lorentz 不变相空间体积元的积分。

如果反应末态有 n 个粒子，那么这 n 个末态粒子的自由度为 $4n$ 个自由度。考虑到每个末态粒子都是可观测粒子，即满足质壳条件，这样有 n 个约束条件，同时反应本身满足总能量和总动量守恒四个约束条件，因此 n 个末态粒子的自由度为：

$$4n-n-4=3n-4$$

于是 n 体末态不变相空间积分是 $3n-4$ 重的。

一般情况下对不变相空间体积元进行积分的计算是相当复杂的。如果所有末态粒子的质量均为零，记 n 体末态不变相空间积分为 Φ_n，则有：

$$\Phi_2=\frac{1}{4(2\pi)^5}$$
$$\Phi_3=\frac{s}{32(2\pi)^7}$$

对于一般的 n，可以导出递推关系：

$$\frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n}=\frac{s}{16\pi^2 n(n-1)} \tag{2.2.9}$$

注意 Φ_n 的量纲随 n 的不同而不同。为了便于比较，定义无量纲化的 n 体末态不变相空间积分为：

$$\Phi'_n=\frac{\Phi_n}{s^{n-2}}$$

这样，当末态粒子的质量为零时，无量纲化的三体不变相空间约为无量纲化的两体不变相空间的 $\frac{1}{315.8}$。一般说来，末态粒子增加一个，相应地无量纲化的相空间减少两个数量级。因此在粒子的多体衰变或散射过程中，产生的粒子越多，概率越小。

2.2.3 两体衰变过程 $i\to 1+2$

对于末态有两个粒子的两体衰变过程 $i\to 1+2$，衰变率 (2.2.6) 式变为：

$$\Gamma_{fi}=\frac{(2\pi)^4}{2E_i}\int|\mathscr{M}_{fi}|^2\mathrm{d}\Phi_2 \tag{2.2.10}$$

其中 $\mathrm{d}\Phi_2$ 是两体衰变的 Lorentz 不变相空间体积元：

$$\mathrm{d}\Phi_2=\delta(E_i-E_1-E_2)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}$$

衰变率 (2.2.10) 式的计算涉及对 $\mathrm{d}\Phi_2$ 的积分，由于 $\mathrm{d}\Phi_2$ 是 Lorentz 不变的，因此可以在任何一个参考系中求解。在衰变粒子 i 的质心系中：

$$\begin{array}{ccccc} i & \to & 1 & + & 2 \\ (m_i,\mathbf{0}) & & (E_1^*,\mathbf{p}_1^*) & & (E_2^*,\mathbf{p}_2^*) \end{array}$$

于是 $d\Phi_2$ 为：

$$d\Phi_2 = \frac{1}{4(2\pi)^6}\delta(m_i - E_1^* - E_2^*)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^*)\frac{d\mathbf{p}_1^*}{E_1^*}\frac{d\mathbf{p}_2^*}{E_2^*} \tag{2.2.11}$$

式中 δ 函数表明：

$$\mathbf{p}_1^* = -\mathbf{p}_2^* = \mathbf{p}^*$$

对 $d\Phi_2$ 中的 $d\mathbf{p}_2$ 积分，得到：

$$d\Phi_2 = \frac{1}{4(2\pi)^6}\delta(m_i - E_1^* - E_2^*)\frac{d\mathbf{p}_1^*}{E_1^* E_2^*}$$

其中 E_2^* 和动量元 $d\mathbf{p}_1^*$ 可写为：

$$\begin{aligned} E_2^* &= \sqrt{p_2^{*2} + m_2^2} = \sqrt{p_1^{*2} + m_2^2} \\ d\mathbf{p}_1^* &= p_1^{*2} dp_1^* d\Omega^* \end{aligned}$$

代入 $d\Phi_2$ 表达式，得到：

$$d\Phi_2 = \frac{1}{4(2\pi)^6} g(p_1^*)\delta(f(p_1^*))dp_1^* d\Omega^* \tag{2.2.12}$$

式中：

$$g(p_1^*) = \frac{p_1^{*2}}{E_1^* E_2^*} \tag{2.2.13}$$

$$f(p_1^*) = m_i - E_1^* - E_2^* = m_i - \sqrt{p_1^{*2} + m_1^2} - \sqrt{p_1^{*2} + m_2^2} \tag{2.2.14}$$

注意 (2.2.12) 式中的 $\delta(f(p_1^*))$ 函数说明衰变过程能量守恒，它要求：

$$f(p_1^*) = m_i - E_1^* - E_2^* = m_i - \sqrt{p_1^{*2} + m_1^2} - \sqrt{p_1^{*2} + m_2^2} = 0 \tag{2.2.15}$$

现在我们对式 (2.2.12) 中的 dp_1^* 的积分。需要利用 δ 函数的普遍性质：

$$\int g(p_1^*)\delta(f(p_1^*))dp_1^* = \left[\frac{g(p_1^*)}{|df/dp_1^*|}\right]_{f(p_1^*)=0}$$

为此对 (2.2.14) 式求导：

$$\frac{df}{dp_1^*} = -\frac{p_1^*}{\sqrt{p_1^{*2} + m_1^2}} - \frac{p_1^*}{\sqrt{p_1^{*2} + m_2^2}} = -\frac{p_1^*}{E_1^*} - \frac{p_1^*}{E_2^*} = -\frac{p_1(E_1^* + E_2^*)}{E_1^* E_2^*}$$

于是 $d\Phi_2$ 变为：

$$d\Phi_2 = \frac{1}{4(2\pi)^6}\left[\frac{p_1^{*2}}{E_1^* E_2^*}\frac{E_1^* E_2^*}{p_1^*(E_1^* + E_2^*)}\right]_{p_1^* = p^*} d\Omega^*$$

利用 (2.2.15) 式，得到两体衰变的不变相空间体积元为：

$$d\Phi_2 = \frac{1}{4(2\pi)^6}\frac{p^*}{m_i}d\Omega^* \tag{2.2.16}$$

把上式代入 (2.2.10)，得到质心系中两体衰变的衰变率：

$$\boxed{\Gamma^*_{fi} = \frac{p^*}{32\pi^2 m_i^2}\int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \mathrm{d}\Omega^*} \tag{2.2.17}$$

其中单位立体角为 $\mathrm{d}\Omega^* = \mathrm{d}\cos\theta^*\mathrm{d}\phi^*$，$p^*$ 的具体表达式可以由 (2.2.15) 式求得：

$$p^* = \frac{1}{2m_i}\sqrt{\left[m_i^2-(m_1+m_2)^2\right]\left[m_i^2-(m_1-m_2)^2\right]} \tag{2.2.18}$$

无自旋粒子的衰变是各向同性的，$\mathcal{M}_{fi}$ 与 θ^*,ϕ^* 无关，利用 $\int \mathrm{d}\Omega^* = 4\pi$，得：

$$\boxed{\Gamma^*_{fi} = \frac{p^*}{8\pi m_i^2}|\mathcal{M}_{fi}|^2} \tag{2.2.19}$$

根据 (2.2.17) 式立即可以写出微分形式的衰变率：

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma^*_{fi}}{\mathrm{d}\Omega^*} = \frac{p^*}{32\pi^2 m_i^2}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{2.2.20}$$

通常一个粒子 i 衰变时往往有许多种方式，例如 K^+ 介子可以衰变成：

$$\begin{aligned}
K^+ \rightarrow\ & \mu^+ + \nu_\mu \\
& \pi^+ + \pi^0 \\
& \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \\
& \pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu \\
& \cdots
\end{aligned}$$

这些衰变子过程称为衰变道 (decay channel) 或衰变模式 (decay mode)。每个衰变道 k 都有相应的分支衰变率：

$$\Gamma^k_{fi} = 2\pi|T^k_{fi}|^2\rho(E_f)$$

粒子的总衰变率是各分支衰变率之和：

$$\Gamma^{\text{total}}_{fi} = \sum_k \Gamma^k_{fi}$$

总衰变率决定了粒子的平均寿命：

$$\tau = \frac{1}{\Gamma^{\text{total}}_{fi}}$$

定义粒子衰变的总宽度 (total width) 为：

$$\Gamma = \hbar\Gamma^{\text{total}}_{fi} = \frac{\hbar}{\tau} \tag{2.2.21}$$

粒子衰变的分宽度 (partial width) 则为：

$$\Gamma_k = \hbar\Gamma^k_{fi}$$

显然

$$\Gamma = \sum_k \Gamma_k$$

在自然单位制中 $\hbar=1$，因此粒子的衰变宽度等于衰变率，今后将不再区分。粒子某个衰变道的分支衰变率与其总衰变率的比值，反应了该衰变道的衰变概率在总衰变概率中的比例，称为衰变道的**分支比 (branching fraction, branching ratio)**：

$$f_k \equiv \frac{\Gamma_k}{\Gamma}$$

注意 (2.2.21) 式表明衰变率或衰变宽度 Γ 具有能量的量纲。

2.2.4 散射截面

散射过程的跃迁速率 (2.2.7) 式也不是 Lorentz 不变的。不过对于散射过程，我们可以构造出一个 Lorentz 不变的物理量，这就是散射**截面 (cross section)**，其定义如下：

$$\sigma = \frac{\text{单位时间内每个靶粒子发生的相互作用数目}}{\text{入射流量}} \tag{2.2.22}$$

其中 **入射流量 (incident flux)** 指的是单位时间内通过单位面积的入射粒子数目。由上式定义的散射截面与实验的特定条件，例如入射粒子束流强度、靶的大小等无关，具有普遍的意义。截面的物理意义是相对概率，不过具有面积的量纲，可以解释为靶粒子呈现出的有效面积。

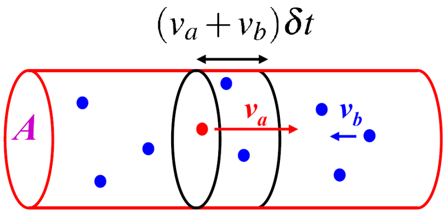
例如：设靶的密度为 n_b，即单位体积的靶物质中含有 n_b 个 b 粒子。如果一个速度为 v_a 的 a 粒子横穿过靶的面积为 A。那么在时间 δt 内，a 粒子所穿过的体积为 $A(v_a+v_b)\delta t$，该体积中包含的 b 粒子的数目是

$$n_b A(v_a+v_b)\delta t$$

发生相互作用的概率则为：

$$\frac{n_b A(v_a+v_b)\delta t\sigma}{A} = n_b v\delta t\sigma \tag{2.2.23}$$

其中 $v=v_a+v_b$ (注意这说明 a 和 b 正面对撞。一般的表达式为 $v=|\mathbf{v}|=|\mathbf{v}_a-\mathbf{v}_b|$)。



由 (2.2.23) 式得到单位时间内每个 a 粒子发生相互作用的概率，即速率为 $n_b v\sigma$。如果入射的是粒子束团，其密度为 n_a，体积为 V，则总的反应率为：

$$(n_b v\sigma)\cdot(n_a V) = (n_a v)\cdot(n_b V)\sigma = \phi_a N_b \sigma$$

上式表明：

$$\text{反应率} = \text{入射粒子流量} \times \text{靶粒子数} \times \sigma \tag{2.2.24}$$

这正是 (2.2.22) 式散射截面的定义。

考虑两体散射过程：$a+b\to 1+2+\cdots+n$。根据 (2.2.24) 式，此时单位体积内的反应率为：

$$\text{入射粒子 } a \text{ 的流量} \times \text{靶粒子 } b \text{ 的密数} \times \sigma = n_a(v_a+v_b)\times n_b\times\sigma$$

单位体积内一个入射粒子和一个靶粒子，即两体散射过程的反应率为：

$$\Gamma=(v_a+v_b)\sigma$$

于是：

$$\boxed{\sigma\equiv\frac{\Gamma}{v_a+v_b}} \tag{2.2.25}$$

这可以认为是散射过程的截面定义。式中 v_a 和 v_b 是粒子 a 和 b 的速度：

$$v_a=|\mathbf{v}_a|=\frac{|\mathbf{p}_a|}{E_a}$$
$$v_b=|\mathbf{v}_b|=\frac{|\mathbf{p}_b|}{E_b}$$

把 (2.2.7) 式代入 (2.2.25) 式，得到散射截面：

$$\boxed{\sigma=\frac{(2\pi)^4}{F}\int|\mathscr{M}_{fi}|^2\delta^{(4)}\Big(p_a+p_b-\sum_{j=1}^{n}p_j\Big)\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1}\cdots\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n}} \tag{2.2.26}$$

式中流量 F 定义如下：

$$F\equiv(v_a+v_b)\cdot 2E_a\cdot 2E_b \tag{2.2.27}$$

可以证明 F 具有 Lorentz 不变的形式，因此截面 (2.2.26) 式也是 Lorentz 不变的。

下面给出流量 F 在实验室系和质心系中的明确表达式。

❍ 实验室系情形。设 a 代表沿 z 方向入射的粒子，b 代表靶粒子，则：

$$p_a=(E_a,\mathbf{p}_a)=(E_a,0,0,p_a)$$
$$p_b=(m_b,\mathbf{0})$$

根据 F 的定义式 (2.2.27)，有：

$$F=v_a\cdot 2E_a\cdot 2m_b=\frac{p_a}{E_a}\cdot 4E_a m_b=4p_a m_b \tag{2.2.28}$$

❍ 质心系情形。设粒子 a 和 b 沿着 z 轴运动，则它们的四动量为：

$$p_a=(E_a^*,0,0,p_i^*)$$
$$p_b=(E_b^*,0,0,-p_i^*)$$

于是 Lorentz 不变流量 F 为：

$$F=(v_a^*+v_b^*)\cdot 2E_a^*\cdot 2E_b^*=\left(\frac{p_i^*}{E_a^*}+\frac{p_i^*}{E_b^*}\right)4E_a^*E_b^*=4p_i^*(E_a^*+E_b^*)=4p_i^*\sqrt{s} \tag{2.2.29}$$

式中 $\sqrt{s}=E_a^*+E_b^*$ 是质心系中粒子的总能量。

❍ 因为 F 是 Lorentz 不变量，所以 (2.2.29) 式和 (2.2.28) 式给出的 F 值相等，即：

$$\boxed{F=4p_a m_b=4p_i^*\sqrt{s}}$$

上式还给出了入射粒子 a 在实验室系中的动量 p_a 和质心系中动量 p_i^* 间的关系。

2.2.5 两体散射过程 $1+2\to 3+4$

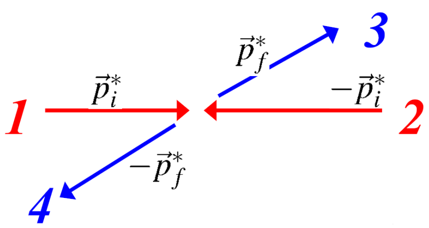
对于末态有两个粒子的两体散射过程 $1+2\to 3+4$，散射截面 (2.2.26) 式变为：

$$\sigma=\frac{(2\pi)^4}{F}\int|\mathcal{M}_{fi}|^2\mathrm{d}\Phi_2 \tag{2.2.30}$$

其中 $\mathrm{d}\Phi_2$ 是两体散射的 Lorentz 不变相空间体积元：

$$\mathrm{d}\Phi_2=\delta(E_1+E_2-E_3-E_4)\delta^{(3)}\Big(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4\Big)\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \tag{2.2.31}$$

我们在质心系和实验室系中分别计算两体衰变的不变相空间体积元 $\mathrm{d}\Phi_2$。



粒子物理实验中有一类是正粒子和反粒子的对撞，例如电子 e^- 和正电子 e^+ 的对撞。此时正负电子通常具有相等大小、相反方向的动量，实验室系也就是质心系。在质心系中，粒子的动量之间和能量之间有如下关系：

$$\mathbf{p}_1^*+\mathbf{p}_2^*=\mathbf{p}_3^*+\mathbf{p}_4^*=0$$
$$E_1^*+E_2^*=E_3^*+E_4^*=\sqrt{s}$$

于是 $\mathrm{d}\Phi_2$ 变为：

$$\mathrm{d}\Phi_2=\frac{1}{4(2\pi)^6}\delta(\sqrt{s}-E_1^*-E_2^*\Big)\delta^{(3)}\Big(\mathbf{p}_1^*+\mathbf{p}_2^*\Big)\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1^*}{E_1^*}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_2^*}{E_2^*}$$

与式 (2.2.11) 比较，两者具有完全相同的形式，所以根据 (2.2.16) 式立即可得：

$$\mathrm{d}\Phi_2=\frac{1}{4(2\pi)^6}\frac{p_f^*}{\sqrt{s}}\mathrm{d}\Omega^*$$

式中 $\mathrm{d}\Omega^*$ 是末态粒子 3 所张的立体角元，$p_f^*=|\mathbf{p}_3^*|=|\mathbf{p}_4^*|$ 是任意一个末态粒子的动量。代入 (2.2.30) 式，得到粒子 3 散射到 $\mathrm{d}\Omega^*$ 立体角元的微分散射截面为：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega^*}=\frac{1}{16\pi^2\sqrt{s}}\frac{p_f^*}{F}|\mathcal{M}_{fi}|^2$$

根据 (2.2.29) 式有 $F=4p_i^*\sqrt{s}$，而 $p_i^*=|\mathbf{p}_1^*|=|\mathbf{p}_2^*|$ 是任意一个初态粒子的动量。代入上式得到质心系中的微分散射截面：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega^*}=\frac{1}{64\pi^2 s}\frac{p_f^*}{p_i^*}|\mathcal{M}_{fi}|^2} \tag{2.2.32}$$

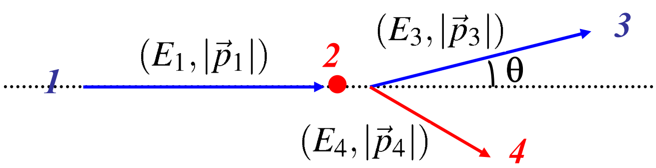
其中 p_i^* 和 p_f^* 的具体形式可以参考 (2.2.18) 式并以 $\sqrt{s}$ 替代 m_i 得到：

$$p_i^* = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{\left[s-(m_1+m_2)^2\right]\left[s-(m_1-m_2)^2\right]}$$
$$p_f^* = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{\left[s-(m_3+m_4)^2\right]\left[s-(m_3-m_4)^2\right]}$$

对于弹性散射 (例如 $m_1=m_3$, $m_2=m_4$)，或者极端相对论情形 ($\sqrt{s}$ 远远大于粒子质量)，由上式可知 $p_i^*=p_f^*$，于是式 (2.2.32) 变为：

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{1}{64\pi^2 s}|\mathcal{M}_{fi}|^2} \tag{2.2.33}$$

上式可以用来计算 $e^-+e^+\to\mu^-+\mu^+$ 这样的散射过程的截面。我们将在第　节中再就此予以详细讨论。



高能物理中还有一类利用高能粒子轰击靶粒子的实验，例如二十世纪六十年代在 SLAC 进行的电子质子散射实验。此时质子靶静止在实验室中，因此需要计算实验室系中的散射截面。在实验室中：

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & \to & 3 & + & 4 \\ (E_1,\mathbf{p}_1) & & (m_2,\mathbf{0}) & & (E_3,\mathbf{p}_3) & & (E_4,\mathbf{p}_4) \end{array}$$

于是 $d\Phi_2$ 变为：

$$d\Phi_2 = \frac{1}{4(2\pi)^6}\delta(E_1+m_2-E_3-E_4)\delta^{(3)}\left(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4\right)\frac{d\mathbf{p}_3}{E_3}\frac{d\mathbf{p}_4}{E_4}$$

上式对 $d\mathbf{p}_4$ 积分，得：

$$d\Phi_2 = \frac{1}{4(2\pi)^6}\delta(E_1+m_2-E_3-E_4)\frac{d\mathbf{p}_3}{E_3E_4}$$

把动量元 $d\mathbf{p}_3 = p_3^2 dp_3 d\Omega$ 代入：

$$d\Phi_2 = \frac{1}{4(2\pi)^6}g(p_3)\delta(f(p_3))dp_3 d\Omega \tag{2.2.34}$$

式中：

$$g(p_3) = \frac{p_3^2}{E_3E_4}$$
$$f(p_3) = E_1+m_2-E_3-E_4 = E_1+m_2-\sqrt{p_3^2+m_3^2}-\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)^2+m_4^2}$$

注意式 (2.2.34) 中的 $\delta(f(p_3))$ 函数说明散射过程中能量守恒，它要求：

$$
\begin{aligned}
f(p_3) &= E_1 + m_2 - E_3 - E_4 \\
&= E_1 + m_2 - \sqrt{p_3^2 + m_3^2} - \sqrt{p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos\theta + m_4^2} = 0
\end{aligned} \tag{2.2.35}
$$

式中 θ 是 $\mathbf{p}_3$ 和 $\mathbf{p}_1$ (即入射粒子束流方向) 之间的夹角。与第 2.2.3 节中类似，我们需要对 (2.2.34) 式中的 $\mathrm{d}p_3$ 积分。利用 δ 函数性质：

$$
\int g(p_3)\delta(f(p_3))\mathrm{d}p_3 = \left[\frac{g(p_3)}{\left|\mathrm{d}f/\mathrm{d}p_3\right|}\right]_{f(p_3)=0}
$$

其中导数：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p_3} &= -\frac{p_3}{\sqrt{p_3^2+m_3^2}} - \frac{p_3 - p_1\cos\theta}{\sqrt{p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3\cos\theta + m_4^2}} = -\frac{p_3}{E_3} - \frac{p_3 - p_1\cos\theta}{E_4} \\
&= -\frac{p_3 E_4 + E_3 p_3 - E_3 p_1 \cos\theta}{E_3 E_4}
\end{aligned}
$$

于是 $\mathrm{d}\Phi_2$ 变为：

$$
\mathrm{d}\Phi_2 = \frac{1}{4(2\pi)^6}\left[\frac{p_3^2}{E_3 E_4}\frac{E_3 E_4}{p_3 E_4 + E_3 p_3 - E_3 p_1\cos\theta}\right]_{f(p_3)=0}\mathrm{d}\Omega
$$

整理后得到：

$$
\mathrm{d}\Phi_2 = \frac{1}{4(2\pi)^6}\frac{p_3^2}{p_3(E_3+E_4) - E_3 p_1\cos\theta}\mathrm{d}\Omega
$$

把上式代入 (2.2.30)，并利用 (2.2.28)、(2.2.35) 式，得到实验室系中的微分散射截面：

$$
\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{p_1 m_2}\frac{p_3^2}{p_3(E_1+m_2) - E_3 p_1\cos\theta}|\mathcal{M}_{fi}|^2} \tag{2.2.36}
$$

注意式中的变量并不是独立的，一旦散射角 θ 给定，p_3 由 (2.2.35) 式确定，E_3 则由质壳关系得到。

如果入射粒子能量很大，那么粒子的质量可以忽略，于是 $p_1 = E_1$，$p_3 = E_3$。则粒子四动量为：

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (E_1, 0, 0, E_1) \\
p_2 &= (m_2, \mathbf{0}) \\
p_3 &= (E_3, E_3\sin\theta, 0, E_3\cos\theta) \\
p_4 &= (E_4, \mathbf{p}_4)
\end{aligned}
$$

式 (2.2.36) 变为：

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{E_1 m_2}\frac{E_3}{E_1 + m_2 - E_1\cos\theta}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{2.2.37}
$$

利用 Mandelstam 变量：

$$
t = (p_1 - p_3)^2 = -2p_1\cdot p_3 = -2E_1E_3(1-\cos\theta) \tag{2.2.38}
$$

不变量 t 也可以表达为：

$$t = (p_2 - p_4)^2 = 2m_2^2 - 2p_2 \cdot p_4 = 2m_2^2 - 2m_2 E_4$$

把 $E_4 = E_1 + m_2 - E_3$ 代入上式，得到：

$$t = 2m_2^2 - 2m_2(E_1 + m_2 - E_3) = -2m_2(E_1 - E_3) \tag{2.2.39}$$

联立 (2.2.38) 和 (2.2.39) 式，把 E_3 表示为 θ 的函数：

$$E_3 = \frac{E_1 m_2}{E_1 + m_2 - E_1 \cos\theta}$$

代入 (2.2.37) 式，得到实验室系中入射粒子能量极高时的微分散射截面：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{64\pi^2}\left(\frac{E_3}{E_1 m_2}\right)^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2} \tag{2.2.40}$$

2.2.6　Dalitz 图

第 2.2.3、2.2.5 节中计算了末态有两个粒子的相空间。不少衰变或散射过程中末态可能出现三个粒子，现在考虑这种情形。为简单计，我们讨论质量为 M 的粒子 a 的三体衰变过程 [1]：

$$\begin{array}{ccccccc} a & \to & 1 & + & 2 & + & 3 \\ (M, \mathbf{0}) & & (E_1, \mathbf{p}_1) & & (E_2, \mathbf{p}_2) & & (E_3, \mathbf{p}_3) \end{array}$$

设末态粒子的质量为 m_1, m_2, m_3。根据表 2.1 可知这时有两个独立变量，它们的选取有许多等价的方式。例如可以选取能量 E_1, E_2，或者动能 T_1, T_2，或者粒子对的质量平方 m_{13}^2, m_{23}^2 等 (注意：粒子 1、2、3 是任意指定的)。这些选取的变量通过线性关系联系，例如：

$$m_{23}^2 = (E_2 + E_3)^2 - (\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)^2 = (M - E_1)^2 - \mathbf{p}_1^2 = M^2 + m_1^2 - 2ME_1 \tag{2.2.41}$$

一旦选定两个独立变量，这三个末态粒子系统的运动学可以在一个平面上表示出来。例如，如果选取两个独立变量为 m_{12}^2 和 m_{13}^2，则这个平面如图 2.3 所示。图中 m_{23}^2 为常数的轨迹是一些直线，凡是满足能动量守恒的事件均落在在图中轮廓线包围的区域内，这个区域称为 **Dalitz 图 (Dalitz plot)**，根据 R.H. Dalitz 得名。

1956 年 Dalitz 指出：Dalitz 图中的面积与相空间成正比。下面我们证明这个结论。在衰变粒子 a 的质心系中，该三体系统的不变相空间体积元为：

$$\mathrm{d}\Phi_3 = \frac{1}{8(2\pi)^9}\delta(M - E_1 - E_2 - E_3)\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{E_1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_2}{E_2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_3}{E_3} \tag{2.2.42}$$

把上式对 $\mathbf{p}_3$ 积分，得到：

$$\mathrm{d}\Phi_3 = \frac{1}{8(2\pi)^9}\delta(M - E_1 - E_2 - E_3)\frac{1}{E_1 E_2 E_3}\mathrm{d}\mathbf{p}_1\mathrm{d}\mathbf{p}_2$$

[1] 如果三个末态粒子通过散射过程而来，则与衰变而来的情形相比多出三个独立变量。不过多出来的三个变量将用于定义 Dalitz 平面和图形本身在平面内的位置。所以我们讨论的问题与三个末态粒子是衰变而来还是散射而来没有什么关系。

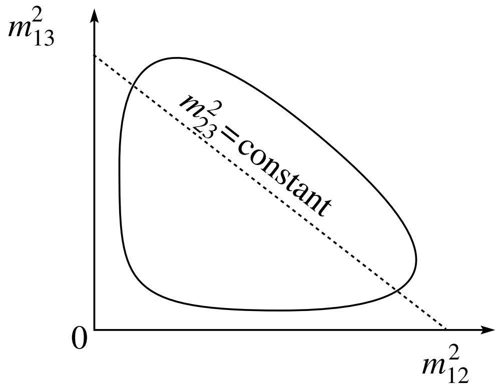


图 2.3: Dalitz 图。

系统满足：

$$-\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \tag{2.2.43}$$

再对相空间体积元 $d\Phi_3$ 中的 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 积分，这就需要对 $\theta_1,\phi_1,\theta_2,\phi_2$ 积分。事实上实验中比较方便的选取是 $\theta_1,\phi_1,\theta_{12},\phi_2$，其中 θ_{12} 是 $\mathbf{p}_2$ 相对于 $\mathbf{p}_1$ 的极角。我们先固定 θ_{12}，对 θ_1,ϕ_1,ϕ_2 积分，得到：

$$d\Phi_3 = \frac{1}{8(2\pi)^9}\delta(M-E_1-E_2-E_3)\frac{1}{E_1E_2E_3}4\pi p_1^2 dp_1 2\pi p_2^2 dp_2 d(\cos\theta_{12})$$

式 (2.2.43) 的平方给出 $p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta_{12}$，保持 p_1, p_2 不变，对之微分可以得到 $p_3dp_3 = p_1p_2d(\cos\theta_{12})$，代入上式，有：

$$d\Phi_3 = \frac{1}{4(2\pi)^7}\delta(M-E_1-E_2-E_3)\frac{p_1dp_1p_2dp_2p_3dp_3}{E_1E_2E_3}$$

对质壳关系 $E_i^2 = p_i^2 + m_i^2$ 微分，有 $p_idp_i = E_idE_i$，代入上式：

$$d\Phi_3 = \frac{1}{4(2\pi)^7}\delta(M-E_1-E_2-E_3)dE_1dE_2dE_3$$

利用剩下的 δ 函数，对上式 dE_3 积分，得到三体不变相空间体积元为：

$$d\Phi_3 = \frac{1}{4(2\pi)^7}dE_1dE_2 \tag{2.2.44}$$

显然：

$$d\Phi_3 \propto dE_1dE_2 \propto dm_{23}^2dm_{13}^2 \propto dT_1dT_2 \tag{2.2.45}$$

式中后两个等式源于这些变量之间的线性关系。可见相空间正比于 Dalitz 图的面积，命题得证。

把 (2.2.44) 式代入 n 体衰变的衰变率公式 (2.2.6)，立即得到质心系中三体衰变的衰变率：

$$\Gamma = \frac{1}{8M(2\pi)^3}\int |\mathcal{M}_{fi}|^2 dE_1dE_2 \tag{2.2.46}$$

如果忽略粒子能量与跃迁矩阵元的依赖关系，我们可以通过对 (2.2.46) 式中 dE_2 积分，从而得到粒子 1 的能谱。这就需要求得积分限，即物理允许的 E_2 的区域。为此我们首先考虑如下过程 $a \to 1 + \{2,3\}$。在 a 的质心系中，粒子系统 {2,3} 的能动量是：

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{23} &= \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_1 \\ E_{23} &= E_2 + E_3 = M - E_1\end{aligned} \tag{2.2.47}$$

系统 {2,3} 的不变质量用 E_1 能量表示，则为：

$$m_{23} = \sqrt{E_{23}^2 - \mathbf{p}_{23}^2} = \sqrt{(M-E)^2 - \mathbf{p}_1^2} = \sqrt{M^2 + m_1^2 - 2ME_1}$$

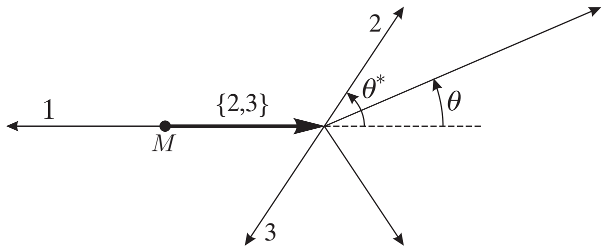


图 2.4: 三体衰变过程 $a \to 1+2+3$ 视为两步过程：$a \to 1 + \{2,3\}$ 和 $\{2,3\} \to 2+3$。

接着考虑粒子系统 {2,3} 衰变的过程 $\{2,3\} \to 2+3$，如图 2.4 所示。图中 θ^* 是 {2,3} 质心系中粒子 2 的衰变角 (decay angle)。在 a 的质心系中，系统 {2,3} 的运动用下式描述 (参考 (2.1.21) 式)：

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{E_{23}}{m_{23}} = \frac{M - E_1}{\sqrt{M^2 + m_1^2 - 2ME_1}} \\ \gamma\beta &= \frac{p_{23}}{m_{23}} = \frac{p_1}{\sqrt{M^2 + m_1^2 - 2ME_1}}\end{aligned}$$

而在粒子系统 {2,3} 的质心系中，粒子 2、3 的能量是 (参考 (1.2.34) 式)：

$$\begin{aligned}E_2^* &= \frac{m_{23}^2 + m_2^2 - m_3^2}{2m_{23}} \\ E_3^* &= \frac{m_{23}^2 + m_3^2 - m_2^2}{2m_{23}}\end{aligned}$$

它们的动量则为：

$$p_2^* = p_3^* = \sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} = \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2}$$

利用 Lorentz 变换公式 (2.1.29)，把粒子 2、3 的能量变换到 a 的质心系中，有：

$$\begin{aligned}E_2 &= \gamma E_2^* + \gamma\beta p_2^* \cos\theta^* \\ E_3 &= \gamma E_3^* - \gamma\beta p_3^* \cos\theta^*\end{aligned}$$

由上式即可得到 E_2、E_3 的积分限：

$$\begin{aligned}E_2: &\quad \left[\gamma E_2^* - \gamma\beta p_2^*, \gamma E_2^* + \gamma p_2^*\right] \\ E_3: &\quad \left[\gamma E_3^* - \gamma\beta p_3^*, \gamma E_3^* + \gamma p_3^*\right]\end{aligned} \tag{2.2.48}$$

设 $|\mathcal{M}_{fi}|$ 是常数，则 E_1 的能谱为：

$$\frac{d\Gamma}{dE_1}=\frac{1}{8M(2\pi)^3}|\mathcal{M}_{fi}|^2 2\gamma\beta p_2^* \tag{2.2.49}$$

图 2.5 所示为 $|\mathcal{M}_{fi}|=1$ 时，三体衰变 $a\to 1+\{2,3\}$, $\{2,3\}\to 2+3$ 过程中 Dalitz 边界的一个例子，以及相应于这种边界下的 E_1 能谱。注意图中坐标轴上的值是任意的。

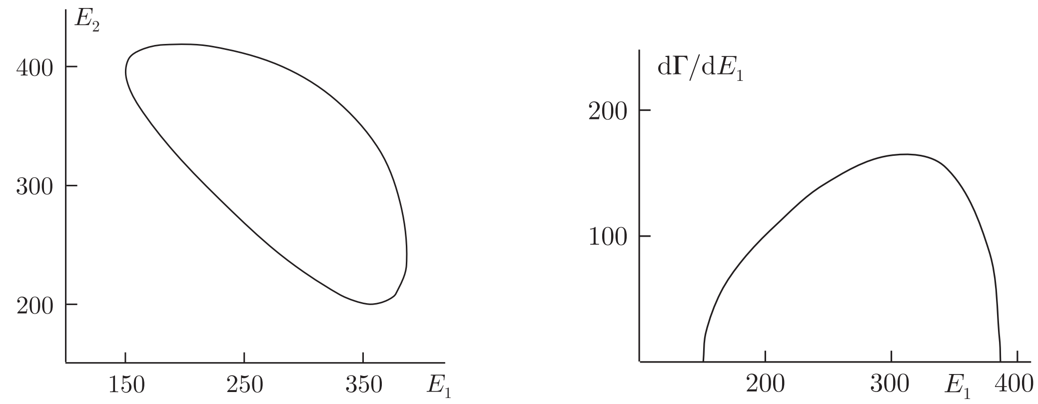


图 2.5: (左) 三体衰变 $a\to 1+\{2,3\}$, $\{2,3\}\to 2+3$ 过程中的 Dalitz 边界，(右) 在这种边界下末态粒子 1 的能谱。设跃迁矩阵元是常数 $|\mathcal{M}_{fi}|=1$。

对于 (2.2.49) 式的积分是很困难的，如果粒子 2、3 质量不为零，它涉及一个椭圆积分。如果粒子 2、3 中有一个质量为零，则积分比较容易。特别是当两个粒子均为无质量时，有：

$$\int dE_1 dE_2=\frac{M^2}{8} \tag{2.2.50}$$

此时的 Dalitz 图和 E_1 能谱如图 2.6 所示。事实上 G. Wick 发现：

- 对于每一个无质量粒子，其运动学边界有个尖角。
- 对于每一对无质量粒子，允许的边界是一段平行于轴的直线。

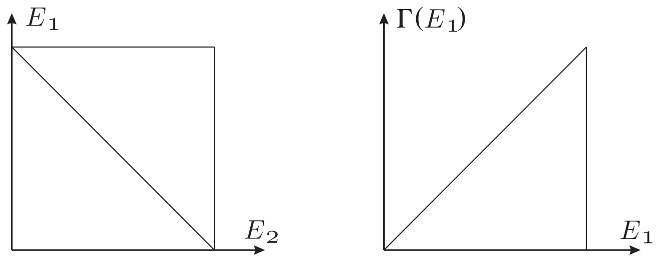


图 2.6: (左) 三个无质量粒子情形下的 Dalitz 图，(右) 在这种边界下末态粒子 1 的能谱。设跃迁矩阵元是常数 $|\mathcal{M}_{fi}|=1$。

我们在第 2.2.3 节中得到了质心系中两体衰变的衰变率 (2.2.17) 式：

$$\Gamma^*_{2\text{body}}=\frac{p^*}{32\pi^2 m_i^2}\int|\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Omega^* \tag{2.2.51}$$

在这一节中又得到了质心系中三体衰变过程的衰变率 (2.2.46) 式：

$$\Gamma^*_{3\text{body}} = \frac{1}{8M(2\pi)^3}\int |\mathscr{M}_{fi}|^2 \mathrm{d}E_1^* \mathrm{d}E_2^* \tag{2.2.52}$$

注意衰变率 Γ 具有能量的量纲。于是对于两体衰变，$|\mathscr{M}_{fi}|^2$ 的量纲为 $[E]^2$，我们可以令之为 $M^2 \times "1"$，再把 $\frac{p^*}{M} = \frac{1}{2}$ 代入 (2.2.51) 式，得到：

$$\Gamma^*_{2\text{body}} = \frac{M}{16\pi} \times "1"$$

式中 "1" 代表归一化的相互作用强度。对于三体衰变，$|\mathscr{M}_{fi}|^2$ 是无量纲的，令之为 "1"，代入 (2.2.52) 式，同时利用 (2.2.50) 式，得到：

$$\Gamma^*_{3\text{body}} = \frac{M}{16\pi}\frac{1}{8(2\pi)^2} \times "1"$$

于是：

$$\frac{\Gamma^*_{3\text{body}}}{\Gamma^*_{2\text{body}}} = \frac{1}{32\pi^2} \approx \frac{1}{315.8}$$

因此从运动学角度看，三体衰变的概率远小于两体衰变的概率。上述结论与第 2.2.2 节中严格求解的结果一致。注意本节中的推理是不严格的。

对于诸如奇异介子 K^+ 的三体衰变过程：

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$$

三个末态粒子的质量相等，如果我们以三个粒子的动能 T_1, T_2, T_3 做一个等边三角形，那么三角形内部任意一点到三条边的距离之和都相等，如图 2.7 所示。因此如果用这些距离表示动能，则能量守恒自动满足。动量守恒则限制了物理允许过程落在图中闭合曲线包围的区域内。图 2.7 和图 2.3 等价，不过图 2.7 的表示方式明显给出了问题的对称性质。

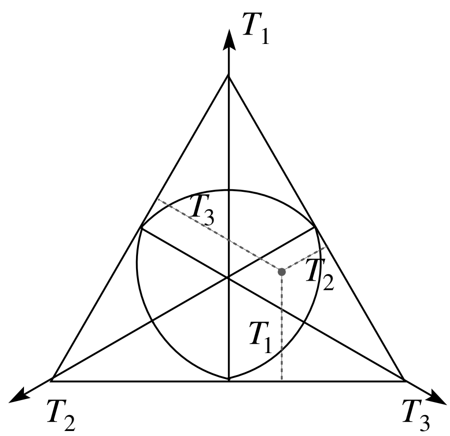


图 2.7: Dalitz 图。

Dalitz 图中的每个点代表一个三体衰变事例。当反应事例数足够多时，图中事例点的密度就可以反映出跃迁矩阵元 $|\mathscr{M}_{fi}|^2$ 的分布，即衰变过程的动力学机制，而跃迁矩阵元又与系统的自旋、宇称、同位旋等量子数密切相关，因此实验上可以用 Dalitz 图来分析衰变粒子的这些量子数。

2.2.7 数量级估计

量纲分析，加上良好的物理直觉和一些运气，就可以对截面和衰变率进行虽然简单但是相对准确的数量级估计。下面是我们将要使用的各种参数值：

Fine structure constant	α	$\frac{1}{137}$
Fermi coupling constant	G_F	$10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$
Electron mass	m_e	$0.51\,\mathrm{MeV}$
Nucleon mass	m_N	$1\,\mathrm{GeV}$
Nucleon radius	r_p	$1\,\mathrm{fm}$
Strong interaction coupling constant	g_s	1

我们还需记住物理过程的 Lorentz 不变性。

一、$e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ 过程

我们估计这个过程在高能极限下的散射截面。由于参与反应的粒子都是带电轻子，因此相互作用以电磁作用为主，最低阶过程是通过湮灭的二阶树图。该过程的跃迁振幅正比于 $e^2 \propto \alpha$，故散射截面正比于 α^2，可写为：

$$\sigma(e^- e^+ \to \mu^- \mu^+) = \alpha^2 f(s, m_e, m_\mu)$$

其中 s 是质心系总能量的平方，m_e、m_μ 分别是电子和 μ 子的质量，$f(s, m_e, m_\mu)$ 是这些 Lorentz 不变量的函数。在极高能量下，m_e 和 m_μ 都可以忽略，由于散射截面量纲为 $[E]^{-2}$，α 无量纲，因此 $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ 的截面为：

$$\sigma(e^- e^+ \to \mu^- \mu^+) = \frac{\alpha^2}{s}$$

准确的计算结果是：

$$\sigma(e^- e^+ \to \mu^- \mu^+) = \frac{4\pi}{3}\frac{\alpha^2}{s}$$

比我们的估计值大 4.2 倍。上式大致计算结果为：

$$\sigma(e^- e^+ \to \mu^- \mu^+) \sim \frac{4 \times 10^{-32}}{s}\,\mathrm{cm}^2 \tag{2.2.53}$$

式中 s 的单位是 GeV。

二、$\nu + N \to \cdots$ 过程

考虑中微子与核子散射跃迁到所有可能末态的总截面。由于中微子的出现，因此这是一个弱相互作用过程，跃迁振幅正比于 G_F。在极高能量下，所以粒子的质量都可以忽略，于是：

$$\sigma(\nu N) = G_F^2 f(s)$$

式中 s 是质心系总能量的平方。根据量纲分析可知：

$$\sigma(\nu N) = G_F^2 s$$

一般而言，这是一个极高能量 E_ν 的中微子轰击固定靶核子的过程。所以 $s \approx 2m_N E_\nu$。代入上式，忽略因子 2，得到：

$$\sigma(\nu N) \sim G_F^2 m_N E_\nu$$

把 G_F 和 m_N 的数值代入上式，利用 $1\,\mathrm{GeV}^{-1} \sim 0.4,\mathrm{mb}$，得到 $\nu + N \to \cdots$ 散射的截面：

$$\sigma(\nu N) \sim 4 \times 10^{-38} \times E_\nu\ \mathrm{cm}^2$$

其中 E_ν 单位为 GeV。这种情形的实验测量值为：

$$\sigma(\nu N) = 0.6 \times 10^{-38} \times E_\nu\ \mathrm{cm}^2 \tag{2.2.54}$$

两者相差大约 6.7 倍。

从 (2.2.53) 式和 (2.2.54) 式可以看出，虽然 $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ 过程和 $\nu + N \to \cdots$ 过程的截面在相同能量下相差好几个数量级，我们都得到合理的估计结果。此外，这两个散射过程的截面具有完全不同的能量依赖关系。μ 子对产生截面随着能量增加以 $\frac{1}{s}$ 减少，而中微子散射截面正比于 s (或实验室系中的 E_ν)。发散的中微子截面说明采用的物理图象 (我们采用了 Fermi 的四费米子的直接相互作用) 是有问题的。

三、Compton 散射

Compton 散射是指光子和电子的散射：

$$\gamma \ + \ e^{\pm} \ \to \ \gamma \ + \ e^{\pm}$$

最低阶过程是电磁相互作用的二阶树图。如前所述，该过程的截面仍然有如下形式：

$$\sigma_{\mathrm{Compton}} = \alpha^2 f(s, m_e)$$

如果是低能量散射，则 $s \to m_e$，散射截面为：

$$\sigma_{\mathrm{Compton}} = \frac{\alpha^2}{m_e^2}$$

如果是高能量情形，则电子质量可以忽略，散射截面为：

$$\sigma_{\mathrm{Compton}} = \frac{\alpha}{s}$$

准确的计算结果是：

$$\sigma_{\mathrm{Compton}} = \begin{cases} \dfrac{8\pi}{3}\dfrac{\alpha^2}{m_e^2}, & s \to m_e \\ 2\pi\dfrac{\alpha^2}{s}\ln\dfrac{s}{m_e^2}, & s \to \infty \end{cases}$$

在低能量散射时两者相差 $\frac{8\pi}{3}$ 因子，在高能量散射时，我们的估算除了少一个因子 2π，更少了随质心系总能量平方的对数项。

四、μ 子衰变

下面考虑 μ 子的衰变过程：

$$\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$$

类似前面讨论过的几个散射过程，μ 子的衰变率为：

$$\Gamma = G_F^2 f(\mu)$$

因为 $m_e \ll m_\mu$，所以上式中已经忽略电子质量。根据量纲，$[\Gamma] = [E]$，$[G_F] = [E]^{-2}$，似乎应该有：

$$\Gamma = G_F^2 m_\mu^5$$

这个结果与准确值相比高 $192\pi^3 \approx 6000$ 倍！问题出在哪里？

实际上如果只考虑衰变粒子部分，那么式中的 m_μ^5 因子是正确的。问题主要出在衰变末态产物的数目，或者相空间因子上。三体衰变相对于两体衰变有一个大约是 $32\pi^2 \sim 320$ 的压低因子。另外两体衰变本身还有一个大约是 $4-8$ 的相空间压低因子 (前面几个散射过程中均未考虑这一点，因此前面的估计值都比准确值小 $4-8$ 倍)。不过即使考虑了这两个相空间压低因子，结果仍然相差 $4-8$ 倍。

五、对产生和轫致辐射

对产生过程指的是光子在原子核势场内产生电子对：

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

这里的原子核外场是必须的，因为只有这样，原子核才可以吸收反冲动量，从而满足能动量守恒。在具体估计光子的对产生截面前，我们讨论如下双光子过程：

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$$

重复前面过程，容易得到：

$$\sigma(\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+) = \frac{\alpha^2}{s}$$

现在看双光子过程和光子的对产生过程的差别：在光子的对产生过程中，质量很大 (可近似为 ∞) 的原子核的 Coulomb 静电场，相当于提供了一个几乎是实的虚光子 (参阅第 1.5.2 节)，它与原先的光子一起产生 e^-e^+ 对。虚光子的四动量为 $p = (0, \mathbf{p})$，即质量为 ∞ 的原子核吸收的是动量，而不是能量。由于这个交换的动量，在对产生过程中两个末态电子的动量是独立的，这是明显不同于双光子过程的。因此对产生过程的截面要比双光子过程的截面多出一个 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{E}$ 的积分项。从量纲的角度看多出 $p^2 \sim s$ 项。这样就消除了双光子过程分母中的 s。再考虑到原子核 Ze 因子，最终可以把对产生截面写为：

$$\sigma_{\mathrm{pair}} = Z^2\alpha^3 f(m_e) \sim \frac{Z^2\alpha^3}{m_e^2}$$

完整的结果由 Bethe-Heitler 公式给出：

$$\sigma_{\mathrm{pair}} = \frac{28}{9}\frac{Z^2\alpha^3}{m_e^2}\ln\frac{E_\gamma}{m-2}$$

上式只适用于点状原子核的情形。事实上由于原子核外电子的存在，会对原子核势场形成**屏蔽 (screening)** 效应，使得原子核的 Coulomb 场并不是延伸到无穷远。考虑这个因素后，上式中的对数项变为常数 $\sim \ln(183 \times Z^{-\frac{1}{3}})$。

对于电子在原子核场中的轫致辐射过程，上述结果仍然成立。

六、高能强子散射的总截面

利用量纲分析可以很自然地得到任意一对强子发生散射时的总截面：

$$\sigma = \pi r^2$$

其中 r 是 π 介子的 Compton 波长，也是核力的力程或者质子的半径。对于 $p-p$ 散射，总截面是：

$$\sigma_{pp} = \pi r_p^2 \sim 3\times 10^{-26}\,\mathrm{cm}^2 \sim 30\,\mathrm{mb}$$

在高能情形下，重子和介子可分别近似看成是三个和两个准自由夸克组成。于是对于任意带电 π、K 介子，可以估计：

$$\frac{\sigma_{\pi p}}{\sigma_{pp}} \sim \frac{\sigma_{Kp}}{\sigma_{pp}} \sim \frac{2}{3}$$

综合上面结果，有：

$$\begin{aligned}
&\sigma_{np} \sim \sigma_{pp} \sim \sigma_{\overline{p}p} \sim \sigma_{\overline{p}n} \sim 30\,\mathrm{mb}\\
&\sigma_{\pi^+p} \sim \sigma_{\pi^-p} \sim \sigma_{K^+p} \sim \sigma_{K^-p} \sim 20\,\mathrm{mb}
\end{aligned}$$

实验结果为：

$$\begin{aligned}
&\sigma_{np} \sim \sigma_{pp} \sim \sigma_{\overline{p}p} \sim \sigma_{\overline{p}n} \sim 45\,\mathrm{mb}\\
&\sigma_{\pi^\pm p} \sim 25\,\mathrm{mb}\\
&\sigma_{K^\pm p} \sim 20\,\mathrm{mb}
\end{aligned}$$

从定性的角度看我们的估计结果是可以接受的。

2.3 相加性量子数

如果一个复合系统的总守恒量是其各组成部分的相应守恒量的代数和，则称该守恒量为相加性守恒量，相应的量子数为**相加性量子数 (additive quantum number)**。我们所熟知的能量 E、动量 $\mathbf{p}$、角动量 $\mathbf{J}$、电荷 Q 等都是相加性量子数。

粒子物理学为每一种夸克赋予了一个夸克量子数，即所有夸克都有奇异数 S、粲数 C、底数 B 和顶数 T。上夸克和下夸克没有特别的量子数，但是可以用同位旋 I 及其第三分量 I_3 代表。这样可以把强子的 Gell-Mann 西岛公式推广为：

$$Q = I_3 + \frac{\mathcal{B} + S + C + B + T}{2} \tag{2.3.1}$$

根据上式可知：I、$\mathcal{B}$、S、C、B 和 T 等也必定是相加性量子数。此外理论和实验表明三代轻子数 L_e、L_μ、L_τ 也是相加性的。这些没有经典对应的相加性量子数称为内部相加性量子数。电荷以及所有内部相加性量子数为零的粒子称为纯中性粒子或 Majorana 粒子，电荷以及所有内部相加性量子数为零的系统称为纯中性系统。

粒子物理学的实验表明，上述相加性量子数有如下守恒规律：

- 能量、动量、角动量、电荷、重子数和轻子数在任何相互作用过程中都是守恒量子数，它们的守恒定律具有普遍的意义。
- 同位旋第三分量、奇异数、粲数、底数和顶数是强相互作用和电磁相互作用中的守恒量子数，它们的守恒性在弱作用过程中被破坏。
- 同位旋量子数只是强相互作用中的守恒量。

2.3.1 质量和寿命

质量是粒子的基本性质，测定粒子的质量是辨认粒子的根本途经。粒子的质量 m 是一个 Lorentz 不变量，可以由质壳关系定义：

$$m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 \tag{2.3.2}$$

上式表明在粒子的质心系中，它的能量等于质量。

表 2.2 列出了轻子和夸克等基本费米子的近似质量。注意：因为自由夸克不存在，所以实验上无法测量它们的质量。表中 u, d, c, s, b 夸克的质量指的是这些夸克构成束缚态 (强子) 时的有效质量，称为组份夸克质量 (constituent quark mass)。至于 t 夸克，由于其寿命极短，产生后还未束缚成强子态就发生衰变，因此它的质量是从其衰变产物中推得的。

自然界中只有质子、电子、光子和中微子是稳定粒子，其他所有粒子都是不稳定的，都将通过各种相互作用发生衰变。不稳定粒子的衰变率由 Fermi 黄金规则确定：

$$\Gamma_{fi} \propto |\mathcal{M}_{fi}|^2 \mathrm{d}\Phi$$

它取决于相互作用类型 $\mathcal{M}_{fi}$ 和相空间 $\mathrm{d}\Phi$ (衰变前后粒子质量差和末态粒子数目)。

对于不稳定粒子，每次测量得到的寿命值都不同，这是因为人们不知道它究竟什么时刻发生衰变，人们只知道它在一定时间间隔内可能衰变的概率大小 Γ_{fi}。故粒子的

表 2.2: 基本费米子 (轻子和夸克) 的质量

代	轻子	质量 (GeV)	夸克	质量 (GeV)
I	e^-	0.0005	d	0.3
	ν_e	≈ 0	u	0.3
II	μ^-	0.106	s	0.5
	ν_μ	≈ 0	c	1.5
III	τ^-	1.77	b	4.5
	ν_τ	≈ 0	t	175

衰变过程总是统计性的，这种统计性是微观世界的特征。假设 t 时刻的粒子数为 N，在 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 的 $\mathrm{d}t$ 时间间隔内有 $\mathrm{d}N$ 个粒子发生衰变，则 $\mathrm{d}N$ 为：

$$\mathrm{d}N = -\Gamma_{fi} N \mathrm{d}t$$

式中负号表示粒子数减少。对上式积分：

$$N(t) = N(0)e^{-\Gamma_{fi}t} = N(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.3.3}$$

其中 τ 是不稳定粒子的平均寿命，简称寿命 [2]：

$$\tau \equiv \frac{1}{\Gamma_{fi}}$$

上式表明，对于不稳定粒子的寿命，如果它的的寿命很长 $\tau > 10^{-16}\,\mathrm{s}$，则可以通过实验方法直接测量 [3]，否则可以通过参数 Γ_{fi} 间接得到。

非相对论量子力学不能直接用来描述不稳定粒子，这是因为在非相对论量子力学中，粒子既不能产生也不能消灭。例如考察一个自由运动的稳定粒子，描述其运动状态的波函数 ψ 满足 Schrödinger 方程：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) = \hat{H}\psi(\mathbf{r},t)$$

式中 $\hat{H}$ 是自由稳定粒子的哈密顿量，其测量值的物理意义是该粒子的能量。如果在相对自由粒子静止的系统中来处理，这时哈密顿量测量值的物理意义就是该粒子的质量。设粒子处在某个质量为 m 的本征态 $\psi(\mathbf{r})$，则波函数为：

$$\psi(\mathbf{r},t) = e^{-imt}\psi(\mathbf{r}) \tag{2.3.4}$$

显然波函数 $\psi(\mathbf{r},t)$ 满足归一化条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\mathbf{r},t)|^2 \mathrm{d}^3x = 1$$

即 t 时刻粒子在全空间存在的概率为 1，表明粒子数目不随时间变化。

[2]这里的衰变率 Γ_{fi} 是指所有分支衰变道的衰变率之和，即总衰变率。粒子的寿命总是与总衰变率或总宽度联系在一起，没有分支寿命的概念。

[3]通常把不能通过强相互作用衰变的粒子称为稳定粒子，因为它们的寿命很长，可以直接测量。

为了对不稳定粒子进行量子力学描写，只能采用唯象的方法。注意式 (2.3.3) 表明不稳定粒子的数目呈现指数衰减的规律。为了反映这个事实，不稳定粒子的数目或波函数 $\psi(\mathbf{r},t)$ 的模方还应当具有如下时间依赖关系：

$$|\psi(\mathbf{r},t)|^2 \propto e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.3.5}$$

于是考虑式 (2.3.4)、(2.3.5) 后，不稳定粒子的波函数可以写为 [4]：

$$\psi(\mathbf{r},t) = e^{-imt} e^{-\frac{t}{2\tau}} \psi(\mathbf{r}) \tag{2.3.6}$$

显然满足上述要求。

对于稳定粒子，哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征值是实数 m，代表粒子质量，如果粒子处在本征态，则其质量的测量值总是 m。对于不稳定粒子，考虑指数衰变规律后，其波函数用 (2.3.6) 式代替，哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征值是复数 $m - i\frac{\Gamma}{2}$，假设初始时刻 $t=0$ 粒子处在本征态，那么任意时刻 t 测量粒子质量得到的值仍然是 m 吗？

为了回答这个问题，我们把以时间 t 为变量的波函数 (2.3.6) 式作 Fourier 变换，得到以质量 M 为变量的波函数：

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r},M) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\mathbf{r},t)e^{iMt}\mathrm{d}t = \frac{\psi(\mathbf{r})}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{i(M-m)t}e^{-\frac{t}{2\tau}}\mathrm{d}t\\ &= \frac{\psi(\mathbf{r})}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{M-m+\frac{i}{2\tau}}\end{aligned}$$

根据波函数统计解释，$|\phi(\mathbf{r},M)|^2$ 表示不稳定粒子的质量测量值在 M 附近的概率密度：

$$W(M) = N\phi^*(\mathbf{r},M)\phi(\mathbf{r},M) = N\frac{|\psi(\mathbf{r})|^2}{2\pi}\frac{1}{(M-m)^2+\frac{1}{4\tau^2}}$$

其中 N 是归一化系数，由于全空间概率为 1：

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(M)\mathrm{d}E = 1$$

得到：

$$N = \frac{1}{|\psi(\mathbf{r})|^2\tau}$$

于是得到实验测量不稳定粒子的质量，取值为 M 的分布函数：

$$\boxed{W(M) = \frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma}{(M-m)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}} \tag{2.3.7}$$

式中已用 Γ 代替 Γ_{fi} 表示总宽度。

式 (2.3.7) 称为 **Breit-Wigner 公式**，其概率分布如图 2.8 所示。Breit-Wigner 公式表明当时间足够长时，不稳定粒子的质量测量值 M 的概率分布呈现以 Γ 为特征的一定宽度的分布，并且在 $M=m$ 处达到最大值，即表现出明显的共振行为，所以粒子物理学中把强相互作用中的不稳定态叫做共振态。

[4]这相当于把原来实数能量 E 改写成复数形式 $E - i\frac{\Gamma}{2}$。可与经典力学中的阻尼振荡比较。在电动力学中也有类似描写方式，即把电磁波的波矢写成复数，实数部分描写波的传播，虚数部分描写波的吸收。

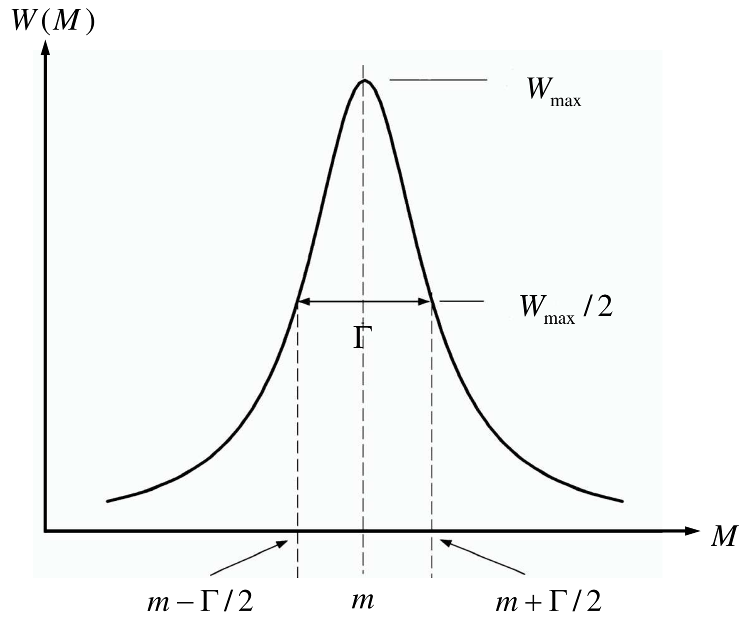


图 2.8: 共振态的 Breit-Wigner 公式。

从图 2.8 看出，m 的物理意义是不稳定粒子质量测量值的期望值，因此称为不稳定粒子的质量。那么 Γ 的物理意义又是什么？注意到测量质量的概率为：

$$W(M) \propto \frac{1}{(M-m)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

当 $M = m$ 时达到最大值：

$$W(m) = W_{\max} \propto \left(\frac{2}{\Gamma}\right)^2$$

因此测量质量的概率又可以写为：

$$W(M) \propto \frac{W_{\max}}{\left(\frac{2}{\Gamma}\right)^2} \frac{1}{(M-m)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

于是当 $m \pm \frac{\Gamma}{2}$ 时的概率为：

$$W\left(m \pm \frac{\Gamma}{2}\right) = \frac{W_{\max}}{\left(\frac{2}{\Gamma}\right)^2} \frac{1}{\left(m - m \pm \frac{\Gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} = \frac{W_{\max}}{2}$$

即 Γ 是不稳定粒子质量概率分布的**半高度上的全宽度 (full width at half maximum, FWHM)**，称为不稳定粒子的质量宽度。从 $m - \frac{\Gamma}{2}$ 到 $m + \frac{\Gamma}{2}$ 的这段质量谱集中了共振峰的主要部分。

关于不稳定粒子的 Breit-Wigner 公式我们做如下说明：

- 实验上不稳定粒子的质量 m 和宽度 Γ 是待定参数，实验测量的是衰变产物的不变质量 M。Breit-Wigner 公式表明少数的测量值并不能给出 m 和 Γ，但是当实验观测到许多粒子的质量值 M 时，就显示出图 2.3.7 所示的概率分布。

- Breit-Wigner 公式可以用来描述某个分支衰变道 k 的质量谱。这时只需将 (2.3.7) 式分子中的宽度改写为该分支衰变道的分宽度即可：

$$W_k(M) = \frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma_k}{(M-m)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

- 有时候不稳定粒子的某一衰变道的衰变产物的质量之和大于该粒子的质量，即衰变道的阈高于该粒子的质量，这时可称为近阈共振态。例如 $f_0(980)$ 粒子的质量和宽度分别是：

$$m = 980 \pm 10\,\text{MeV}, \qquad \Gamma = 40-100\,\text{MeV}$$

  实验发现它可以衰变到一对正反 K 介子。而一对正反 K 介子的静止质量分别是 987 MeV (K^+K^-) 和 995 MeV ($K^0\overline{K}^0$)，都大于 $f_0(980)$ 的质量。这种衰变能够发生的原因就在于不稳定粒子的质量分布有一定宽度。

2.3.2 自旋和螺旋度

所有微观粒子都有自旋 $\mathbf{S}$。自旋满足角动量代数，是一种角动量。角动量除了自旋还有轨道角动量 $\mathbf{L}$。系统的总角动量在任何相互作用中都守恒。自旋没有经典对应。非相对论量子力学中人为引进电子自旋的概念，相对论 Dirac 方程可以自然地导出电子自旋 $\frac{1}{2}$ (参阅第 节)。

在量子力学中，微观粒子的角动量是量子化的。粒子的自旋可以用一个数 s 来代表，s 可以取整数或半整数：

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$$

对于给定的自旋量子数 s，自旋在 z 方向投影的量子数 (自旋磁量子数) m_s 可取：

$$m_s = s, s-1, \cdots, -(s-1), -s$$

轨道角动量也可以用一个数 l 来代表，l 只能取整数：

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

给定轨道角动量量子数 l，轨道角动量的 z 方向投影量子数 (轨道磁量子数) m 可取：

$$m = l, l-1, \cdots, -(l-1), -l$$

量子力学已经证明，如果角动量 $\mathbf{J}_1$ 的量子数为 j_1，$\mathbf{J}_2$ 的量子数为 j_2，那么它们相加合成的总角动量为：

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$$

它的量子数 j 可以取：

$$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \cdots, |j_1 - j_2|$$

给定角动量量子数 j，角动量在 z 方向投影的量子数 m_j 可取：

$$m_j = j, j-1, \cdots, -(j-1), -j$$

这种角动量相加的法则，对于两个自旋相加 $\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2$、两个轨道角动量相加 $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2$、一个自旋和一个轨道角动量相加 $\mathbf{S}+\mathbf{L}$ 等都适用。依此方法可以给出粒子总角动量所有可能值。

粒子物理学中，一个复合粒子的总角动量 **J** 是指，在复合粒子质心系中，该粒子内部各组份粒子的总自旋 **S** 和总轨道角动量 **L** 的和。记相应的量子数为 J, S, L，则粒子状态常表示为：

$$^{2S+1}\mathrm{L}_J$$

其中 L 是光谱学符号，对于 L 的不同取值 $0,1,2,3\cdots$，L 相应地取 $S, P, D, F, \cdots$。注意：尽管 **J** 是复合粒子的总角动量，粒子物理学习惯称之为该粒子的自旋，其量子数用符号 J 代表，它的 z 分量可以取 $J, J-1, \cdots, -J$ 共 $2J+1$ 个值。

轻子和夸克自旋为 $\frac{1}{2}$，$\gamma, W^{\pm}, Z^0$ 的自旋为 1，标准模型 Higgs 粒子的自旋为 0，引力子自旋为 2。复合粒子的自旋根据角动量相加的规则合成。现已发现的粒子最大自旋是 $\frac{11}{2}$。这种高自旋粒子不同于原子核中的高自旋态，即没有迹象表明它是由许多自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子耦合而成。理论上认为它是由于内部结构中轨道角动量高造成的。

例 1：介子由两个自旋 $\frac{1}{2}$ 的正反夸克 $q\overline{q}$ 组成，因此介子的总自旋可以取 $S=0,1$。对于基态介子，总轨道角动量 $L=0$，总角动量 $J=S$，用光谱学符号表示：

$$^{2S+1}\mathrm{L}_J = \begin{cases} ^1S_0 & (L=0,\ S=0) \\ ^3S_1 & (L=0,\ S=1) \end{cases} \tag{2.3.8}$$

对于激发态介子，总轨道角动量 L 不为零。如果是自旋单态，总角动量 $J=L$；如果是自旋三重态，总角动量 $J=L+1, L, L-1$。这样可能的介子态：

$$^{2S+1}\mathrm{L}_J = \begin{cases} ^1\mathrm{L}_L & (L>0,\ S=0) \\ ^3\mathrm{L}_{L+1},\ ^3\mathrm{L}_L,\ ^3\mathrm{L}_{L-1} & (L>0,\ S=1) \end{cases} \tag{2.3.9}$$

例 2：重子由三个自旋 $\frac{1}{2}$ 的夸克 qqq 组成，因此重子的总自旋可以取 $S=\frac{3}{2},\frac{1}{2}$，总轨道角动量 $\mathbf{L}=\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2+\mathbf{L}_3=\mathbf{L}_{12}+\mathbf{L}_3$。这样可能的重子态有：

$$^2S_{\frac{1}{2}},\ ^4S_{\frac{3}{2}} \qquad (L=0) \tag{2.3.10}$$

$$^2P_{\frac{1}{2}},\ ^2P_{\frac{3}{2}},\ ^4P_{\frac{3}{2}},\ ^4P_{\frac{5}{2}} \qquad (L=1) \tag{2.3.11}$$

$$^2\mathrm{L}_{L+\frac{1}{2}},\ ^2\mathrm{L}_{L-\frac{1}{2}},\ ^4\mathrm{L}_{L-\frac{3}{2}},\ ^4\mathrm{L}_{L-\frac{1}{2}},\ ^4\mathrm{L}_{L+\frac{1}{2}},\ ^4\mathrm{L}_{L+\frac{3}{2}} \qquad (L\geqslant 2) \tag{2.3.12}$$

显然重子谱很复杂。如果只考虑基态，则只有式 (2.3.10) 表示的重子态才存在，基态重子的自旋可以取 $J=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$，对应第 1 章夸克模型中介绍的重子八重态和十重态。

粒子按其自旋量子数 J 分为两类，即费米子和玻色子：

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots && \text{费米子} \\ J &= 0, 1, 2, \cdots && \text{玻色子} \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

全同粒子组成的系统有如下自旋统计关系：

- 全同玻色子组成的系统遵守 Bose-Einstein 统计，即任意交换两个粒子时系统的波函数保持不变，或者说系统波函数对于交换两个玻色子是对称的。
- 全同费米子组成的系统遵守 Fermi-Dirac 统计，在任意交换两个粒子时系统的波函数反号，即系统波函数反对称。

我们用 $\psi(\cdots\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j;\hat{\mathbf{S}}_i,\hat{\mathbf{S}}_j\cdots)$ 表示全同粒子系统的波函数，其中 $\mathbf{r}_i$ 是系统第 i 的粒子的位置，$\hat{\mathbf{S}}_i$ 是系统第 i 的粒子的自旋。用算符 $\hat{P}_{ij}$ 表示对两个粒子实施交换的操作。如果连续做两次粒子交换，则系统回到原先状态：

$$\hat{P}_{ij}^2\psi(\cdots\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j;\hat{\mathbf{S}}_i,\hat{\mathbf{S}}_j\cdots)=\hat{P}_{ij}\psi(\cdots\mathbf{r}_j,\mathbf{r}_i;\hat{\mathbf{S}}_j,\hat{\mathbf{S}}_i\cdots)=\psi(\cdots\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j;\hat{\mathbf{S}}_i,\hat{\mathbf{S}}_j\cdots)$$

因此算符 $\hat{P}_{ij}$ 的本征值为：

$$\epsilon=\pm1 \tag{2.3.14}$$

全同玻色子系统满足 $\epsilon=1$，全同费米子系统满足 $\epsilon=-1$。

如果忽略自旋轨道相互作用，那么可以把全同粒子系统的波函数 ψ 写为位置空间波函数 ϕ 和自旋空间波函数 χ 的乘积：

$$\psi(\cdots\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j;\hat{\mathbf{S}}_i,\hat{\mathbf{S}}_j\cdots)=\phi(\cdots\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j\cdots)\chi(\cdots\hat{\mathbf{S}}_i,\hat{\mathbf{S}}_j\cdots)$$

全同费米子系统总波函数 ψ 反对称，故要求 ϕ 和 χ 中有一个对称，另一个反对称。全同玻色子系统总波函数 ψ 对称，故要求 ϕ 和 χ 同时对称，或同时反对称。

考虑由两个全同粒子组成的系统。我们看系统位置空间波函数 $\phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ 的交换对称性。对于两体运动，可以用两个粒子的相对坐标 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ 描述系统的相对运动，这表明粒子间的相互作用是有心势。于是在系统质心系中，系统位置空间波函数具有如下形式：

$$\phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\phi(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\phi(\mathbf{r})\sim R_{nl}(r)\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)e^{im\phi}$$

其中 n、l 和 m 分别是双粒子系统的主量子数、轨道量子数和轨道磁量子数。把粒子交换算符 $\hat{P}_{12}$ 作用于 $\phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$：

$$\hat{P}_{12}\phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\phi(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=\phi(-\mathbf{r})$$

可见交换两个粒子的位置变量，相当于把位置 $\mathbf{r}$ 换成 $-\mathbf{r}$，也就是空间反射变换。而 $\mathbf{r}\to-\mathbf{r}$ 变换相当于执行：

$$\begin{aligned}\theta &\to \pi-\theta\\ \phi &\to \pi+\phi\end{aligned}$$

所以两个全同粒子系统的位置空间波函数的对称性由 $\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$ 决定：

$$\hat{P}_{12}\phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=(-1)^l\phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \tag{2.3.15}$$

再看系统自旋空间波函数 $\chi(\hat{\mathbf{S}}_1,\hat{\mathbf{S}}_2)$ 的交换对称性。自旋空间波函数 $\chi(\hat{\mathbf{S}}_1,\hat{\mathbf{S}}_2)$ 可以用耦合基 $|s_1,s_2;s,m_s\rangle$ 表示，把它用非耦合基 $|s_1,m_{s_1}\rangle_1|s_2,m_{s_2}\rangle_2$ 展开：

$$|s_1,s_2;s,m_s\rangle=\sum_{m_{s_1},m_{s_2}}\langle s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}|s_1,s_2;s,m_s\rangle|s_1,m_{s_1}\rangle_1|s_2,m_{s_2}\rangle_2$$

注意 m_{s_1},m_{s_2} 并不独立，满足 $m_{s_1}+m_{s_2}=m_s$。上式中 $\langle s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}|s_1,s_2;s,m_s\rangle$ 是展开系数，称为 Clebsch-Gordan 系数。若将两个粒子互换，则 Clebsch-Gordan 系数具有如下交换对称性：

$$\begin{aligned}\hat{P}_{12}\langle s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}|s_1,s_2;s,m_s\rangle&=\langle s_2,s_1;m_{s_2},m_{s_1}|s_2,s_1;s,m_s\rangle\\&=(-1)^{s-s_1-s_2}\langle s_1,s_2;m_{s_1},m_{s_2}|s_1,s_2;s,m_s\rangle\end{aligned}$$

于是系统自旋空间波函数的对称性为：

$$\hat{P}_{12}|s_1,s_2;s,m_s\rangle = |s_2,s_1;s,m_s\rangle = (-1)^{s-s_1-s_2}|s_1,s_2;s,m_s\rangle$$

对于双全同玻色子系统，$s_1 = s_2 =$整数，对于双全同费米子系统，$s_1 = s_2 =$半奇数，上式成为：

$$\begin{aligned} |s_2,s_1;s,m_s\rangle &= \ \ (-1)^{s}|s_1,s_2;s,m_s\rangle \qquad \text{双全同玻色子系统} \\ |s_2,s_1;s,m_s\rangle &= -(-1)^{s}|s_1,s_2;s,m_s\rangle \qquad \text{双全同费米子系统} \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

双全同粒子系统的自旋空间波函数的对称性完全由系统总自旋 s 的奇偶性来决定。

综合 (2.3.15) 和 (2.3.16) 式，对于两个全同粒子组成的系统，若两个粒子间的轨道角动量为 L，总自旋为 S，则根据自旋统计关系可知，系统波函数在粒子交换下具有如下对称性：

$$\begin{aligned} \hat{P}_{12}\psi &= (-1)^{L+S}\ \ \psi \qquad \text{双全同玻色子系统} \\ \hat{P}_{12}\psi &= (-1)^{L+S+1}\psi \qquad \text{双全同费米子系统} \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

根据 (2.3.14) 式，双全同玻色子系统的粒子交换 $\hat{P}_{12}$ 本征值为 +1，双全同费米子系统的粒子交换 $\hat{P}_{12}$ 本征值为 −1。因此不论玻色子还是费米子，自旋统计规律均要求两个全同粒子组成的系统必须满足：

$$\boxed{L+S = \text{偶数}} \tag{2.3.18}$$

当系统的总自旋 S 是偶数时，系统的位置空间波函数必定是对称的，当系统的总自旋 S 是奇数时，系统的位置空间波函数必定是反对称的。

例 3：π^+ 介子的自旋 可以根据细致平衡原理，通过测量可逆反应：

$$\pi^+ \ + \ d \ \leftrightarrow \ p \ + \ p \tag{2.3.19}$$

的正逆向作用截面来确定。根据细致平衡原理，对于可逆反应过程：

$$A \ + \ B \ \leftrightarrow \ C \ + \ D$$

在相同的质心系能量下，正逆向作用截面有如下关系 (参考 (2.2.8)、(2.2.32) 式)：

$$\frac{\sigma(A+B\to C+D)}{\sigma(C+D\to A+B)} = \frac{(2J_C+1)(2J_D+1)}{(2J_A+1)(2J_B+1)}\frac{\mathbf{p}_C^2}{\mathbf{p}_A^2}$$

式中 J_A、J_B、J_C、J_D 是粒子 A、B、C、D 的自旋，$\mathbf{p}_A$、$\mathbf{p}_C$ 是质心系中粒子 A、C 的动量。将上式应用于反应 (2.3.19)，得到：

$$\frac{1}{2}(2J_p+1)^2\mathbf{p}_p^2\sigma_{\text{正向}} = (2J_d+1)(2J_{\pi^+}+1)\mathbf{p}_\pi^2\sigma_{\text{逆向}}$$

式中左边因子 $\frac{1}{2}$ 是由于两个质子 pp 是全同粒子，Pauli 原理要求其自旋必须反平行，因此自旋态数目减少一半。已知质子和氘核 d 的自旋分别是 $J_p = \frac{1}{2}$，$J_d = 1$，代入上式得到：

$$2J_{\pi^+}+1 = \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbf{p}_p^2}{\mathbf{p}_\pi^2}\right)^2\frac{\sigma_{\text{正向}}}{\sigma_{\text{逆向}}}$$

可见，只要测出 p 和 π^- 的动量以及正逆向过程的截面，即可求出 π^+ 介子的自旋。1953 年 W.F. Cartwright 等根据以上方法实验证实[5]：

$$J_{\pi^+} = 0$$

例 4：π^0 介子的自旋 可以通过 $\pi^0 \to \gamma\gamma$ 过程来确定。记两个光子在质心系中的动量为 $\mathbf{k}$ 和 $-\mathbf{k}$，极化矢量为 $\boldsymbol{\epsilon}_1$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}_2$。如果 π^0 自旋为 1，那么末态双光子系统自旋也为 1，其波函数必须具有矢量形式。注意到光子是横向极化的，即 $\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{k} = \boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{k} = 0$，则由 $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \mathbf{k}$ 只可能构成如下三种矢量形式：

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{\epsilon}_2, \qquad (\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2)\mathbf{k}, \qquad [(\boldsymbol{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{\epsilon}_2) \cdot \mathbf{k}]\mathbf{k}$$

这几种矢量形式对于两个光子的交换：

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 \rightleftharpoons \boldsymbol{\epsilon}_2, \qquad \mathbf{k} \rightleftharpoons -\mathbf{k}$$

都将改变符号，即波函数必须反对称。但是双光子系统是玻色子系统，波函数必须满足交换对称性。两者矛盾，因而 π^0 自旋不能为 1。另外实验发现如下氢原子俘获低能 π^- 而发生电荷交换反应：

$$\pi^- \ + \ p \ \rightarrow \ \pi^0 \ + \ n$$

该反应的截面相当大。已知 π^-, p, n 自旋分别为 $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$，因此 π^0 的自旋必须 $J_{\pi^0} < 2$，否则破坏角动量守恒。综上所述，π^0 的自旋为零。这也与核力的电荷无关性一致。

例 5：K^0 介子的自旋可以通过测量其 $2\pi^0$ 衰变过程末态产物 π^0 的角分布确定：

$$K^0 \ \rightarrow \ \pi^0 \ + \ \pi^0$$

对于两个 π^0 组成的系统，已知 π^0 的自旋为零，因此系统总自旋为零。根据 (2.3.18) 式，全同粒子系统的轨道角动量 L 应该是偶数，因此系统的总角动量或自旋为偶数。在 K^0 质心系中，实验测得 K^0 的衰变产物 π^0 介子的角分布未各向同性，说明 K^0 介子的自旋为零。

粒子物理学有一个很有用的物理量称为**螺旋度 (helicity)**，它定义为粒子的自旋 $\mathbf{S}$ 在动量方向 $\mathbf{p}$ 的投影：

$$\boxed{h \equiv \frac{2\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}} \tag{2.3.20}$$

有质量粒子的螺旋度与惯性参考系有关。如果在实验室系中测得粒子的螺旋度为 h，那么在另一个沿着粒子运动方向，且运动速度大于粒子运动速度的参考系中，测得的螺旋度为 $-h$。因此只有对于无质量的粒子，或者处在极端相对论情形的粒子 (粒子质量可以忽略)，在任何系统中总是以光速运动，才有确定的螺旋度。

自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子有两个螺旋度本征态。如果粒子的自旋沿着它的运动方向 z'，即自旋本征值为 $s_{z'} = +\frac{1}{2}$，那么称粒子处在螺旋度为 $h = +1$ 的螺旋度本征态，或者该粒子是**右手 (right handed)** 的，如果粒子的自旋逆着它的运动方向，即 $s_{z'} = -\frac{1}{2}$，则称粒子处在 $h = -1$ 的螺旋度本征态，是**左手 (left handed)** 的，如图 2.9 所示。

中微子和反中微子是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的无质量粒子，它们的螺旋度似乎应该有两种。但是实验发现：在自然界中，中微子的自旋方向总是逆着其运动方向，即中微子是左旋的；反中微子的自旋方向总是沿着其运动方向，即反中微子是右旋的。正是在这个意义上，我们说反中微子不是中微子的反粒子。

[5]参阅文献：Cartwright W.F. *et al.*, (1953) *Phys. Rev.* **91** 677-688



图 2.9: 粒子或反粒子沿着 z' 运动时的螺旋度以及右手和左手。

2.3.3 电荷

电荷不因运动变化，是 Lorentz 不变量。电荷还具有量子性，实验上找到的粒子的电荷都是电子电荷 e 的整数倍。电荷量子化可以通过测量质子和电子的电荷差检验。目前实验在相当高的精度下检验了电荷量子化：

$$\frac{|Q_p|-|Q_e|}{|Q_e|}<10^{-21}$$

1931 年 Dirac 指出理论上允许存在磁单极 (magnetic monopole)，磁单极的磁荷 g 与任意粒子的电荷 Q 满足如下关系：

$$Qg=\frac{n}{2},\quad n=0,1,2,\cdots$$

如果磁单极存在，则电荷必然是量子化的。不过目前实验上尚未确定磁单极的存在。

对于所有相互作用均存在电荷守恒定律，即反应前粒子的电荷之和等于反应后粒子的电荷之和。实验上，人们通过寻找电子衰变过程给出电荷守恒定律的适用范围。这是因为电子是质量最轻的带电粒子，它只能通过破坏电荷守恒定律的过程而衰变。目前实验表明：

$$\tau_e>4\times10^{26}\text{ 年}$$

因而电荷守恒定律严格成立。理论上可以由 U(1) 规范变换下的不变性导出电荷守恒，这种不变性反映了带电粒子和中性粒子波函数的相对相位的不可分辨性。其他一些相加性量子数如 $\mathcal{B},S,B,C,T,L_e,L_\mu,L_\tau$，它们的守恒定律的实质都在于物理规律的第一类规范变换。第 节将就 U(1) 规范不变性做出具体讨论。

现已发现的粒子的电荷最大数值为 2，例如 Δ^{++} 粒子。虽然强子的夸克模型指出夸克带有分数电荷，即 u,c,t 夸克的电荷为 $\frac{2}{3}e$，d,s,b 夸克的电荷为 $-\frac{1}{3}e$。但是夸克禁闭在强子中，自由夸克不存在。目前实验还没有关于自由夸克存在的证据，因而也不存在自由的分数电荷。如果存在自由的分数电荷，将动摇电子、质子作为电荷基元的地位，具有重要的理论意义。

2.3.4 同位旋

同位旋是粒子物理学最早遇到的内部对称性，是 1932 年由 Heisenberg 提出来的。当时根据核力和电荷无关的实验事实，在强作用范围内可以把质子和中子视为核子的两种不同的电荷状态，规定核子同位旋为 $I=\frac{1}{2}$，其第三分量 $I_3=+\frac{1}{2}$ 代表质子，$I_3=-\frac{1}{2}$ 代表中子：

$$p=\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle,\qquad n=\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

当存在电磁相互作用时，这两种核子因荷电不同而显示出差异。同位旋概念完全可以比照电子的自旋，两者在形式上相同，可以用同样的数学工具SU(2) 群来处理。由于同位旋把不同电荷的粒子统一起来，故可以规定 I_3 的本征态也就是电荷取确定值的态。

二十世纪五十年代，发现 π、K、Δ 等强作用粒子都有同位旋：

$$\pi^+ = |1,+1\rangle, \qquad \pi^0 = |1,0\rangle, \qquad \pi^- = |1,-1\rangle$$
$$K^+ = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad K^0 = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$\Delta^{++} = \left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle, \qquad \Delta^{+} = \left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad \Delta^{0} = \left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad \Delta^{-} = \left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$$

在它们参与的强作用过程中，同位旋守恒定律也成立，从那以后同位旋理论得到广泛应用，成为粒子物理学中极其有用的概念。实验表明：同位旋量子数 I 和 I_3 是强相互作用的守恒量，在弱相互作用中被破坏，在电磁相互作用中 I 不守恒，I_3 仍然守恒。

同位旋守恒的物理基础是强相互作用的电荷无关性。由于强作相互用的哈密顿量 $\hat{H}$ 对于交换两个核子具有不变性，这就要求 $\hat{H}$ 中只包含同位旋 I，不包括反映电荷状态的 I_3，即：

$$\hat{H} = \hat{H}(I)$$

在考虑同位旋破坏时，由于弱作用强度很小，因此通常只需考虑电磁作用对 I 的破坏。于是可以把系统的总哈密顿量写成两部分：

$$\hat{H} = \hat{H}_s(I) + \hat{H}_{em}(I, I_3)$$

式中 $\hat{H}_s(I)$、$\hat{H}_{em}(I,I_3)$ 分别是强作用部分和电磁作用部分的哈密顿量，前者只与 I 有关，后者还与 I_3 有关，体现同位旋的破坏。

同位旋守恒对强作用的过程给出了很强的限制和预言。考虑 π 介子与核子 N 的散射。电荷守恒定律允许存在如下六个弹性散射过程和四个非弹性散射过程：

$$\begin{array}{ll}
(a)\ \pi^+ + p \to \pi^+ + p & \\
(b)\ \pi^0 + p \to \pi^0 + p & (g)\ \pi^+ + n \to \pi^0 + p \\
(c)\ \pi^- + p \to \pi^- + p & (h)\ \pi^0 + p \to \pi^+ + n \\
(d)\ \pi^+ + n \to \pi^+ + n & (i)\ \pi^0 + n \to \pi^- + p \\
(e)\ \pi^0 + n \to \pi^0 + n & (j)\ \pi^- + p \to \pi^0 + n \\
(f)\ \pi^- + n \to \pi^- + n &
\end{array} \tag{2.3.21}$$

由于 π 介子同位旋为 1，核子同位旋为 $\frac{1}{2}$，所以 πN 系统的同位旋可以取 $\frac{3}{2}$、$\frac{1}{2}$。因此根据强作用中同位旋与 I_3 无关，可知只有两种基本散射矩阵元：

$$\mathcal{M}_3 = \left\langle \frac{3}{2}, I_3 \middle| \hat{H} \middle| \frac{3}{2}, I_3 \right\rangle, \qquad \mathcal{M}_1 = \left\langle \frac{1}{2}, I_3 \middle| \hat{H} \middle| \frac{1}{2}, I_3 \right\rangle \tag{2.3.22}$$

利用 Clebsch-Gordan 系数，把 πN 物理系统用同位旋态展开：

$$\begin{aligned}
|\pi^+ p\rangle &= |1,\ \ 1\rangle\left|\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{3}{2},\ \ \frac{3}{2}\right\rangle \\
|\pi^0 p\rangle &= |1,\ \ 0\rangle\left|\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2},\ \ \frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}\right\rangle \\
|\pi^- p\rangle &= |1,-1\rangle\left|\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\
|\pi^+ n\rangle &= |1,\ \ 1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2},\ \ \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}\right\rangle \\
|\pi^0 n\rangle &= |1,\ \ 0\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\
|\pi^- n\rangle &= |1,-1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle
\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

利用 (2.3.22)、(2.3.23) 式容易得到 (2.3.21) 式表示的十个过程的散射振幅：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_f = \mathcal{M}_3 \\
&\mathcal{M}_b = \mathcal{M}_e = \frac{2}{3}\mathcal{M}_3 + \frac{1}{3}\mathcal{M}_1 \\
&\mathcal{M}_c = \mathcal{M}_d = \frac{1}{3}\mathcal{M}_3 + \frac{2}{3}\mathcal{M}_1 \\
&\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_h = \mathcal{M}_i = \mathcal{M}_j = \frac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{M}_3 - \frac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{M}_1
\end{aligned}$$

显然上式中只有 $\mathcal{M}_3$、$\mathcal{M}_1$ 和它们之间的相对相位是独立的，共有三个独立变量，因此 πN 过程的十个散射截面只有三个需要独立测量的量。实验上容易测量的是带电 π 介子与质子的散射过程 (a)、(c)、(j)，这几个过程之间应有如下截面关系：

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9|\mathcal{M}_3|^2 : |\mathcal{M}_3 + 2\mathcal{M}_1|^2 : 2|\mathcal{M}_3 - \mathcal{M}_1|^2$$

当质心系能量 ~ 1232 MeV 时，πN 形成共振态 Δ。我们知道 Δ 粒子同位旋为 $I = \frac{3}{2}$，因此在共振跃迁发生时 $\mathcal{M}_3 \gg \mathcal{M}_1$，此时 πN 散射的各截面应有：

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = 9 : 1 : 2$$

总截面之间有如下关系：

$$\frac{\sigma_{\text{total}}(\pi^+ p)}{\sigma_{\text{total}}(\pi^- p)} = \frac{9}{1+2} = 3 \tag{2.3.24}$$

图 2.10 所示为 $\pi^\pm$ 介子与 p 散射的总截面。实验测得：

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{total}}(\pi^+ p) &= 195\,\text{mb} \\
\sigma_{\text{total}}(\pi^- p) &= 65\,\text{mb}
\end{aligned}$$

与同位旋理论预言 (2.3.24) 完全一致。

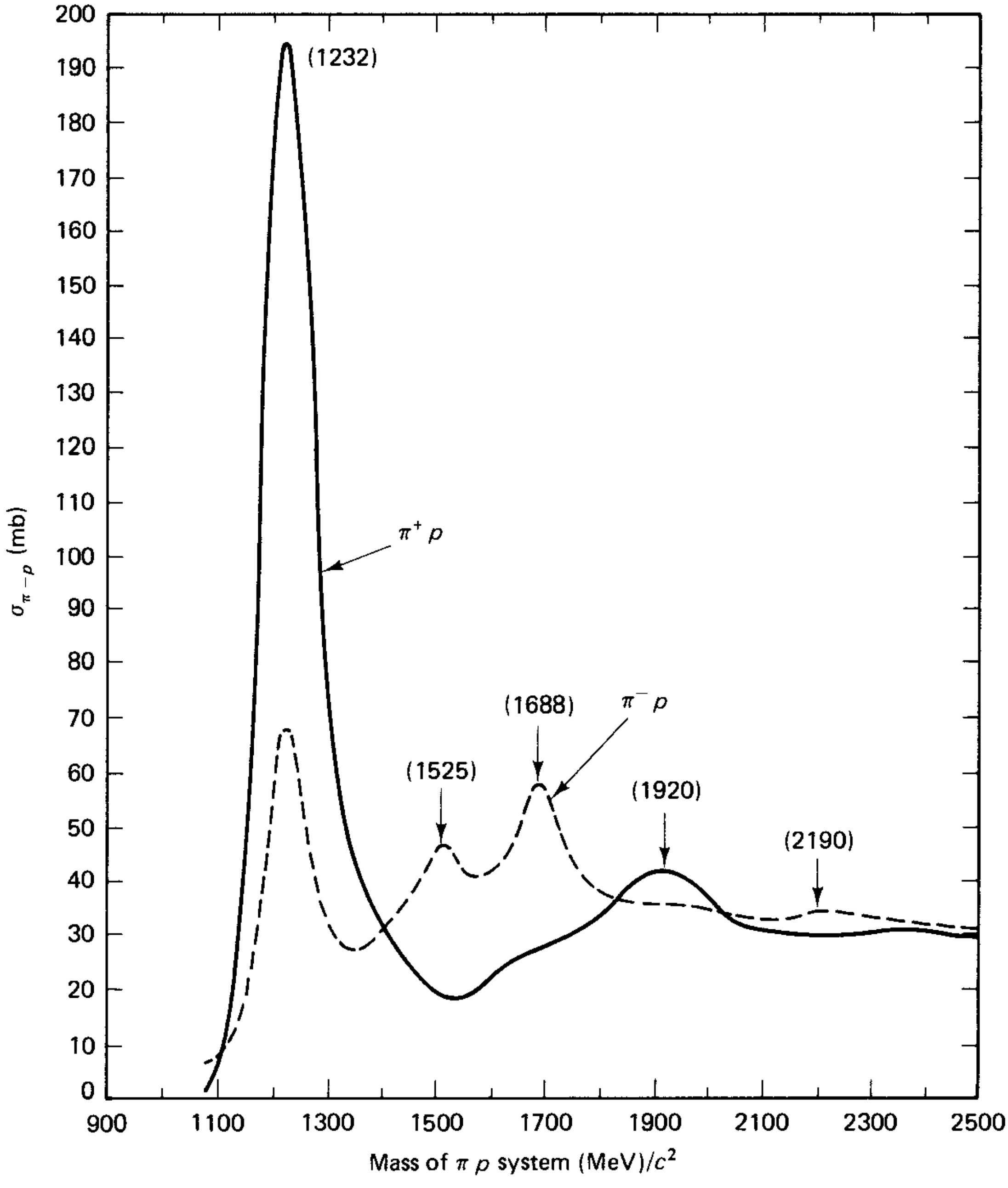


图 2.10: $\pi^{\pm}$ 介子与 p 散射的总截面。实线为 $\pi^{+}p$，虚线为 $\pi^{-}p$。

表 2.3: 夸克的相加性量子数 Q、$\mathcal{B}$、I、I_3、S、C、B 和 T

夸克	Q	$\mathcal{B}$	I	I_3	S	C	B	T
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
s	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	-1	0	0	0
c	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	1	0	0
b	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	-1	0
t	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	1

2.3.5 重子数和夸克数

夸克较轻子多了许多描述夸克特性的相加性量子数，包括 I、I_3、$\mathcal{B}$ 和夸克数。夸克数是指奇异数 S、粲数 C、底数 B 和顶数 T。表 2.3 给出了夸克的相加性量子数。

强子由夸克束缚而成，它也有上述这些相加性量子数。考虑到所有夸克的重子数都是 $\frac{1}{3}$，反夸克的重子数都是 $-\frac{1}{3}$，强子的重子数为：

$$\mathcal{B} \equiv \frac{1}{3}(N_q - N_{\overline{q}}) \tag{2.3.25}$$

式中 N_q 和 $N_{\overline{q}}$ 是强子中夸克和反夸克的数目。强子的奇异数、粲数和底数定义如下：

$$S \equiv -(N_s - N_{\overline{s}}) \tag{2.3.26}$$

$$C \equiv \quad N_c - N_{\overline{c}} \tag{2.3.27}$$

$$B \equiv -(N_b - N_{\overline{B}}) \tag{2.3.28}$$

式中 N_s、N_c 和 N_b 是组成强子的奇异夸克、粲夸克和底夸克的数目，$N_{\overline{s}}$、$N_{\overline{c}}$ 和 $N_{\overline{b}}$ 是相应的反夸克数目。由于 t 夸克不形成强子态，因此不需要定义强子的顶数，或者说所有强子的顶数均为 0。

强子没有代表 up 夸克的上数和 down 夸克的下数，这是因为上、下数的概念是多余的，同位旋及其第三分量可以区分上下夸克数。上、下数也可以根据强子的 $Q,\mathcal{B}$ 以及夸克数 S,C,B 得到。利用能够组成强子的五种夸克，可知 $\mathcal{B}$ 和 Q 为：

$$\mathcal{B} = \frac{1}{3}[(N_u + N_d + N_s + N_c + N_b) - (N_{\overline{u}} + N_{\overline{d}} + N_{\overline{s}} + N_{\overline{c}} + N_{\overline{b}})]$$
$$Q = \frac{2}{3}\left(N_u - N_{\overline{u}} + N_c - N_{\overline{c}}\right) - \frac{1}{3}\left(N_d - N_{\overline{d}} + N_s - N_{\overline{s}} + N_b - N_{\overline{b}}\right)$$

利用 (2.3.26)、(2.3.27) 和 (2.3.28) 式，得：

$$\mathcal{B} = \frac{1}{3}(U + D - S + C - B)$$
$$Q = \frac{2}{3}(U + C) - \frac{1}{3}(D - S - B)$$

其中 $U = N_u - N_{\overline{u}}$ 和 $D = N_d - N_{\overline{d}}$ 分别是强子的上数和下数，可以通过上式求得。

2.4 相乘性量子数

如果一个复合系统的总守恒量是其各组成部分的相应守恒量的乘积，则称该守恒量为相乘性守恒量，相应的量子数为**相乘性量子数 (multiplicative quantum number)**。P 宇称、C 宇称、G 宇称、CP 宇称都是相乘性量子数，它们都没有经典对应。实验发现，这些相乘性量子数在强作用和电磁作用中守恒，在弱相互作用中守恒被破坏。

2.4.1 空间反射变换和 P 宇称

所谓**空间反射 (spatial inversion)** 变换是指将系统波函数的空间坐标 $\mathbf{r}$ 对坐标系原点进行反射变换，即把 $\mathbf{r}$ 变换成 $-\mathbf{r}$，称为 P 变换，通常用算符 $\hat{P}$ 表示。虽然对于系统中一个特定的点来说，P 变换的效果等价于某种转动，但是对于整个系统而言，P 变换不能完全等效于某种转动。因此空间反射变换是一种典型的分立变换。

在空间反射变换下，位置 $\mathbf{r}$、速度 $\mathbf{v}$、动量 $\mathbf{p}$、电场 $\mathbf{E}$、电偶极矩 $\mathbf{d}$ 等改变符号，它们是极矢量，简称矢量。轨道角动量 $\mathbf{L}$、自旋 $\mathbf{S}$、磁场 $\mathbf{H}$、磁感应 $\mathbf{B}$、磁距 $\boldsymbol{\mu}$ 等不变号，它们是轴矢量或赝矢量。两个矢量的叉乘是赝矢量，例如 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$。一个矢量和一个赝矢量的点乘是赝标量，例如螺旋度 $\frac{2\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$。

我们用 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 表示粒子波函数，根据 P 变换定义，有

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(-\mathbf{r}, t) \tag{2.4.1}$$

如果作两次 P 变换，波函数将回到原有形式

$$\hat{P}^2\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{P}\psi(-\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t)$$

因此 $\hat{P}$ 的本征值可取为：

$$P = \pm 1 \tag{2.4.2}$$

这是个确定的量子数，称为**内禀宇称 (intrinsic parity)**，简称 P 宇称，$\hat{P}$ 称为 P 宇称算符。在不会导致混淆的情况下，也称 P 宇称为宇称。如果粒子波函数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 在 P 变换下不变，这时称波函数的 P 宇称为正，或具有偶宇称。如果波函数在 P 变换下改变符号，则波函数的 P 宇称为负，或具有奇宇称。如果在 P 变换下，粒子波函数既不是原来的波函数，也不是原来波函数的反号，则称此波函数没有确定的 P 宇称，或具有混合宇称。

讨论由两个粒子 a 和 b 构成的双粒子系统，忽略 a 和 b 之间的相互作用，系统总波函数可写为：

$$|\psi\rangle = |a\rangle|b\rangle|\phi\rangle \tag{2.4.3}$$

式中 $|a\rangle$、$|b\rangle$ 是粒子 a、b 的内禀波函数，$|\phi\rangle$ 是描述 a、b 相对运动的波函数。我们在 2.3.2 节中已经发现，对于双粒子系统，交换两个粒子的变换 $\hat{P}_{12}$ 等同于空间反射变换 $\hat{P}$。于是有：

$$\hat{P}|\phi\rangle = (-1)^L|\phi\rangle \tag{2.4.4}$$

式中 L 是粒子的轨道角动量量子数。总波函数 (2.4.3) 的空间反射变换为：

$$\hat{P}|\psi\rangle = \hat{P}|a\rangle\hat{P}|b\rangle\hat{P}|\phi\rangle = P_aP_b(-1)^L|a\rangle|b\rangle|\phi\rangle = P_aP_b(-1)^L|\psi\rangle$$

其中 P_a、P_b 是粒子 a、b 内禀波函数的内禀宇称。故双粒子系统的宇称为：

$$\boxed{P_{ab} = P_a P_b (-1)^L} \tag{2.4.5}$$

显然两个具有相同内禀宇称的粒子组成的系统的内禀宇称是 $P_{ab} = (-1)^L$。更多粒子组成的系统，可以看成是一系列双粒子系统，从而求得多粒子系统的宇称。

强子的内禀宇称是由它们的组份夸克或反夸克的内禀宇称，以及强子组份之间相对运动部分波函数的 P 宇称决定的。内禀宇称是相对于某一层次而言的。例如在强子这一层次，强子的宇称就是内禀宇称，在夸克层次上，强子的宇称不是内禀的。

粒子的内禀宇称与粒子内部运动的对称性有关，其波函数不像轨道运动波函数那样可以给出明显的形式，因此确定内禀宇称不像确定角动量本征态的宇称那么简单。基本粒子中的玻色子具有确定的宇称，费米子因为总是成对产生和消失，所以它们的宇称是相对，需要人为规定。由此可知纯中性粒子具有确定的内禀宇称，非纯中性粒子的内禀宇称只有相对的意义。根据量子场论，正反费米子的内禀宇称相反，正反玻色子的内禀宇称相同。

例 1：光子的内禀宇称是由光子内禀波函数的空间反射特性决定的，而光子波函数可以用四维矢势 $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ 描写，在真空中为：

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

已知 $\mathbf{E}$、$\boldsymbol{\nabla}$ 是矢量，$\mathbf{B}$ 是赝矢量，两个矢量的叉乘是赝矢量，从上面两式中的任意一式均可得到 $\mathbf{A}$ 是矢量，它在 P 变换下反号 $\mathbf{A} \xrightarrow{\hat{P}} -\mathbf{A}$。由于 P 宇称只与 A^μ 的空间部分有关，因此光子具有负的内禀宇称：

$$P_\gamma = -1 \tag{2.4.6}$$

例 2：纯中性粒子 π^0 的宇称可以通过研究 $\pi^0 \to \gamma\gamma$ 中两个光子极化平面的取向确定。实验测得两个光子的极化平面是垂直的，因此可以判定 π^0 具有负的内禀宇称：

$$P_{\pi^0} = -1 \tag{2.4.7}$$

例 3：粒子反粒子组成的纯中性系统也有确定的内禀宇称，根据 (2.4.5) 式，注意正反费米子的内禀宇称相反，正反玻色子的内禀宇称相同，可以得到：

$$\begin{aligned} P_{f\bar{f}} &= (-1)^{L+1} \\ P_{b\bar{b}} &= (-1)^L \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

其中 L 是正反粒子相对运动轨道角动量量子数。

例 4：对于非纯中性粒子，人们规定质子、中子和 Λ 超子的内禀宇称为正：

$$P_p = P_n = P_\Lambda = +1 \tag{2.4.9}$$

其他粒子的内禀宇称可以通过它们的产生和衰变过程，根据宇称守恒要求来确定。

例 5：属于同一组超多重态的成员具有相同的内禀宇称。重子八重态和十重态具有正的内禀宇称，介子八重态具有负的内禀宇称。

例 6：粒子 a、b 发生碰撞产生粒子 c、d。已知初态粒子之间的轨道角动量为 L_i，末态粒子之间的轨道角动量为 L_f。设反应过程中宇称守恒，则有：

$$P_a P_b (-1)^{L_i} = P_c P_d (-1)^{L_f} \tag{2.4.10}$$

例如 π^- 介子的宇称可以利用它与液态氘核靶 ($P_d = +1$) 反应生成两个中子的过程确定。反应过程及各粒子的已知自旋宇称量子数 J^P 如下：

$$\begin{array}{cccccccccc} & \pi^- & + & d & \rightarrow & n & + & n \\ J^P & 0^? & & 1^+ & & \frac{1}{2}^+ & & \frac{1}{2}^+ \end{array}$$

这个反应属于强相互作用过程，宇称守恒。根据 (2.4.10) 式，我们必须确定初态和末态的 L_i 和 L_f 的可能取值。实验发现在反应过程中 π^- 介子可以被液态氘靶慢化并俘获，构成奇特原子，随即发出一系列的奇特原子的 K_a 特征辐射，说明是 π^- 进入 K 壳层的反应，因而 $L_i = 0$。关于末态 L_f，考虑到两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的中子构成全同费米子系统，总自旋量子数 S_f 可以是 0,1，各种可能的角动量量子数组合及谱学态如下表所示：

L_f	0	0	1	1	2	2
S_f	0	1	0	1	0	1
$J = L_f + S_f, \cdots, \lvert L_f - S_f \rvert$	0	1	1	2,1,0	2	3,2,1
$^{2S+1}\mathrm{L}_J$	$^1\mathrm{S}_0$	$^3\mathrm{S}_1$	$^1\mathrm{P}_1$	$^3\mathrm{P}_{0,1,2}$	$^1\mathrm{D}_2$	$^3\mathrm{D}_{1,2,3}$

其中只有 $^1\mathrm{S}_0$、$^3\mathrm{P}_{0,1,2}$、$^1\mathrm{D}_2$ 满足双全同粒子系统自旋统计 $L_f + S_f =$ 偶数的要求。最后考虑到初态总角动量 $\mathbf{J} = \mathbf{L}_i + \mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i$，即 $J = 0 \oplus 1 = 1$，根据总角动量守恒，末态两中子只能以 $^3\mathrm{P}_1$ 态存在，故 $L_f = 1$。由 (2.4.10) 式，得到：

$$P_{\pi^-} = 0^-$$

例 8：量子力学的微扰论可以很好地处理原子或原子核的电磁辐射过程。从初态 $|i\rangle$ 到末态 $|f\rangle$ 辐射过程的跃迁概率正比于 $|\langle f|\hat{H}_{\mathrm{em}}|i\rangle|^2$，其中 $\langle f|\hat{H}_{\mathrm{em}}|i\rangle$ 可以通过 Taylor 展开分解为各种电磁相互作用过程：

$$\begin{array}{ll} \langle f|\hat{\mathbf{d}}|i\rangle & \text{电偶极跃迁 } E1 \\ \langle f|\hat{\boldsymbol{\mu}}|i\rangle & \text{磁偶极跃迁 } M1 \end{array}$$

考虑到电偶极矩 $\hat{\mathbf{d}}$ 在 P 变换下反号，磁偶极矩 $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ 在 P 变换下不变，故有

$$\hat{P}\langle f|\mathbf{d}|i\rangle = -P_f P_i \langle f|\mathbf{d}|i\rangle$$
$$\hat{P}\langle f|\boldsymbol{\mu}|i\rangle = +P_f P_i \langle f|\boldsymbol{\mu}|i\rangle$$

其中 P_f 和 P_i 分别是末态原子 (核)和初态原子 (核)的内禀宇称。由此得到电偶极和磁偶极跃迁的宇称选择定则：

$$\begin{aligned} \text{若 } P_f P_i = +1\text{，则 } & \langle f|\hat{\mathbf{d}}|i\rangle = 0\text{，即 } E1\text{禁戒} \\ & \langle f|\hat{\boldsymbol{\mu}}|i\rangle \neq 0\text{，即 } M1\text{允许} \\ \text{若 } P_f P_i = -1\text{，则 } & \langle f|\hat{\mathbf{d}}|i\rangle \neq 0\text{，即 } E1\text{允许} \\ & \langle f|\hat{\boldsymbol{\mu}}|i\rangle = 0\text{，即 } M1\text{禁戒} \end{aligned}$$

电磁相互作用过程中宇称守恒，因此 $E1$ 电偶极 (矢量 V 耦合) 跃迁只能在初态和末态宇称相反的态之间进行，$M1$ 磁偶极 (轴矢量 A 耦合) 跃迁只能在初态和末态宇称相同的态之间进行。

1947 年发现奇异粒子后，在对最轻的奇异粒子衰变过程的研究中遇到 $\theta-\tau$ 困惑。实验发现两个带电粒子 θ^+ 和 τ^+，其中 θ^+ 衰变为两个 π 介子，τ^+ 衰变为三个 π 介子：

$$\begin{aligned} \theta^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0 \\ \tau^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \end{aligned}$$

通过重建末态 π 介子的不变质量，发现 θ^+ 和 τ^+ 的质量几乎相等 (~ 500MeV)。实验发现它们的寿命也没有什么差别，都在 10^{-8}s 量级，是典型的弱作用过程。它们都带基本电荷，自旋都为零，所有这些说明 θ^+ 和 τ^+ 似乎是同一种粒子。

但是对 θ^+ 和 τ^+ 不同衰变末态 $\pi^+\pi^0$ 和 $\pi^+\pi^+\pi^-$ 的宇称分析说明它们的宇称相反。实际上，对于 $\theta^+ \to \pi^+\pi^0$ 衰变过程，2π 系统的宇称为：

$$P_{\pi^+\pi^0} = p_{\pi^+} p_{\pi^0} (-1)^L = (-1)^L$$

已知 θ^+ 的自旋 $J=0$，π 是自旋为零的赝标介子，根据总角动量守恒，2π 系统的轨道角动量 $L=0$，故 2π 系统的宇称为正。对于 $\tau^+ \to \pi^+\pi^+\pi^-$ 衰变过程，我们以 L_1 代表 π^+ 与 π^+ 相对运动的轨道角动量，以 L_2 代表 π^- 与 $\pi^+\pi^+$ 系统相对运动的轨道角动量。则 3π 系统的宇称是：

$$P_{\pi^+\pi^+\pi^-} = P_{\pi^+} P_{\pi^+} P_{\pi^-} (-1)^{L_1} (-1)^{L_2}$$

已知 τ^+ 的自旋 $J=0$，根据总角动量守恒，$\mathbf{J} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = 0$，即 $\mathbf{L}_1 = -\mathbf{L}_2$，或者 $L_1 = L_2$。于是 3π 系统的宇称为负。当时人们认为宇称守恒是普遍的定律，即一个孤立系统的宇称不随时间变化，一个具有确定的奇或偶宇称的系统，将永远保持奇或偶宇称，当系统内部发生变化时，变化前系统的宇称等于变化后系统的宇称。如果支配 θ^+ 和 τ^+ 的衰变的弱相互作用过程中宇称守恒，则以上分析表明 θ^+ 的宇称为正，τ^+ 的宇称为负，它们不可能是同一种粒子。这就是历史上所谓的 $\theta-\tau$ 困惑。

面对这种困惑，李政道和杨振宁分析了许多实验资料，发现在强相互作用和电磁相互作用过程中，宇称守恒为许多实验所证实，但是还没有任何一个检验弱相互作用过程中宇称守恒的实验。由此李、杨指出在弱相互作用过程中宇称不守恒，θ^+ 和 τ^+ 是同一种粒子，现在称为 K^+ 介子，K^+ 衰变为 $\pi^+\pi^0$、$\pi^+\pi^+\pi^-$ 等不同末态。

李、杨还建议了一些检验弱作用过程中宇称不守恒的实验。这里我们追随他们的推理，考虑如何检验原子核的 β 衰变过程 $N^* \to N + e + \nu$ 中的宇称破坏。在质心系中，最容易想到的运动学变量有 $\mathbf{p}_N, \mathbf{p}_e, \mathbf{p}_\nu$ 等三个，利用这三个变量，可以作如下组合：

- 标量，例如 $\mathbf{p}_N \cdot \mathbf{p}_e$。但是标量在空间反射变换下不变，不破坏宇称。因此标量是不能用来检验宇称破坏的。

- 混合积，例如 $\mathbf{p}_N \cdot (\mathbf{p}_e \times \mathbf{p}_\nu)$，这是赝标量，在空间反射变化下反号，似乎可以检测宇称破坏。但是由于三个矢量共面，该赝标量恒为零。因此这种由三个矢量的混合积构造的赝标量也是不能用来检验宇称破坏的。

于是问题的关键在于找到一个赝标量，它能反映空间反射变换性质，但不能是三个矢量的混合积。一个轴矢量和矢量的点乘满足上述条件，因而可以用来检验宇称破坏。很容易想到的轴矢量是粒子的自旋 $\mathbf{J}$，矢量仍然选用容易测量的电子动量 $\mathbf{p}_e$。假设实验能提供一种方法使得原子核样本极化，即使得原子核的自旋沿空间某一方向排列，这样其内禀角动量的期望值 $\langle \mathbf{J} \rangle$ 不为零，通过测量正比于赝标量 $\langle \mathbf{J} \rangle \cdot \mathbf{p}_e$ 的可观测物理量，就可以检验弱作用过程中的宇称破坏。

1957 年吴健雄 (C.S. Wu) 在美国国家标准局 (National Bureau of Standards) 首次实验证实弱相互作用过程中宇称不守恒 [6]。首先介绍实验的基本思想。设原子核的自旋朝上，并且逆着原子核的自旋的方向发射电子，那么在这个过程的空间反射变换下，原子核的自旋朝上，动量反向，即空间发射过程相当于顺着原子核的自旋方向发射电子。如果在原子核的 β 衰变中宇称是守恒的，那么以上这两种互为空间反射的过程都能实现，且概率相等。否则就表明宇称破坏。因此只要测量这两个方向的电子发射的概率是否相等就能判断 β 衰变中宇称是否守恒。

图 2.11 是实验装置示意图。实验利用极化原子核 ^{60}Co 的 β 放射性：

$$^{60}\mathrm{Co}\big(J^P=5^+\big)\Uparrow \quad\rightarrow\quad {}^{60}\mathrm{Ni}^{**}\big(J^P=4^+\big)\Uparrow \quad+\quad e^- \quad+\quad \overline{\nu}_e$$

极化原子核 ^{60}Co 衰变到 $^{60}\mathrm{Ni}^{**}$ 的过程中，子核与母核具有相同的极化方向。随后激发态核 $^{60}\mathrm{Ni}^{**}$ 发生级联电磁衰变，放出光子，并且继续保持极化方向：

$$\begin{array}{lclcl}
^{60}\mathrm{Ni}^{**}\big(J^P=4^+\big)\Uparrow & \rightarrow & ^{60}\mathrm{Ni}^{*}\big(J^P=2^+\big)\Uparrow & + & \gamma(1.173\,\mathrm{MeV}) \\
^{60}\mathrm{Ni}^{*}\;\big(J^P=2^+\big)\Uparrow & \rightarrow & ^{60}\mathrm{Ni}\;\big(J^P=0^+\big)\Uparrow & + & \gamma(1.332\,\mathrm{MeV})
\end{array}$$

实验的关键在于如何使 ^{60}Co 原子核极化。如果把自旋磁距为 $\boldsymbol{\mu}$ 的原子核置于磁场 $\mathbf{B}$ 中，则自旋磁距相对磁场成一定角度方向的事件概率由 Boltzmann 因子给出：

$$e^{-\frac{\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}}{kT}}$$

其中 k 是 Boltzmann 常数，T 是绝对温度。由于原子核质量很大，其自旋磁距与质量成反比，因此原子核很难极化。上式表明，要使原子核极化，一是要极低的温度，使热运动对原子核自旋取向的影响减弱，二是要加很强的磁场。吴健雄等把 ^{60}Co 混在硝酸铈镁单晶的表面层内。硝酸铈镁单晶是一种顺磁物质，在外磁场作用下可以磁化，产生一个很强的内磁场，可以高达几十 Tesla。超低温通过绝热退磁获得，可以降至 0.004 K 左右。

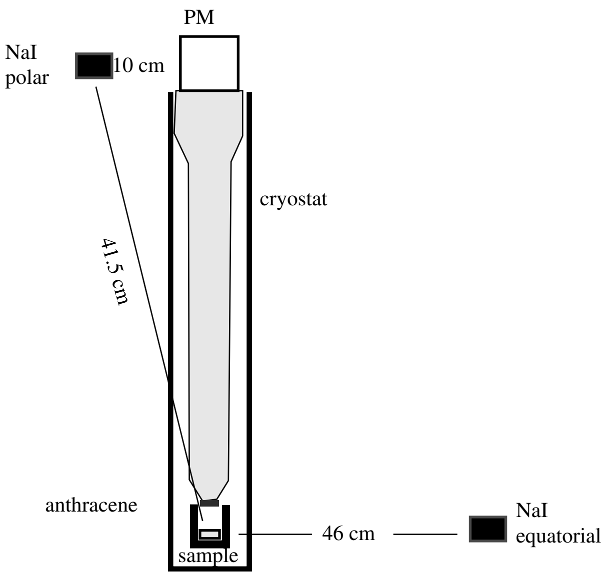


图 2.11: 用极化 ^{60}Co 的 β 衰变检验宇称是否守恒的实验装置示意图。

实验中令外磁场平行于竖直方向 z，可以选择朝上或朝下。加上磁场，使原子核极化，极化方向通过外磁场方向改变。然后关掉磁场，令此时的时间为零，开始记录原子核级联衰变过程中产生的光子和电子数目。

[6] 参阅文献：Wu, C.S. *et al.* (1957) *Phys. Rev.* **105** 1413.

光子数目由两块 NaI 晶体记录，一块垂直自旋方向 (赤道面 $\frac{\pi}{2}$)，另一块大致沿极化核自旋方向 (极点 0)。两块晶体测得的 γ 射线的计数率为 $W_\gamma(\frac{\pi}{2})$ 和 $W_\gamma(0)$，如图 2.12 (a) 所示。根据这两个计数率可以确定原子核的极化度：

$$\epsilon_\gamma = \frac{W_\gamma(\frac{\pi}{2}) - W_\gamma(0)}{W_\gamma(\frac{\pi}{2})}$$

如图 2.12 (b) 所示。由图可见，由于样品温度随着时间不断上升，极化度随时间而减弱，在几分钟后完全非极化。

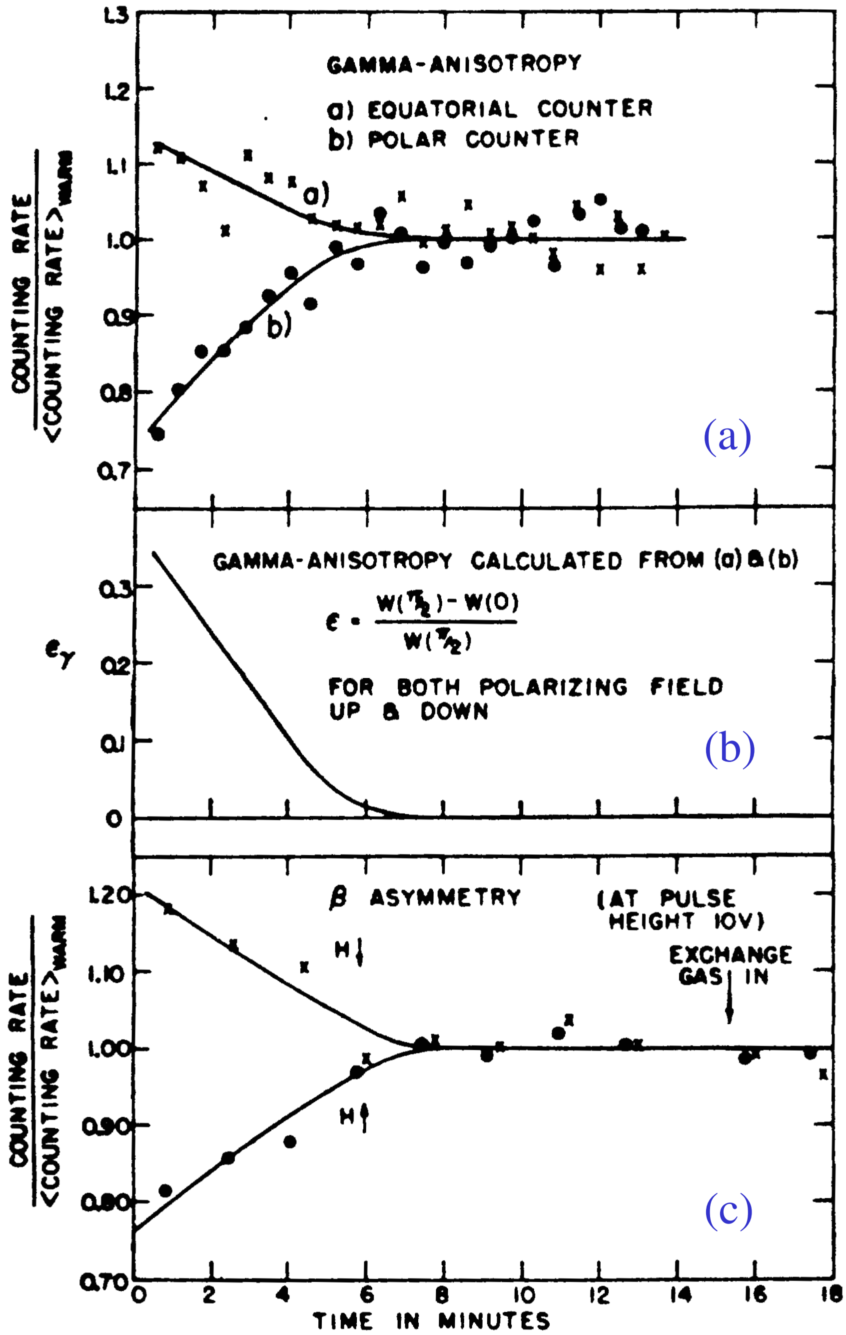


图 2.12: 用极化 ^{60}Co 的 β 衰变检验宇称是否守恒的实验结果。

^{60}Co 原子核发出的电子射入源上方的蒽 (anthracene) 晶体，在晶体中产生荧光通过有机玻璃管传导到光电倍增管记录下来。当磁场方向朝上时，记录的是顺着原子核自旋方向的电子，当磁场方向朝下时，记录的是逆着原子核自旋方向的电子。图 2.12 (c) 是这两种情形下电子的相对计数率随时间的变化，亦即随极化度的变化曲线。当磁场方向朝上时，电子相对计数率小于 1，当磁场方向朝下时，电子相对计数率大于 1。这表明原子核顺着原子核自旋方向和逆着原子核方向的发射电子的概率不等，而是后者大于前者。这就证明了 β 衰变时宇称是不守恒的。

在弱作用中宇称不守恒发现后不久，M. Goldhaber 等人于 1958 年第一次测定了中微子的螺旋度[7]。这是一个精巧的实验，可参阅相关文献。实验测得中微子的螺旋度为 −1，即中微子是左旋的。同时可推论出反中微子是右旋的。自然界中只有左旋的中微子和右旋的反中微子，不存在左旋中微子的宇称变换态 — 右旋中微子，也不存在右旋反中微子的宇称变换态 — 左旋反中微子。这说明在有中微子或者反中微子参与的过程中，空间反射对称性完全破缺。

2.4.2 正反粒子变换和 C 宇称

量子场论认为场的任何一种激发态 (即粒子) 都有与之相应的复共轭的激发态，这在物理上相当于粒子和反粒子。正反粒子变换又称**电荷共轭 (charge conjugation)** 变换或 C 变换，是指把系统内的一切粒子 (反粒子) 换为相应的反粒子 (粒子)，通常用算符 $\hat{C}$ 表示。在 C 变换下，电荷 Q 和所有内部相加性量子数 $I_3, \mathcal{B}, S, C, B, T, L_e, L_\mu, L_\tau$ 等变号，电流密度 $\mathbf{j}$、电场 $\mathbf{E}$、磁感应 $\mathbf{H}$、电磁场矢势 $\mathbf{A}$ 等也变号，但是能量 E、动量 $\mathbf{p}$、角动量 $\mathbf{J}$、位置 $\mathbf{r}$、时间 t 等则保持不变。

我们用 N 代表粒子的电荷和所有内部相加性量子数，相应的粒子态为 $|N\rangle$，反粒子态用 $|-N\rangle$ 表示。先看 C 变换的本征值的可能取值。根据 C 变换定义，有：

$$\hat{C}|N\rangle = |-N\rangle \tag{2.4.11}$$

如果对某一粒子态做两次 C 变换，则应回到原粒子态：

$$\hat{C}^2|N\rangle = \hat{C}|-N\rangle = |N\rangle$$

可见 C 变换的本征值只能取：

$$C = \pm 1 \tag{2.4.12}$$

这是个确定的量子数，称为 C **宇称 (C parity)** 或者电荷宇称。我们称 $C = +1$ 的态为正 C 宇称态，$C = -1$ 的态为负 C 宇称态。

下面讨论 C 变换的本征态。设 $|N\rangle$ 是算符 $\hat{A}$ 的本征态，则：

$$\hat{A}|N\rangle = N|N\rangle \tag{2.4.13}$$

显然：

$$\hat{A}|-N\rangle = -N|-N\rangle \tag{2.4.14}$$

于是联合算符 $\hat{A}\hat{C}$ 和 $\hat{C}\hat{A}$ 分别作用在态 $|N\rangle$ 上，得到：

$$\hat{A}\hat{C}|N\rangle = \hat{A}|-N\rangle = -N|-N\rangle$$
$$\hat{C}\hat{A}|N\rangle = N\hat{C}|N\rangle = N|-N\rangle$$

[7] 参阅文献：Goldbahar, M. *et al.* (1958) *Phys. Rev.* **109** 1015

所以对易关系：

$$[\hat{A},\hat{C}] = 2N|-N\rangle$$

上式表明，只有当 $N=0$ 时，对易关系 $[\hat{A},\hat{C}]=0$，因此只有那些电荷和所有内部相加性量子数为零的态才是 C 变换的本征态。这种 $N=0$ 的粒子是纯中性粒子，反粒子就是粒子本身。

我们考虑由粒子和反粒子组成的系统。系统的相加性量子数全为零，是纯中性系统。可以把粒子和反粒子看成是电荷共轭空间分别处在两种态 $|N\rangle$ 和 $|-N\rangle$ 的全同粒子，称为广义全同粒子。描述广义全同粒子的波函数应包括：位置空间波函数 $|\phi\rangle$、自旋空间波函数 $|\chi\rangle$、电荷共轭空间波函数 $|\xi\rangle$。系统的总波函数可写为：

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle|\chi\rangle|\xi\rangle$$

如果粒子反粒子系统由两个广义全同费米子组成，那么在两个全同费米子交换下，位置空间部分波函数给出因子 $(-1)^L$，自旋空间部分波函数给出因子 $(-1)^{S+1}$，电荷共轭空间部分波函数给出因子 $C_{f\overline{f}}$，系统总波函数满足反对称，即：

$$(-1)^L(-1)^{S+1}C_{f\overline{f}} = -1$$

其中 L 是粒子反粒子相对运动轨道角动量，S 是系统总自旋。于是得到：

$$C_{f\overline{f}} = (-1)^{L+S}$$

如果粒子反粒子系统由两个广义全同玻色子组成，那么在两个全同玻色子交换下，坐标空间部分波函数给出因子 $(-1)^L$，自旋空间部分波函数给出因子 $(-1)^S$，电荷共轭空间部分波函数给出因子 $C_{b\overline{b}}$，系统总波函数满足对称，即：

$$(-1)^L(-1)^S C_{b\overline{b}} = 1$$

同样得到：

$$C_{b\overline{b}} = (-1)^{L+S}$$

可见正反粒子系统的 C 宇称由轨道角动量量子数 L 和总自旋量子数 S 决定：

$$\boxed{C_{a\overline{a}} = (-1)^{L+S}} \tag{2.4.15}$$

根据现有的实验和理论结果，在强相互作用和电磁相互作用过程中，C 宇称守恒，在弱相互作用过程中 C 宇称并不守恒。因此对于强作用和电磁作用反应过程，有如下结论：

- 如果把反应过程中的初态和末态粒子全部换成相应的反粒子，则反应概率、角分布、动量、自旋等物理量都相同。
- 如果反应过程的初态是 $\hat{C}$ 算符的本征态，则末态也必定是 $\hat{C}$ 算符相同本征值的本征态。

自然界中只有左旋的中微子和右旋的反中微子，不存在左旋中微子的 C 宇称变换态 — 左旋反中微子，也不存在右旋反中微子的 C 宇称变换态 — 右旋中微子。这说明在有中微子或者反中微子参与的过程中，正反粒子变换的对称性完全破缺。

例 1： 纯中性粒子光子 γ 是电磁场的量子，它的波函数可以用电磁场的场量 A_μ 来表示，而 A_μ 又由电流密度 j_μ 决定：

$$\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = j_\nu$$

在 C 变换下，电流密度 j_μ 反号，场量 A_μ 也随之改号，因此光子的 C 宇称为负：

$$C_\gamma = -1 \tag{2.4.16}$$

例 2： π^0 介子的 C 宇称可由宇称守恒确定。π^0 通过相互电磁作用衰变为两个光子 $\pi^0 \to \gamma\gamma$，实验表明在电磁作用中 C 宇称是守恒的，考虑到 C 宇称是相乘性量子数，于是 π^0 的 C 宇称是：

$$C_{\pi^0} = C_\gamma \cdot C_\gamma = +1 \tag{2.4.17}$$

例 3： 电子偶素 $(e^- e^+)$ 系统可以通过电磁相互作用湮灭为 n 个光子：

$$(e^- e^+) \to n\gamma$$

电荷共轭宇称守恒给予 n 值某些限制。例如：

- 假设系统处在 $^1\mathrm{S}_0$ 态，即 $L=0$，$S=0$，于是系统的 C 宇称为 $C_{e^-e^+} = (-1)^{L+S} = 1$，由于光子 C 宇称为 -1，因此 n 只能是偶数，即主要衰变为两个光子 $n=2$。
- 假设系统处在 $^3\mathrm{S}_1$ 态，即 $L=0$，$S=1$，则系统的 C 宇称为 $C_{e^-e^+} = -1$，故 n 只能是奇数，即主要衰变为三个光子 $n=3$ (这种情况下，总角动量守恒也禁止2γ 衰变)。

2.4.3 G 宇称

虽然 C 宇称守恒对于强相互作用和电磁相互作用过程做出了很强的预言，但是由于只有纯中性粒子和某些纯中性系统才有确定的 C 宇称，普通介子 (除了 I_3 以及与 I_3 相关的 Q 外，其他内部相加性量子数都为零的粒子) 都不是 $\hat{C}$ 算符的本征态。因此 C 宇称的适用范围受到很大限制。例如 π^+,π^0,π^- 是一组同位旋为 1 的多重态介子，其中 π^0 是纯中性粒子，有确定的 C 宇称，但是 $\pi^\pm$ 都不是。

人们期望能找到适用范围更大的类似 C 宇称的守恒定律，能统一描述同一同位旋多重态的不变性。为此人们构造 G 变换：

$$\hat{G} \equiv \hat{C} I_2(\pi) = \hat{C} e^{i\pi \hat{I}_2} \tag{2.4.18}$$

即 G 变换是绕同位旋第二轴转动 π 角后再作 C 变换的复合变换。在同位旋空间中绕第二轴 I_2 转动 π 角，在形式上与普通空间中绕 y 轴转动 180° 是一样的，这相当于把第一轴和第三轴都反向，这样粒子的 I_3 将反号。再经过 C 变换时，粒子的所有内部相加性量子数都反号，I_3 将再次反号。因此 G 变换不改变 I_3 的值，但是把除 I_3 外的所有其他内部相加性量子数反号。由于普通介子的除 I_3 外的其他所有相加性量子数为零，因此它们都是 G 变换的本征态，有相应的本征值，称为 G 宇称。

显然纯中性粒子仍然是 G 变换的本征态，属于同一组同位旋多重态的介子具有相同的 G 宇称。于是根据 G 变换的定义，立即可知普通介子的 G 宇称为：

$$G = (-1)^I C(I_3 = 0) \tag{2.4.19}$$

其中 I 是同位旋，$C(I_3=0)$ 是同位旋多重态中 $I_3=0$ 的纯中性粒子的 C 宇称。例如 π 介子 $I=1$，$C_{\pi^0}=1$，因此它们的 G 宇称为：

$$G_\pi = -1$$

通常把量子数 I 和 G 统一用符号 I^G 表示。下面列出几个常见介子的 I^G：

$$\begin{aligned} I^G &= 1^- \quad (\pi) \\ I^G &= 0^+ \quad (\eta) \\ I^G &= 1^+ \quad (\rho) \\ I^G &= 0^- \quad (\omega) \\ I^G &= 0^- \quad (\phi) \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

从 G 变换的定义出发，可以得到以下重要性质：

- 一切强子都有确定的 G 变换性质，但是只有普通介子才具有 G 宇称。
- 一个由多个强子组成的系统，如果系统除 I_3, Q 外的所有内部相加性量子数都为零，又有确定的同位旋，并且其相应的 $I_3=0$ 分量具有确定的 C 宇称，则这个系统就有 (2.4.19) 式表示的确定的 G 宇称。特别是对于一对正反粒子组成的具有确定轨道角动量 L 和总自旋 S 的系统：

$$G = (-1)^{I+L+S}$$

❍ 由几个具有确定 G 宇称的子系统组成的系统也具有确定的 G 宇称，对于基态，系统 G 宇称等于各子系统 G 宇称的乘积。例如由 n 个基态 π 介子组成的系统的 G 宇称为 $(-1)^n$。

由于 C 和 I 都是强相互作用中的守恒量，因此 G 宇称在强相互作用中也守恒。但是在电磁相互作用中 I 不守恒，G 宇称也就不守恒了。G 宇称的这个性质在分析普通介子的强衰变时很重要，它给出了很强的限制和预言。需要指出的是 G 宇称的引入并不比 C 宇称守恒和同位旋守恒给出更多的内容。不过在讨论介子的多 π 衰变，或强作用过程中的多 π 产生时，G 宇称是一个比 C 和 I 更完美的量子数，因此它在强作用分析中很有用。

例 1：利用 (2.4.20) 式中几个介子的 I^G 值，根据强作用中 G 宇称守恒可以预言 ρ 介子通过强作用衰变到 $\pi\pi\pi$ 末态是严格禁戒的。

例 2：考虑 ω 粒子的两个衰变道：

$$
\begin{array}{llll}
\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0 & \quad 89.2\% \\
\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^- & \quad 1.53\%
\end{array}
$$

如果只考虑相空间，则 ω 衰变到 2π 的分支比远大于衰变到 3π 的分支比。但是 ω 的 3π 衰变道满足 G 宇称守恒，是强衰变。它的 2π 衰变道违背宇称守恒，只能是电磁衰变。因此前者的分支比远大于后者。

2.4.4 CP 宇称和中性 $K^0\overline{K}^0$ 系统

量子场论中证明了一个基本的定理 − CPT 定理。这个定理指出：对于定域场 (场对应的粒子是点粒子)，如果场满足相对论要求的 Lorentz 协变性，且场对应的粒子满足自旋统计规律，那么运动规律在正反粒子变换 C、空间反射变换 P、时间反演变换 T 的联合变换下保持不变 (与变换的顺序无关)。由于 CPT 定理是从物理学的三个基本假设得来的，因此理论物理学家都相信它。实验也在相当高的精度下证实了 CPT 定理。

1957 年，弱相互作用中 P 宇称不守恒被实验证明以后，人们就提出如下问题：在弱作用中 C 宇称是否守恒？如果 C 宇称不守恒，那么 CP 联合宇称是否守恒？

我们知道实验中只观察到左旋的中微子和右旋的反中微子。在有中微子或者反中微子参与的过程中，P 变换和 C 变换的对称性分别是完全破缺的。但是在 CP 联合变换下，左旋的中微子变为右旋的反中微子，右旋的反中微子变为左旋的中微子，如图 2.13 所示。说明在有中微子或者反中微子参与的过程中，弱相互作用在 CP 联合变换下不再完全破缺，在大多数情况下是完全对称的。例如 $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$ 和 $\pi^- \to \mu^-\overline{\nu}_\mu$ 的衰变概率相等。

但是 1964 年人们在研究长寿命中性 K 介子 K_L^0 衰变的实验中，发现在弱相互作用中有少量 CP 宇称破坏的成分。K_L^0 是奇异介子 K^0 和 $\overline{K}^0$ 的线性混合。K_L^0 衰变过程中 CP 宇称不守恒的结果在当时引起了轰动，因为 CP 宇称不守恒，按照普遍的 CPT 定理可以得出弱相互作用在时间反演 T 变换下也不守恒。在随后的 35 年中，CP 破坏的实验观测一直限于 $K^0\overline{K}^0$ 系统。直到最近，人们才在 $B^0\overline{B}^0$ 系统中也观测到 CP 破坏现象。下面我们具体讨论 $K^0\overline{K}^0$ 系统，对弱作用下的 CP 破坏作定量描写。

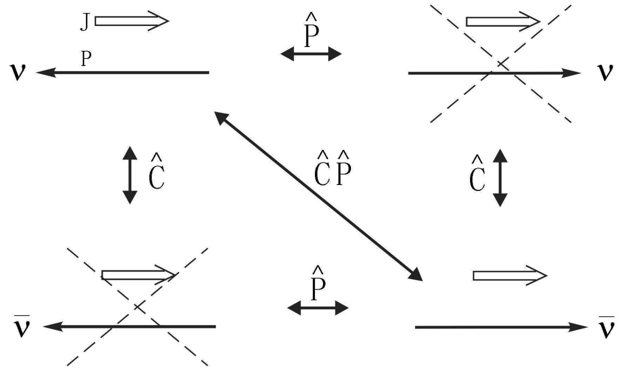


图 2.13: 中微子在 C 变换、P 变换和 CP 联合变换的特性。

一、中性 K 介子系统

在第 1 章介绍奇异粒子时我们已经提到 K^0, K^+, Λ 等奇异粒子的特点是通过强相互作用成对产生。因此它们是强相互作用本征态。对于中性 K 介子系统，有两个**强相互作用本征态 K^0 和 $\overline{K}^0$**，它们的夸克组份分别是：

$$|K^0\rangle = |d\overline{s}\rangle, \qquad |\overline{K}^0\rangle = |\overline{d}s\rangle \tag{2.4.21}$$

K^0 和 $\overline{K}^0$ 同属于 $J^P = 0^-$ 的超多重态，内禀宇称为负，是宇称算符 $\hat{P}$ 的本征态：

$$\hat{P}|K^0\rangle = -|K^0\rangle, \qquad \hat{P}|\overline{K}^0\rangle = -|\overline{K}^0\rangle \tag{2.4.22}$$

但是由于它们是粒子和反粒子，因此不是正反粒子变换算符 $\hat{C}$ 的本征态，事实上有：

$$\hat{C}|K^0\rangle = |\overline{K}^0\rangle, \qquad \hat{C}|\overline{K}^0\rangle = |K^0\rangle \tag{2.4.23}$$

式中符号是一种习惯，也可以选 $\hat{C}|K^0\rangle = -|\overline{K}^0\rangle$，$\hat{C}|\overline{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$，不影响讨论的物理。根据 (2.4.22)、(2.4.23) 式，立即得到 K^0 和 $\overline{K}^0$ 的 CP 变换：

$$\hat{C}\hat{P}|K^0\rangle = -\overline{K}^0, \qquad \hat{C}\hat{P}|\overline{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$$

即 K^0 和 $\overline{K}^0$ 都不是 CP 变换的本征态。但是我们很容易利用强作用本征态 K^0、$\overline{K}^0$ 构造出两个 **CP 变换本征态 K_1 和 K_2**：

$$|K_1\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K^0\rangle - |\overline{K}^0\rangle\big) \tag{2.4.24}$$

$$|K_2\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K^0\rangle + |\overline{K}^0\rangle\big) \tag{2.4.25}$$

显然 K_1、K_2 满足：

$$\hat{C}\hat{P}|K_1\rangle = +|K_1\rangle, \qquad \hat{C}\hat{P}|K_2\rangle = -|K_2\rangle$$

第 1 章也提到奇异介子可以通过弱相互作用衰变。对于 K^0 和 $\overline{K}^0$，由于它们是质量最轻的奇异介子，因此只能通过弱作用发生衰变。下面我们讨论中性 K 介子的弱作用本征态，首先找到此时的 Schrödinger 方程。

根据第 2.3.1 节的讨论结果，一个质量为 M、寿命为 $\tau = \frac{1}{\Gamma}$ 的不稳定粒子的波函数为 (参阅 (2.3.6) 式)：

$$\psi(t) = Ne^{-iMt}e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\psi(0)$$

它满足含时 Schrödinger 方程：

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = \left(M - \frac{1}{2}i\Gamma\right)|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle \tag{2.4.26}$$

对于不稳定的束缚态粒子，上式总哈密顿量 $\hat{H}$ 不仅包含强相互作用势，还包含弱相互作用势 $\hat{H}_w$。强作用使得不稳定粒子束缚在一起，弱作用使之发生衰变。对于 K^0 介子，$\hat{H}$ 中的质量相关项 M 为：

$$M = m_{K^0} + \langle K^0|\hat{H}_w|K^0\rangle + \sum_j \frac{|\langle K^0|\hat{H}_w|j\rangle|^2}{m_{K^0} - E_j}$$

其中第三项要对所有中间态求和，对应 $K^0 \leftrightarrow K^0$ 跃迁的箱图，如图 2.14 所示。$\hat{H}$ 中的衰变率 Γ 完全由弱作用势决定，它包括通常的 K^0 介子跃迁到所有可能末态 $K^0 \to f$ 的弱衰变过程：

$$\Gamma = 2\pi\sum_j |\langle f|\hat{H}_w|K^0\rangle|^2 \rho(E_f)$$

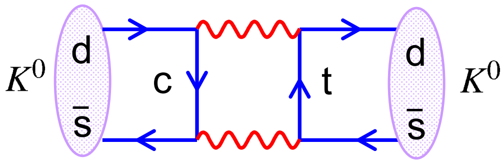


图 2.14: $K^0 \leftrightarrow K^0$ 箱图。

但是 K^0 的弱相互作用过程中还有如图 2.15 所示的 $K^0 \leftrightarrow \overline{K}^0$ 费曼图，这是奇异数改变 $\Delta S = 2$ 的跃迁，称为 $K^0\overline{K}^0$ 振荡 (oscillation)，或者奇异数振荡。因此在任意时刻，一个中性 K 介子系统一定是 K^0 和 $\overline{K}^0$ 的混合 (mixing)。

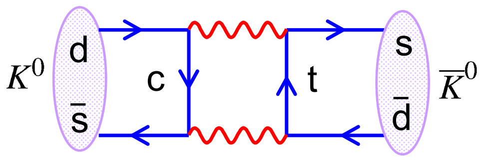


图 2.15: $K^0 \leftrightarrow \overline{K}^0$ 箱图。

我们把单粒子波函数改写为由 K^0 和 $\overline{K}^0$ 混合而成的系统波函数：

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|K^0\rangle + b(t)|\overline{K}^0\rangle \tag{2.4.27}$$

含时 Schrödinger 方程 (2.4.26) 式变为：

$$\hat{H}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} - \frac{1}{2}i\Gamma_{11} & M_{12} - \frac{1}{2}i\Gamma_{12} \\ M_{21} - \frac{1}{2}i\Gamma_{21} & M_{22} - \frac{1}{2}i\Gamma_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{2.4.28}$$

这是一个两分量的方程。哈密顿量中的对角项仍然和前面单粒子情形时的一样，只不过用 M_{11},Γ_{11} 描述 K^0 介子，用 M_{22},Γ_2 描述 $\overline{K}^0$ 介子。式中的非对角项代表 K^0 衰变和 $\overline{K}^0$ 衰变的干涉：

$$
\begin{aligned}
M_{12} &= \sum_j \frac{\langle K^0|\hat{H}_w|j\rangle^* \langle j|\hat{H}_w|\overline{K}^0\rangle}{m_{K^0}-E_j} \\
\Gamma_{12} &= 2\pi \sum_f \langle f|\hat{H}_w|K^0\rangle^* \langle f|\hat{H}_w|\overline{K}^0\rangle \rho(E_f)
\end{aligned}
$$

由于质量和衰变矩阵均为可观测量，故必须是厄米：

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= M_{11}^*, \qquad M_{22} = M_{22}^*, \qquad M_{12} = M_{21}^* \\
\Gamma_{11} &= \Gamma_{11}^*, \qquad \Gamma_{22} = \Gamma_{22}^*, \qquad \Gamma_{12} = \Gamma_{21}^*
\end{aligned}
$$

此外，如果 CPT 守恒，则 K^0 和 $\overline{K}^0$ 的质量和衰变率相等[8]：

$$
M_{11} = M_{22} = M, \qquad \Gamma_{11} = \Gamma_{22}
$$

于是系统含时 Schrödinger 方程 (2.4.28) 式可写为：

$$
\boxed{\begin{pmatrix} M-\frac{1}{2}i\Gamma & M_{12}-\frac{1}{2}i\Gamma_{12} \\ M_{12}^*-\frac{1}{2}i\Gamma_{12}^* & M-\frac{1}{2}i\Gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} \tag{2.4.29}
$$

式 (2.4.29) 是关于系数 $a(t),b(t)$ 的耦合微分方程。将上式中的哈密顿量对角化即可求得弱相互作用下中性 K 介子的本征值和相应的本征函数。为此先求解哈密顿量的本征值方程：

$$
\begin{pmatrix} M-\frac{1}{2}i\Gamma & M_{12}-\frac{1}{2}i\Gamma_{12} \\ M_{12}^*-\frac{1}{2}i\Gamma_{12}^* & M-\frac{1}{2}i\Gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
$$

得到本征值：

$$
\begin{aligned}
\lambda_S &= M-\frac{1}{2}i\Gamma-\sqrt{\left(M_{12}^*-\frac{1}{2}i\Gamma_{12}^*\right)\left(M_{12}-\frac{1}{2}i\Gamma_{12}\right)} \\
\lambda_L &= M-\frac{1}{2}i\Gamma+\sqrt{\left(M_{12}^*-\frac{1}{2}i\Gamma_{12}^*\right)\left(M_{12}-\frac{1}{2}i\Gamma_{12}\right)}
\end{aligned}
$$

相应的归一化的本征函数为：

$$
|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\eta|^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+|\eta|^2}}\left(|K^0\rangle-\eta|\overline{K}^0\rangle\right) \tag{2.4.30}
$$

$$
|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\eta|^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ +\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+|\eta|^2}}\left(|K^0\rangle+\eta|\overline{K}^0\rangle\right) \tag{2.4.31}
$$

式中：

$$
\eta \equiv \sqrt{\frac{M_{12}^*-\frac{1}{2}i\Gamma_{12}^*}{M_{12}-\frac{1}{2}i\Gamma_{12}}}
$$

[8]目前还有很多理论和实验在探讨和检验 CPT 定理。可以说 CPT 定理是经过严格检验的。例如实验发现 $\frac{|m_{K^0}-m_{\overline{K}^0}|}{m_{K^0}} < 10^{-18}$，即 K^0 的质量和 $\overline{K}^0$ 的质量相等。

式 (2.4.30) 和 (2.4.31) 表示的是系统的**弱相互作用本征态** K_S^0 **和** K_L^0。若 M_{12}、Γ_{12} 为实数，则 $\eta=1$，此时弱相互作用的本征态 K_S^0、K_L^0 也就是 CP 联合变换的本征态 K_1、K_2，意味着中性 K 介子系统的 CP 宇称守恒。反之，则系统将表现出弱相互作用下的 CP 宇称破坏。实验发现 $\eta\approx 1$，因此引入一个小参数 ϵ 用于定量描述 CP 破坏将是方便的：

$$\epsilon\equiv\frac{1-\eta}{1+\eta}\qquad\text{或者}\qquad \eta=\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$$

于是中性 K 介子弱作用本征态又可以写为：

$$|K_S^0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}\big((1+\epsilon)|K^0\rangle-(1-\epsilon)|\overline{K}^0\rangle\big) \tag{2.4.32}$$

$$|K_L^0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}\big((1+\epsilon)|K^0\rangle+(1-\epsilon)|\overline{K}^0\rangle\big) \tag{2.4.33}$$

利用 (2.4.24)、(2.4.25) 式，弱作用本征态也可以写为：

$$|K_S^0\rangle=\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\big(|K_1\rangle+\epsilon|K_2\rangle\big) \tag{2.4.34}$$

$$|K_L^0\rangle=\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\big(|K_2\rangle+\epsilon|K_1\rangle\big) \tag{2.4.35}$$

二、K_S^0 和 K_L^0

我们把 $K^0\overline{K}^0$ 系统的波函数以弱作用本征态 $|K_S^0\rangle$、$|K_L^0\rangle$ 为基展开：

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle&=a(t)|K^0\rangle+b(t)|\overline{K}^0\rangle\\&=\sqrt{1+|\eta|^2}\Big[\frac{a(t)}{2}(K_L^0+K_S^0)+\frac{b(t)}{2\eta}(K_L^0-K_S^0)\Big]\\&=\sqrt{1+|\eta|^2}\Big[\Big(\frac{a(t)}{2}-\frac{b(t)}{2\eta}\Big)|K_S^0\rangle+\Big(\frac{a(t)}{2}+\frac{b(t)}{2\eta}\Big)|K_L^0\rangle\Big]\\&=\frac{\sqrt{1+|\eta|^2}}{2}\big[a_S(t)|K_S^0\rangle+a_L(t)|K_L^0\rangle\big]\end{aligned}$$

其中：

$$a_S(t)=a(t)-\frac{b(t)}{\eta},\qquad a_L(t)=a(t)+\frac{b(t)}{\eta}$$

式 (2.4.29) 可以用来得到 $a_L(t)$ 和 $a_S(t)$ 满足的含时 Schrödinger 方程，以 $a_L(t)$ 为例：

$$\begin{aligned}i\frac{\partial a_L(t)}{\partial t}&=\Big[\Big(M-\frac12 i\Gamma\Big)a+\Big(M_{12}-\frac12 i\Gamma_{12}\Big)b\Big]+\frac1\eta\Big[\Big(M_{12}^*-\frac12 i\Gamma_{12}^*\Big)a+\Big(M-\frac12 i\Gamma\Big)b\Big]\\&=\Big(M-\frac12 i\Gamma\Big)\Big(a+\frac b\eta\Big)+\Big(M_{12}-\frac12 i\Gamma_{12}\Big)b+\frac1\eta\Big(M_{12}^*-\frac12 i\Gamma_{12}^*\Big)a\\&=\Big(M-\frac12 i\Gamma\Big)\Big(a+\frac b\eta\Big)+\Big(M_{12}-\frac12 i\Gamma_{12}\Big)b+\sqrt{\Big(M_{12}^*-\frac12 i\Gamma_{12}^*\Big)\Big(M_{12}-\frac12 i\Gamma_{12}\Big)}\,a\\&=\Big(M-\frac12 i\Gamma\Big)\Big(a+\frac b\eta\Big)+\sqrt{\Big(M_{12}^*-\frac12 i\Gamma_{12}^*\Big)\Big(M_{12}-\frac12 i\Gamma_{12}\Big)}\Big(a+\frac b\eta\Big)\\&=\Big(M-\frac12 i\Gamma\Big)a_L+\sqrt{\Big(M_{12}^*-\frac12 i\Gamma_{12}^*\Big)\Big(M_{12}-\frac12 i\Gamma_{12}\Big)}\,a_L\end{aligned}$$

于是：

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial a_L(t)}{\partial t} &= \left(m_L - \frac{1}{2}i\Gamma_L\right)a_L(t) \\
m_L &= M + \mathrm{Re}\left\{\sqrt{\left(M_{12}^* - \frac{1}{2}i\Gamma_{12}^*\right)\left(M_{12} - \frac{1}{2}i\Gamma_{12}\right)}\right\} \\
\Gamma_L &= \Gamma - 2\mathrm{Im}\left\{\sqrt{\left(M_{12}^* - \frac{1}{2}i\Gamma_{12}^*\right)\left(M_{12} - \frac{1}{2}i\Gamma_{12}\right)}\right\}
\end{aligned}
$$

类似地可得：

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial a_S(t)}{\partial t} &= \left(m_S - \frac{1}{2}i\Gamma_S\right)a_S(t) \\
m_S &= M - \mathrm{Re}\left\{\sqrt{\left(M_{12}^* - \frac{1}{2}i\Gamma_{12}^*\right)\left(M_{12} - \frac{1}{2}i\Gamma_{12}\right)}\right\} \\
\Gamma_S &= \Gamma + 2\mathrm{Im}\left\{\sqrt{\left(M_{12}^* - \frac{1}{2}i\Gamma_{12}^*\right)\left(M_{12} - \frac{1}{2}i\Gamma_{12}\right)}\right\}
\end{aligned}
$$

合写成矩阵形式，得到以 K_S^0, K_L^0 为基的 Schrödinger 方程：

$$
\begin{pmatrix} m_S - \frac{1}{2}i\Gamma_S & 0 \\ 0 & m_L - \frac{1}{2}i\Gamma_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_S \\ a_L \end{pmatrix} = i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} a_S \\ a_L \end{pmatrix} \tag{2.4.36}
$$

可见哈密顿量确实是对角化的。很容易得到该方程的解：

$$
a_S(t) \propto e^{-im_S t}e^{-\frac{\Gamma_S}{2}t}, \qquad a_L(t) \propto e^{-im_L t}e^{-\frac{\Gamma_L}{2}t}
$$

因此中性 K 介子系统的含时 Schrödinger 方程的一般解为：

$$
|\psi(t)\rangle = A_S e^{-im_S t}e^{-\frac{\Gamma_S}{2}t}|K_S^0\rangle + A_L e^{-im_L t}e^{-\frac{\Gamma_L}{2}t}|K_L^0\rangle
$$

式中 A_S, A_L 是复常数，由初始条件决定。上式所示的波函数描写的是两个质量分别为 m_S、m_L，寿命为 $\frac{1}{\Gamma_S}$、$\frac{1}{\Gamma_L}$ 的自由粒子，正是实验可测的 K_S^0 和 K_L^0 粒子。它们的质量几乎相等：

$$
m_S \approx m_L \approx 498\,\mathrm{MeV}
$$

但是寿命相差很大：

$$
\begin{aligned}
\tau_S &= 0.9\times 10^{-10}\,\mathrm{s} \\
\tau_L &= 0.5\times 10^{-7}\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

分别称为短寿命 K_S^0 介子和长寿命 K_L^0 介子。它们的主要衰变模式和分支比为：

$$
\begin{array}{llllll}
K_S^0 \to & \pi^+ + \pi^- & 69.2\% & K_L^0 \to & \pi^+ + \pi^- & 2.0\times 10^{-3} \\
& \pi^0 + \pi^0 & 30.7\% & & \pi^0 + \pi^0 & 8.7\times 10^{-4} \\
& \pi^+ + \pi^- + \pi^0 & 3.5\times 10^{-7} & & \pi^+ + \pi^- + \pi^0 & 12.6\% \\
& \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 & < 1.2\times 10^{-7} & & \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 & 19.6\% \\
& \pi^- + e^+ + \nu_e & 0.03\% & & \pi^- + e^+ + \nu_e & 20.2\% \\
& \pi^+ + e^- + \overline{\nu}_e & 0.03\% & & \pi^+ + e^- + \overline{\nu}_e & 20.2\% \\
& \pi^- + \mu^+ + \nu_\mu & 0.02\% & & \pi^- + \mu^+ + \nu_\mu & 13.5\% \\
& \pi^+ + \mu^- + \overline{\nu}_\mu & 0.02\% & & \pi^+ + \mu^- + \overline{\nu}_\mu & 13.5\%
\end{array} \tag{2.4.37}
$$

半轻子衰变主要来自 K_L^0，这是因为三体衰变的相空间远小于两体衰变相空间，所以衰变粒子的寿命应该较长，也就是长寿命的 K_L^0。

三、奇异数振荡

本节假设 CP 宇称守恒，那么弱作用本征态 K_S^0 和 K_L^0 等于 CP 变换本征态 K_1 和 K_2：

$$|K_S^0\rangle = |K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K^0\rangle - |\overline{K}^0\rangle\big)$$
$$|K_L^0\rangle = |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K^0\rangle + |\overline{K}^0\rangle\big)$$

把上式反过来，用 K_S^0, K_L^0 表示 $K^0, \overline{K}^0$：

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K_L^0\rangle + |K_S^0\rangle\big)$$
$$|\overline{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K_L^0\rangle - |K_S^0\rangle\big)$$

假设在 $t=0$ 时刻，通过强相互作用过程，例如 $\pi^- + p \to \Lambda + K^0$ 反应，产生一束纯的 $|K^0\rangle$ 粒子。此时系统的波函数为：

$$|K_{t=0}^0\rangle = |K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K_L^0\rangle + |K_S^0\rangle\big)$$

任意时刻的波函数是：

$$|K^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K_L^0(t)\rangle + |K_S^0(t)\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K_L^0\rangle\theta_L(t) + |K_S^0\rangle\theta_S(t)\big) \tag{2.4.38}$$

式中：

$$\theta_L(t) = e^{-im_L t} e^{-\frac{\Gamma_L}{2}t}$$
$$\theta_S(t) = e^{-im_S t} e^{-\frac{\Gamma_S}{2}t}$$

把式 (2.4.38) 以强相互作用本征态 $K^0, \overline{K}^0$ 为基展开：

$$\begin{aligned}|K^0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K^0\rangle + |\overline{K}^0\rangle\big)\theta_L + \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K^0\rangle - |\overline{K}^0\rangle\big)\theta_S\Big]\\ &= \frac{1}{2}(\theta_L+\theta_S)|K^0\rangle + \frac{1}{2}(\theta_L-\theta_S)|\overline{K}^0\rangle\end{aligned}$$

这表明在任意时刻，系统是 K^0 和 $\overline{K}^0$ 的混合态。相对强度是：

$$\Gamma(K_{t=0}^0 \to K^0) \propto |\langle K^0|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\theta_L+\theta_S|^2$$
$$\Gamma(K_{t=0}^0 \to \overline{K}^0) \propto |\langle \overline{K}^0|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\theta_L-\theta_S|^2$$

利用：

$$\begin{aligned}|\theta_L \pm \theta_S|^2 &= |e^{-im_L t}e^{-\frac{\Gamma_L}{2}t} \pm e^{-im_S t}e^{-\frac{\Gamma_S}{2}t}|\\ &= e^{-\Gamma_L t} + e^{-\Gamma_S t} \pm 2\mathrm{Re}(e^{im_L t}e^{-\frac{\Gamma_L}{2}t}e^{-im_S t}e^{-\frac{\Gamma_S}{2}t})\\ &= e^{-\Gamma_L t} + e^{-\Gamma_S t} \pm 2e^{-\frac{\Gamma_L+\Gamma_S}{2}t}\cos\Delta m t\end{aligned}$$

其中 Δm 是 K_L^0 和 K_S^0 之间的质量差：

$$\Delta m \equiv m_L - m_S$$

得到 t 时刻 K^0、$\overline{K}^0$ 的相对强度：

$$\begin{aligned}\Gamma(K_{t=0}^0 \to K^0) &\propto \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_L t} + e^{-\Gamma_S t} + 2e^{-\frac{\Gamma_L+\Gamma_S}{2}t}\cos\Delta m t\right)\\ \Gamma(K_{t=0}^0 \to \overline{K}^0) &\propto \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_L t} + e^{-\Gamma_S t} - 2e^{-\frac{\Gamma_L+\Gamma_S}{2}t}\cos\Delta m t\right)\end{aligned} \tag{2.4.39}$$

上式表明 K^0、$\overline{K}^0$ 的强度是振荡的，振荡频率由 Δm 决定。这就是奇异数振荡。上面两式强度振荡的曲线如图 2.16 所示。从图可以看出，经过几个 K_S^0 寿命的时间，粒子束中只剩下纯的 K_L^0 粒子，即一半 K^0 和一半 $\overline{K}^0$。

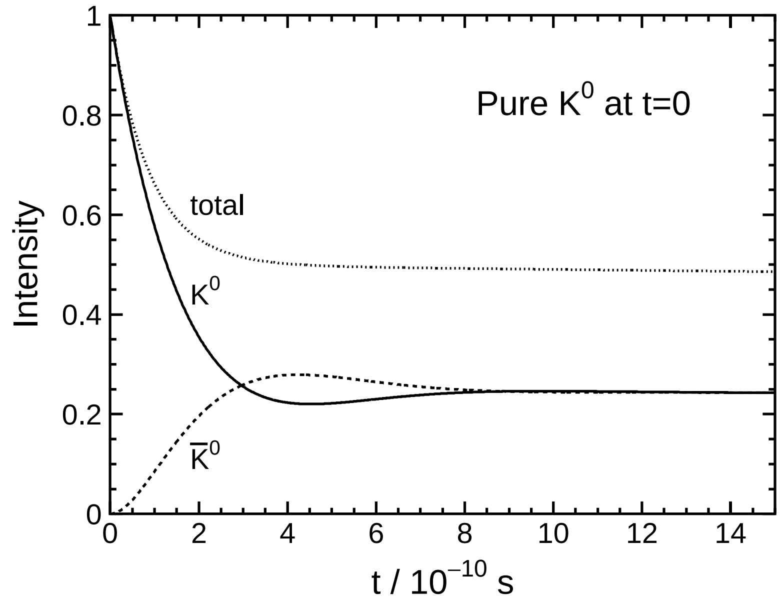


图 2.16: K^0 和 $\overline{K}^0$ 强度随时间变化的曲线。初始时刻为纯的 K^0 介子束。

如果初始时刻系统处在纯 $\overline{K}^0$ 态：

$$|\overline{K}_{t=0}^0\rangle = |\overline{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_L^0\rangle - |K_S^0\rangle\right)$$

则任意时刻的波函数为：

$$|\overline{K}^0(t)\rangle = \frac{1}{2}(\theta_L - \theta_S)|K^0\rangle + \frac{1}{2}(\theta_L + \theta_S)|\overline{K}^0\rangle$$

重复上面过程，可以得到 t 时刻 K^0、$\overline{K}^0$ 的相对强度。我们发现：

$$\begin{aligned}\Gamma(\overline{K}_{t=0}^0 \to K^0) &= \Gamma(K_{t=0}^0 \to \overline{K}^0)\\ \Gamma(\overline{K}_{t=0}^0 \to \overline{K}^0) &= \Gamma(K_{t=0}^0 \to K^0)\end{aligned} \tag{2.4.40}$$

中性 K 介子的衰变的主要衰变模式和分支比如2.4.37式所示。其中的半轻子衰变过程可以用来研究奇异数振荡。这是因为中性 K 介子可以发生如下衰变[9]：

$$\begin{aligned} K^0 &\to \pi^- + e^+ + \nu_e \\ \overline{K}^0 &\to \pi^+ + e^- + \overline{\nu}_e \end{aligned} \tag{2.4.41}$$

但是不存在如下衰变：

$$\begin{aligned} \overline{K}^0 &\nrightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e \\ K^0 &\nrightarrow \pi^+ + e^- + \overline{\nu}_e \end{aligned} \tag{2.4.42}$$

若初态是纯的 K^0 粒子束流，则任意时刻束流中既有 K^0 又有 $\overline{K}^0$，它们按照 (2.4.41) 式分别衰变为 $\pi^- e^+ \nu_e$ 和 $\pi^+ e^- \overline{\nu}_e$。衰变末态中带电粒子 $e^\pm$ 和 $\pi^\pm$ 的电荷可以用来标记中性束流中的 K^0 和 $\overline{K}^0$，因而可以直接测量奇异数振荡。

根据 (2.4.39)、(2.4.40) 式，立即可以得到：

$$\begin{aligned} R_+ &\equiv \Gamma(K^0_{t=0} \to \pi^- e^+ \nu_e) = N_{\pi e \nu} \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t} \cos \Delta m t\right) \\ R_- &\equiv \Gamma(K^0_{t=0} \to \pi^+ e^- \overline{\nu}_e) = N_{\pi e \nu} \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t} \cos \Delta m t\right) \\ \overline{R}_- &\equiv \Gamma(\overline{K}^0_{t=0} \to \pi^+ e^- \overline{\nu}_e) = N_{\pi e \nu} \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t} \cos \Delta m t\right) \\ \overline{R}_+ &\equiv \Gamma(\overline{K}^0_{t=0} \to \pi^- e^+ \nu_e) = N_{\pi e \nu} \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t} \cos \Delta m t\right) \end{aligned} \tag{2.4.43}$$

其中 $N_{\pi e \nu}$ 是归一化系数。为了清楚地看出奇异数振荡现象，我们消去无关的 $N_{\pi e \nu}$ 因子，为此定义不对称度：

$$A_{\Delta m} \equiv \frac{(R_+ + \overline{R}_-) - (R_- + \overline{R}+)}{(R_+ + \overline{R}_-) + (R_- + \overline{R}+)}$$

把 (2.4.43) 式代入：

$$A_{\Delta m} = \frac{2e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t} \cos \Delta m t}{e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t}} \tag{2.4.44}$$

CERN 的 CPLEAR 实验测得的 $A_{\Delta m}$ 结果如图所示。对实验数据进行拟合得到：

$$\Delta m = 3.485 \times 10^{-15}\,\mathrm{GeV}$$

相应的振荡周期是：

$$\tau_{\mathrm{osc}} = \frac{2\pi}{\Delta m} = \frac{2\pi}{3.485 \times 10^{-12}\,\mathrm{MeV}} \times (6.582 \times 10^{-22}\,\mathrm{MeVs}) = 1.18\,\mathrm{ns}$$

上式表明振荡周期 $\frac{\tau_{\mathrm{osc}}}{\tau_S}$ 是 K^0_S 寿命的13.3倍。由于在振荡的第一个周期内绝大多少 K^0_S 已经衰变，因此奇异数振荡现象是不容易观测到的。

中性 K 介子不仅能够发生半轻子衰变，还可以通过弱相互衰变到最轻的 π 介子。由于 $m_K \approx 498\,\mathrm{MeV}$，$m_\pi \approx 140\,\mathrm{MeV}$，因此中性 K 介子可以衰变到 2π 或 3π 末态。这里 2π 系统可以是 $\pi^+\pi^-$ 或者 $\pi^0\pi^0$，3π 系统可以是 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 或者 $\pi^0\pi^0\pi^0$。首先计算这些末态系统的 CP 宇称。

[9]式 (2.4.41) 中由于末态不是 CP 本征态，因此衰变过程用 K^0 和 $\overline{K}^0$ 表示。

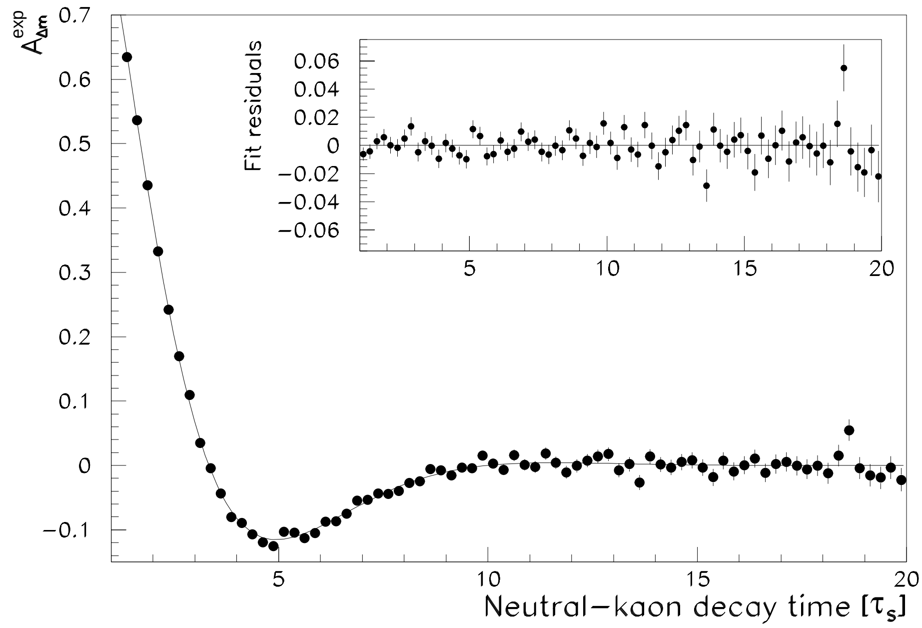


图 2.17: CPLEAR 实验的奇异数振荡测量结果。

- 末态是 2π。初末态都是赝标介子，由角动量守恒可知 $L=0, S=0, J=0$。利用 (2.4.5)、(2.4.15) 式可得系统的 P、C 宇称：

$$P_{2\pi} = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)^L = +1$$
$$C_{2\pi} = (-1)^{L+S} = +1$$

于是 2π 系统的 CP 宇称是：

$$CP_{2\pi} = +1$$

- 末态是 3π。可以任选两个 π^0 或者选择 $\pi^+\pi^-$ 组成 2π 系统，它们之间的轨道角动量为 L_1，然后加入剩下的 π^0 组成 3π 系统，令 π^0 与 2π 系统之间的轨道角动量为 L_2。由于总角动量守恒，$L_1 = L_2$，故系统的 P、C 宇称为：

$$P_{3\pi} = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)^{L_1}\cdot(-1)^{L_2} = -1$$
$$C_{3\pi} = +1\cdot C_{\pi^+\pi^-} = (-1)^{L_1}$$

注意到 $m_K - 3m_\pi \approx 80\,\text{MeV}$，故 $L_1 > 0$ 的衰变末态因角动量壁垒效应被强烈压制，即实际上 $L_1 = 0$。于是 3π 系统的 CP 宇称是：

$$CP_{3\pi} = -1\cdot(-1)^{L_1} = -1$$

由此可见，如果 CP 守恒，那么 $CP=+1$ 的本征态 K_1 只能衰变到 $CP=+1$ 的末态，而 $CP=-1$ 的本征态 K_2 只能衰变到 $CP=-1$ 的末态。即 K_1 衰变到 2π，K_2 衰变到 3π。由于 CP 守恒时 $|K_S^0\rangle = |K_1\rangle$，$|K_L^0\rangle = |K_2\rangle$，因此：

$$K_S^0 \to \pi + \pi$$
$$K_L^0 \to \pi + \pi + \pi$$

下面我们考察中性 K 介子衰变到 2π 和 3π 末态的衰变率。忽略 CP 破坏，则波函数 (2.4.38) 式可等价地写为：

$$|K^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K_2\rangle\theta_L + |K_1\rangle\theta_S\big)$$

K_1、K_2 只能分别衰变到 2π、3π 末态，它们的衰变率分别为：

$$\Gamma(K^0_{t=0}\to 2\pi) = N_{2\pi}|\langle K_1|K^0(t)\rangle|^2 = \frac{N_{2\pi}}{2}|\theta_S(t)|^2 = \frac{N_{2\pi}}{2}e^{-\Gamma_S t} \tag{2.4.45}$$

$$\Gamma(K^0_{t=0}\to 3\pi) = N_{3\pi}|\langle K_2|K^0(t)\rangle|^2 = \frac{N_{3\pi}}{2}|\theta_L(t)|^2 = \frac{N_{3\pi}}{2}e^{-\Gamma_L t} \tag{2.4.46}$$

其中 $N_{2\pi}$、$N_{3\pi}$ 是归一化系数。上式表明，若 CP 守恒，则中性 K 介子衰变到 2π 和 3π 的衰变率都呈现单一的指数衰减规律。我们发现中性 K 介子到 2π 和 3π 的衰变没有表现出奇异数振荡，这是因为是它们是 CP 本征态 (假设 CP 守恒)，初始时刻的纯 K^0 或者 $\overline{K}^0$ 束流可以分解为 K^0_S 和 K^0_L 成分，因此只表现出不稳定粒子的指数衰减。初始时刻为纯 K^0 的束流，在任意时刻的成分如图 2.18 所示。

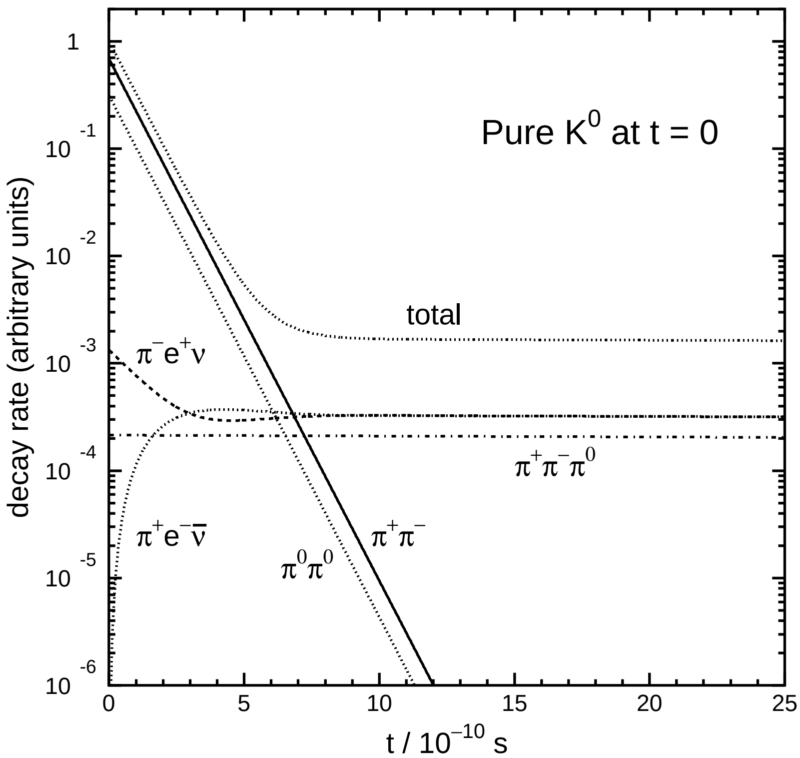


图 2.18: 忽略 CP 破坏，初始时刻为纯 K^0 的束流的各种衰变率和时间的函数关系。

五、CP 宇称破坏

奇异数振荡的结果表明，在离开中性 K 介子产生点很远的地方，束流中的 K^0_S 完全衰变，只剩下 K^0_L 部分。如果弱相互作用过程中 CP 是守恒的，那么在 K^0_L 的衰变末态中，只能观测到 3π 而不存在 2π。但是 1964 年实验发现，在 22700 个长寿命中性 K^0_L 的衰变事例中，有 45 个事例是 $K^0_L\to\pi^+\pi^-$。这说明弱作用破坏 CP 宇称守恒。

下面以中性 K 介子的 2π 衰变为例，具体描述中性 K 介子系统的 CP 破坏。和以前一样 (参考 (2.4.38) 式)，我们有：

$$|K_S^0(t)\rangle = |K_S^0\rangle\theta_S(t) = |K_S^0\rangle e^{-im_S t}e^{-\frac{\Gamma_S}{2}t}$$
$$|K_L^0(t)\rangle = |K_L^0\rangle\theta_L(t) = |K_L^0\rangle e^{-im_L t}e^{-\frac{\Gamma_L}{2}t}$$

但是现在 (参考 (2.4.34)、(2.4.35) 式)：

$$|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\big(|K_1\rangle + \epsilon|K_2\rangle\big)$$
$$|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\big(|K_2\rangle + \epsilon|K_1\rangle\big)$$

利用 (2.4.24)、(2.4.25) 式，把上式中的 K_L^0 和 K_S^0 用 K^0 和 $\overline{K}^0$ 表示：

$$\begin{aligned}|K_L^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\Big[(1+\epsilon)|K^0\rangle + (1-\epsilon)|\overline{K}^0\rangle\Big]\\ |K_S^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\Big[(1+\epsilon)|K^0\rangle - (1-\epsilon)|\overline{K}^0\rangle\Big]\end{aligned} \tag{2.4.47}$$

也可以把 K^0 和 $\overline{K}^0$ 用 K_L^0 和 K_S^0 表示：

$$|K^0\rangle = \sqrt{\frac{1+|\epsilon|^2}{2}}\frac{1}{1+\epsilon}\big(|K_L^0\rangle + |K_S^0\rangle\big)$$
$$|\overline{K}^0\rangle = \sqrt{\frac{1+|\epsilon|^2}{2}}\frac{1}{1-\epsilon}\big(|K_L^0\rangle - |K_S^0\rangle\big)$$

于是初始时刻为纯 K^0 的束流，在任意时刻的波函数为：

$$|K^0(t)\rangle = \sqrt{\frac{1+|\epsilon|^2}{2}}\frac{1}{1+\epsilon}\big(|K_L^0\rangle\theta_L(t) + |K_S^0\rangle\theta_S(t)\big)$$

为了研究衰变到 2π 的衰变率，我们把上述波函数用 CP 本征态 K_1、K_2 表示。利用 (2.4.47) 式，得到：

$$\begin{aligned}|K^0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+\epsilon}\Big[\big(|K_2\rangle + \epsilon|K_1\rangle\big)\theta_L + \big(|K_1\rangle + \epsilon|K_2\rangle\big)\theta_S)\Big]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+\epsilon}\big[|K_1\rangle(\theta_S + \epsilon\theta_L) + |K_2\rangle(\theta_L + \epsilon\theta_S)\big]\end{aligned}$$

假设在衰变过程中 CP 破坏可以忽略 (这是一个很好的近似)，则 $CP = +1$ 的 2π 末态完全来自 $CP = +1$ 的本征态 K_1 的衰变：

$$\Gamma(K_{t=0}^0 \to 2\pi) \propto |\langle K_1|K^0(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{1+\epsilon}\right|^2|\theta_S + \epsilon\theta_L|^2$$

由于 $|\epsilon| \ll 1$，我们有：

$$\left|\frac{1}{1+\epsilon}\right|^2 = \frac{1}{(1+\epsilon^*)(1+\epsilon)} \approx \frac{1}{1+2\mathrm{Re}\epsilon} = 1 - 2\mathrm{Re}\epsilon$$

记 $\epsilon \equiv |\epsilon| e^{i\phi}$，我们还有：

$$\begin{aligned}|\theta_S + \epsilon\theta_L|^2 &= \left| e^{-im_S t} e^{-\frac{\Gamma_S}{2}t} + \epsilon e^{-im_L t} e^{-\frac{\Gamma_L}{2}t} \right|^2 \\ &= e^{-\Gamma_S t} + |\epsilon|^2 e^{-\Gamma_L t} + 2|\epsilon| e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t} \cos(\Delta m t - \phi)\end{aligned}$$

其中 $\Delta m \equiv m_L - m_S$。于是，当 CP 宇称不守恒时，初始时刻为纯 K^0 的粒子束在任意时刻衰变为 2π 的衰变率为：

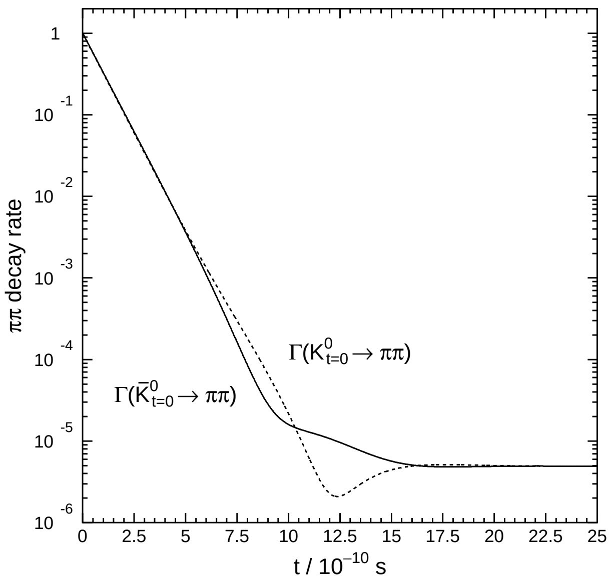
$$\boxed{\Gamma(K^0_{t=0} \to 2\pi) = \frac{1-2\mathrm{Re}\epsilon}{2} N_{2\pi} \left[e^{-\Gamma_S t} + |\epsilon|^2 e^{-\Gamma_L t} + 2|\epsilon| e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t} \cos(\Delta m t - \phi) \right]} \tag{2.4.48}$$

与 CP 守恒时只有单一的指数衰减项 $e^{-\Gamma_S t}$ 的 (2.4.45) 式比较，上式中多了一个指数衰减项 $|\epsilon|^2 e^{-\Gamma_L t}$。因为 $|\epsilon|^2$ 很小，因此多出的指数衰减项贡献很小。但是当 $t \gg \tau_S$ 时，两个指数项中只有 $|\epsilon|^2 e^{-\Gamma_L t}$ 还存在。这正是 1964 年 Cronin 等发现的 CP 宇称破坏现象，即实验发现，当中性 K 介子系统经过足够长时间后只剩下 K^0_L 时，观测到了数目不多的破坏 CP 宇称守恒的 $K^0_L \to 2\pi$ 事例。

如果初始时刻是纯的 $\overline{K}^0$ 粒子束，则同样可以得到任意时刻衰变到 2π 的衰变率：

$$\boxed{\Gamma(\overline{K}^0_{t=0} \to 2\pi) = \frac{1+2\mathrm{Re}\epsilon}{2} N_{2\pi} \left[e^{-\Gamma_S t} + |\epsilon|^2 e^{-\Gamma_L t} - 2|\epsilon| e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t} \cos(\Delta m t - \phi) \right]} \tag{2.4.49}$$

上式和 (2.4.48) 的区别在于归一化因子不同，更重要的是干涉项改变符号。图 2.19 所示为初始时刻为纯 K^0 和纯 $\overline{K}^0$ 的中性 K 介子衰变到 2π 末态的衰变率。左图是理论预言，右图是 CERN 的 CPLEAR 实验结果。



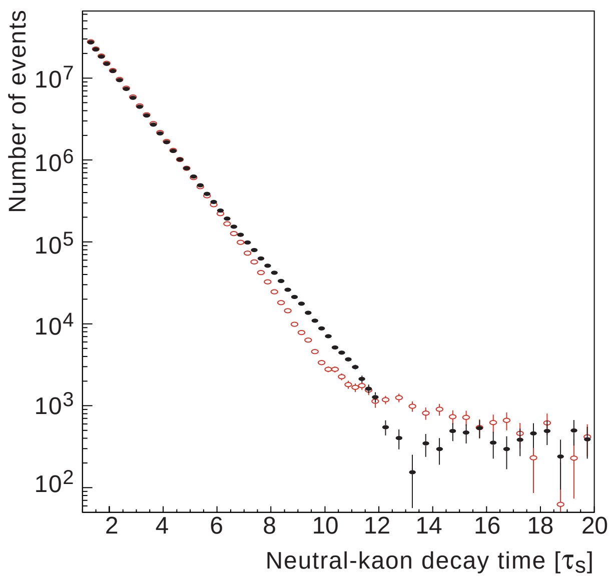


图 2.19: 初始时刻为纯 K^0 和纯 $\overline{K}^0$ 衰变到 2π 末态的衰变率随时间变化的曲线。左图为理论预言，右图是 CERN 的 CPLEAR 实验结果。

式 (2.4.48)、(2.4.49) 中的干涉项可用来决定 CP 破坏的参数 ϵ 的大小 $|\epsilon|$ 和相位 ϕ。为了尽可能把 CP 破坏因子独立出来，我们定义一个不对称度：

$$A_{+-} \equiv \frac{\Gamma(\overline{K}^0_{t=0} \to 2\pi) - \Gamma(K^0_{t=0} \to 2\pi)}{\Gamma(\overline{K}^0_{t=0} \to 2\pi) + \Gamma(K^0_{t=0} \to 2\pi)} \tag{2.4.50}$$

利用 (2.4.48)、(2.4.49) 式，上式变为：

$$A_{+-}=\frac{4\mathrm{Re}\epsilon\left(e^{-\Gamma_S t}+|\epsilon|^2e^{-\Gamma_L t}\right)-4|\epsilon|e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t}\cos(\Delta mt-\phi)}{2\left(e^{-\Gamma_S t}+|\epsilon|^2e^{-\Gamma_L t}\right)-8\mathrm{Re}\epsilon|\epsilon|e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t}\cos(\Delta mt-\phi)}$$

上式分母中第二项含有 $\mathrm{Re}\epsilon|\epsilon|$ 是个小量，可以忽略，于是：

$$\begin{aligned}A_{+-}&\approx\frac{2\mathrm{Re}\epsilon\left(e^{-\Gamma_S t}+|\epsilon|^2e^{-\Gamma_L t}\right)-2|\epsilon|e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t}\cos(\Delta mt-\phi)}{e^{-\Gamma_S t}+|\epsilon|^2e^{-\Gamma_L t}}\\&=2\mathrm{Re}\epsilon-\frac{2|\epsilon|e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t}\cos(\Delta mt-\phi)}{e^{-\Gamma_S t}+|\epsilon|^2e^{-\Gamma_L t}}\end{aligned}$$

上式第二项分子分母同乘以 $e^{\Gamma_S t}$，得到：

$$\boxed{A_{+-}=2\mathrm{Re}\epsilon-\frac{2|\epsilon|e^{\frac{\Gamma_S-\Gamma_L}{2}t}\cos(\Delta mt-\phi)}{1+|\epsilon|^2e^{(\Gamma_S-\Gamma_L)t}}} \tag{2.4.51}$$

不对称度的 CPLEAR 实验测量如图 2.20 所示。利用 (2.4.51) 式拟合实验数据，得到：

$$|\epsilon|=2.264\,(35)\times10^{-3},\qquad \phi=43.19\,(73)^\circ$$

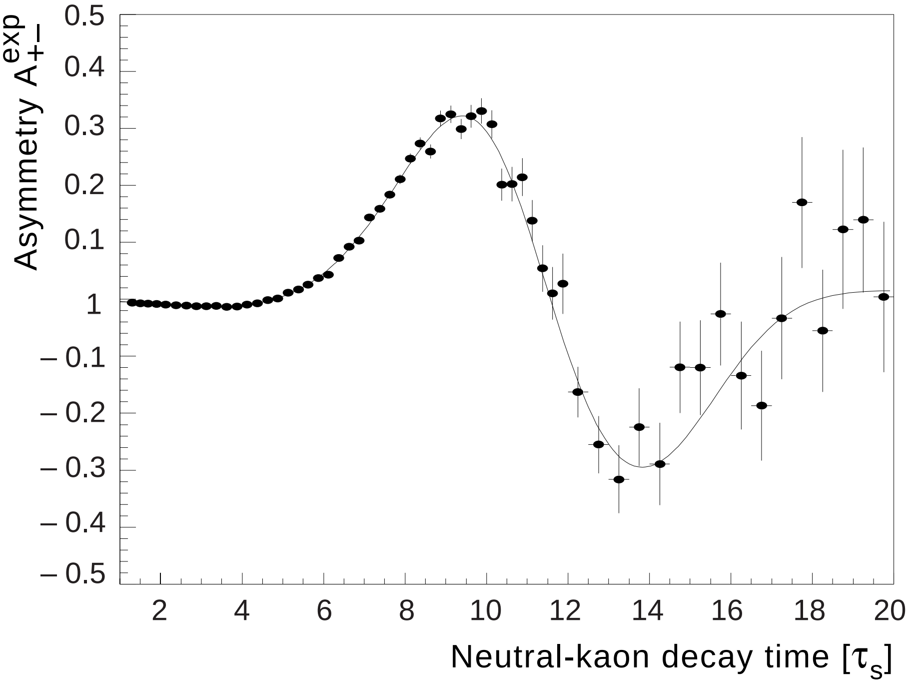


图 2.20: 不对称度 A_{+-} 的 CPLEAR 实验结果和拟合曲线。

中性 K 介子系统的 3π 衰变也有 CP 破坏。类比 2π 衰变，可以得到：

$$\Gamma(K^0_{t=0}\to3\pi)=\frac{1-2\mathrm{Re}\epsilon}{2}N_{3\pi}\left[e^{-\Gamma_L t}+|\epsilon|^2e^{-\Gamma_S t}+2|\epsilon|e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t}\cos(\Delta mt-\phi)\right]$$

上式表明 3π 衰变过程中 CP 破坏的观测远比 2π 过程困难【作业 (二)】。

除了最早发现 CP 破坏的 $K_L^0 \to 2\pi$ 过程，人们还在 K_L^0 的半轻子衰变中发现了 CP 破坏，即 $K_L^0 \to \pi^- e^+ \nu_e$ 的衰变率大于 $K_L^0 \to \pi^+ e^- \overline{\nu}_e$ 的衰变率。式 (2.4.41)、(2.4.42) 表明 $\pi^- e^+ \nu_e$ 必定来自束流的 K^0 成份，$\pi^+ e^- \overline{\nu}_e$ 必定来自束流的 $\overline{K}^0$ 成份。根据 (2.4.33) 式，我们可以把 K_L^0 用 K^0 和 $\overline{K}^0$ 为基展开：

$$|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}\big((1+\epsilon)|K^0\rangle + (1-\epsilon)|\overline{K}^0\rangle\big)$$

于是到 $\pi^- e^+ \nu_e$ 和 $\pi^+ e^- \overline{\nu}_e$ 的衰变率为：

$$\Gamma(K_L^0 \to \pi^- e^+ \nu_e) \propto |\langle K^0|K_L^0\rangle|^2 \propto |1+\epsilon|^2 \approx 1 + 2\mathrm{Re}\epsilon$$

$$\Gamma(K_L^0 \to \pi^+ e^- \overline{\nu}_e) \propto |\langle \overline{K}^0|K_L^0\rangle|^2 \propto |1-\epsilon|^2 \approx 1 - 2\mathrm{Re}\epsilon$$

其中我们已利用 $|\epsilon| \ll 1$，以及 $|1\pm\epsilon|^2 = (1\pm\epsilon)(1\pm\epsilon^*) \approx 1 \pm 2\mathrm{Re}\epsilon$。定义电荷不对称度：

$$\delta = \frac{\Gamma(K_L^0 \to \pi^- e^+ \nu_e) - \Gamma(K_L^0 \to \pi^+ e^- \overline{\nu}_e)}{\Gamma(K_L^0 \to \pi^- e^+ \nu_e) + \Gamma(K_L^0 \to \pi^+ e^- \overline{\nu}_e)}$$

联立上面两式，得到：

$$\delta \approx \frac{(1+2\mathrm{Re}\epsilon) - (1-2\mathrm{Re}\epsilon)}{(1+2\mathrm{Re}\epsilon) + (1-2\mathrm{Re}\epsilon)} = 2\mathrm{Re}\epsilon = 2|\epsilon|\cos\phi$$

如果把 2π 衰变过程测得的 $|\epsilon|$ 和 ϕ 值代入，得到

$$\delta = 0.33 \times 10^{-2}$$

实验结果为：

$$\delta = 0.327\,(12) \times 10^{-2}$$

这是中性 K 介子系统中 CP 破坏的另一个实验证据。简短地说就是 $K_L^0 \to \pi^- e^+ \nu_e$ 的衰变率比它的共轭过程大 $\sim 0.7\%$。作为比较，图 2.21 给出了考虑 CP 破坏时初态为纯 K^0 的束流在任意时刻的衰变率。

中性 K 介子的半轻子衰变过程已为实验证实，因此它为我们提供了正反物质之间存在绝对差别的第一个直接证据，可以部分解释为什么我们的世界是物质的，而不是反物质的。该衰变过程也提供了关于物质的明确无误的定义 (从 K_L^0 衰变产生的 e^- 和原子中的 e^- 是等同的，原子则代表了世界)。这个衰变道可以用来和遥远星系中其他文明之间进行通讯。

至此我们讨论的中性 K 介子系统的 CP 破坏是由 CP 本征态混合引起的，即短寿命 K_S^0 介子不完全是 $CP=+1$ 的本征态 K_1，而是含有少量的 K_2 成分，长寿命 K_L^0 介子也不完全是 $CP=-1$ 的本征态 K_2，而是含有少量的 K_1 成分。参阅 (2.4.34)、(2.4.35) 式。这种 CP 破坏现象称为混合 CP 破坏或间接 CP 破坏，是长期以来实验室中观测到的唯一的 CP 破坏。间接 CP 破坏程度大约是 $|\epsilon| \approx 2\times 10^{-3}$。

1999 年 KTeV 和 NA48 实验组发现了另一类 CP 破坏现象，同样发生在中性 K 介子的衰变中。不过这种 CP 破坏的地方不在混合，而在中性 K 介子不同衰变道的衰变振幅里。假设介子用 M 表示，它的某一种衰变过程的末态用 f 表示，M 的反粒子用 $\overline{M}$ 表示，$\overline{f}$ 是 f 的共轭态。如果 CP 守恒，那么 M 的这两种衰变的振幅相同，即 $A(M\to f) = A(\overline{M} \to \overline{f})$。反之，则会出现反映 CP 破坏的不对称性。这种 CP 破坏称为直接 CP 破坏，用另外一个参数 ϵ' 描述。ϵ' 比 ϵ 小三个量级：

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} = (1.66 \pm 0.26) \times 10^{-3}$$

在上面的讨论中我们忽略了直接 CP 破坏。

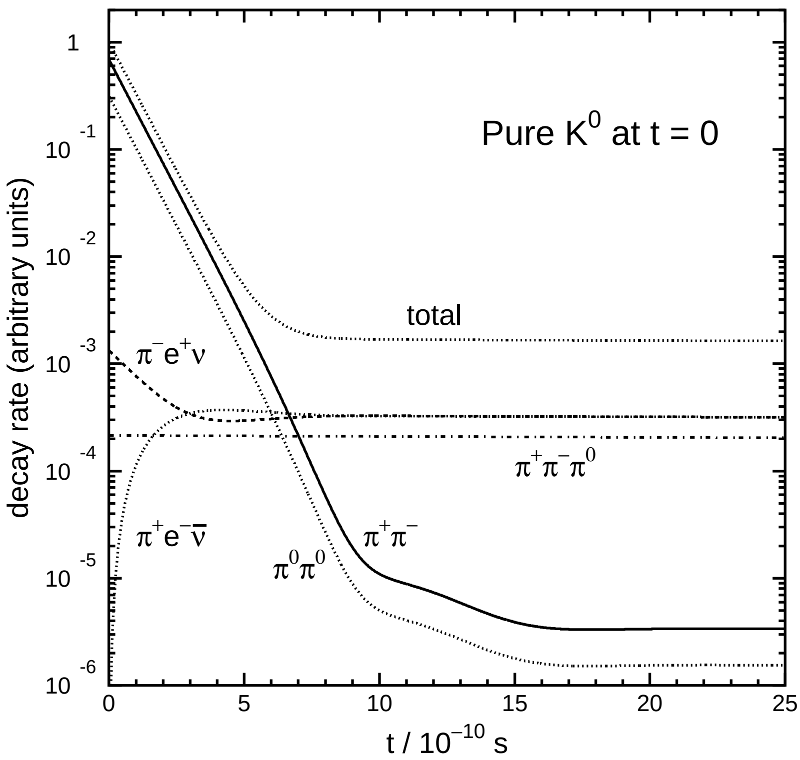


图 2.21: 考虑 CP 破坏，初始时刻为纯 K^0 的束流的各种衰变率和时间的函数关系。

2.5 强子性质

实验发现的粒子中绝大部分是强子。研究强子性质，进而找出其相互作用规律是粒子物理学的重要内容之一。这里我们利用前面的知识，对强子的性质作初步讨论。

2.5.1 强子的产生

我们知道强子有内部结构，有内部结构的粒子可以表现出不同的激发态。实验上有两种方式可以观察到激发态强子的存在。一是通过形成 (formation) 实验，二是通过生成 (production) 实验。这两种过程中强子都以共振态的形式存在。

入射粒子束 a 和靶粒子 b 发生碰撞，如果在 a 的某个特定动量 p_a 附近发现很大的散射截面，我们称 a 和 b 结合形成了激发态强子 R。新强子态产生后立即以一种或几种方式发生衰变。强子的形成过程可表述为：

$$a + b \to R \to c + d + \cdots + f$$

过程示意图和新强子态 R 的能谱如图 2.22 所示。显然在强子的形成实验中，新强子态的量子数由 a, b 的量子数决定，因此其产生是受到严格限制的。

强子也可以通过生成过程产生：

$$a + b \to R + \cdots + e \to c + d + \cdots + e$$

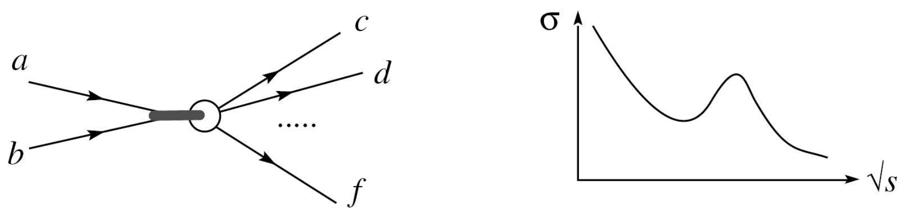


图 2.22: 强子的形成过程示意及能谱。

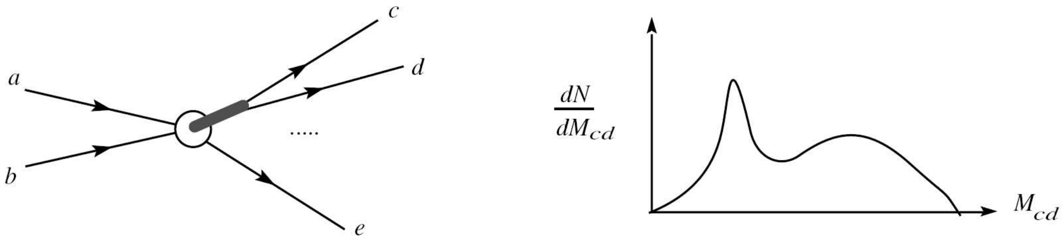


图 2.23: 强子的生成过程示意及质量谱。

新强子态 R 产生后也发生衰变，例如衰变为 c,d，如图 2.23 所示的。在强子 R 的生成过程中伴随着其他粒子的产生，因此对 R 的产生的限制大为放宽，特别是质量允许在很大范围内变化，可以有很多新强子态产生。

粒子物理学中经常利用质子 (反) 质子对撞或者介子轰击核子的打靶实验，即通过产生法来发现强子。一旦新强子的质量区间选定，就可以利用电子正电子对撞等实验，通过形成法来研究该强子的各种衰变道，并最终确定各种量子数和衰变特性。

下面我们讨论强子形成实验中的散射截面。根据 Fermi 黄金规则，初态 $|i\rangle$ 跃迁到末态 $|f\rangle$ 的截面为：

$$\sigma = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

我们在第 1.5.2 节中已经得到经过中间态 $|j\rangle$ 的跃迁过程的 Lorentz 不变矩阵元：

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fj} \frac{1}{q^2 - m^2} \mathcal{M}_{ji} \tag{2.5.1}$$

考虑到中间态粒子是不稳定的，则其波函数变为：

$$\psi(t) = \psi(0) e^{-iEt} \quad \to \quad \psi(0) e^{-iEt} e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

这相当于衰变粒子的能量变为：

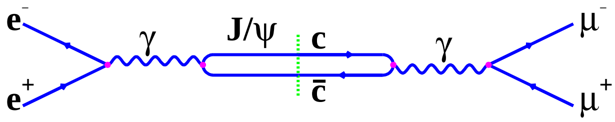
$$E \quad \to \quad E - i\frac{\Gamma}{2} \tag{2.5.2}$$

把上式代入 (2.5.1) 式，当衰变粒子的宽度远小于其质量时 $\Gamma^2 \ll m^2$：

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fj} \frac{1}{q^2 - m^2 + im\Gamma} \mathcal{M}_{ji} \tag{2.5.3}$$

把 (2.5.2) 式应用到电子正电子对撞产生 J/ψ 粒子，J/ψ 衰变为 $\mu^-\mu^+$ 的过程：

$$e^- \ + \ e^+ \ \to \ J/\psi \ \to \ \mu^- \ + \ \mu^+$$



这里初态是 e^-e^+，中间态是 J/ψ，末态是 $\mu^-\mu^+$。在质心系中，$q^2=E^2$，于是散射截面有如下形式：

$$\sigma\sim|\mathcal{M}_{e^-e^+\to\psi}|^2\frac{1}{(E^2-m_\psi^2)^2+\Gamma_\psi^2 m_\psi^2}|\mathcal{M}_{\psi\to\mu^-\mu^+}|^2\rho(E_\mu)$$

由于

$$\Gamma_{\mu\mu}\sim|\mathcal{M}_{\psi\to\mu^-\mu^+}|^2\rho(E_\mu)$$

故截面为：

$$\sigma\sim|\mathcal{M}_{e^-e^+\to\psi}|^2\frac{1}{(E^2-m_\psi^2)^2+\Gamma_\psi^2 m_\psi^2}\Gamma_{\mu\mu}$$

又因为

$$\Gamma_{ee}\sim|\mathcal{M}_{\psi\to e^-e^+}|^2\rho(E_e)$$

其中 $\rho(E_e)$ 是态密度：

$$\rho(E_e)=4\pi\frac{E_e^2}{(2\pi)^3}$$

跃迁率的相互作用相关部分有如下关系：

$$|\mathcal{M}_{\psi\to e^-e^+}|^2=|\mathcal{M}_{e^-e^+\to\psi}|^2$$

于是截面为：

$$\sigma=4m_\psi^2\frac{\pi}{E_e^2}\frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{\mu\mu}}{(E^2-m_\psi^2)^2+m_\psi^2\Gamma_\psi^2}$$

式中因子 $4m_\psi^2$ 来自相对论波函数的归一化。再对中间态粒子的自旋态 J 求和，对初态电子的自旋态 s_1,s_2 求平均，引入自旋因子：

$$\boxed{g=\frac{2J+1}{(2s_1+1)(2s_2+1)}}\tag{2.5.4}$$

则散射截面为：

$$\sigma=g\frac{4\pi m_\psi^2}{E_e^2}\frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{\mu\mu}}{(E^2-m_\psi^2)^2+m_\psi^2\Gamma_\psi^2}$$

由于 $\Gamma^2\ll m_\psi^2$，可以把上式写成更常见的形式：

$$\boxed{\sigma=g\frac{\pi}{E_e^2}\frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{\mu\mu}}{(E-m_\psi)^2+\left(\frac{\Gamma_\psi}{2}\right)^2}}\tag{2.5.5}$$

上式称为 **Breit-Wigner 共振态公式**。

2.5.2 3π 系统

实验测量强子自旋宇称的具体方法有很多种，总的测量依据是强子自旋宇称与其衰变末态粒子的角度或能量等分布之间存在一定关系。利用第 2.2.6 节中介绍的 Dalitz 图，进行强子衰变末态粒子系统的自旋宇称测量是一种重要的实验分析手段[10]。

$K^{\pm},\eta,\omega$ 等介子都可以衰变到 3π 末态。通过对 3π 末态系统的 Dalitz 图分析，可以得到这些介子的自旋。关于 3π 系统的完整分析早在 1964 年就由 C. Zemach 给出[11]。他的一个重要结论是：具有不同同位旋、自旋和宇称的 3π 粒子系统的事例在 Dalitz 三角图中存在明显的空缺区域，如图 2.24 中黑线或黑点所示。对这个问题的简化讨论可参阅 A. Bettini 的 *Introduction to Elementary Particle Physics* (2008) 第4.4节。章乃森书的第 198 页具体介绍了 $K^+\to\pi^+\pi^+\pi^-$ 过程中末态 3π 系统自旋宇称的 Dalitz 分析法。

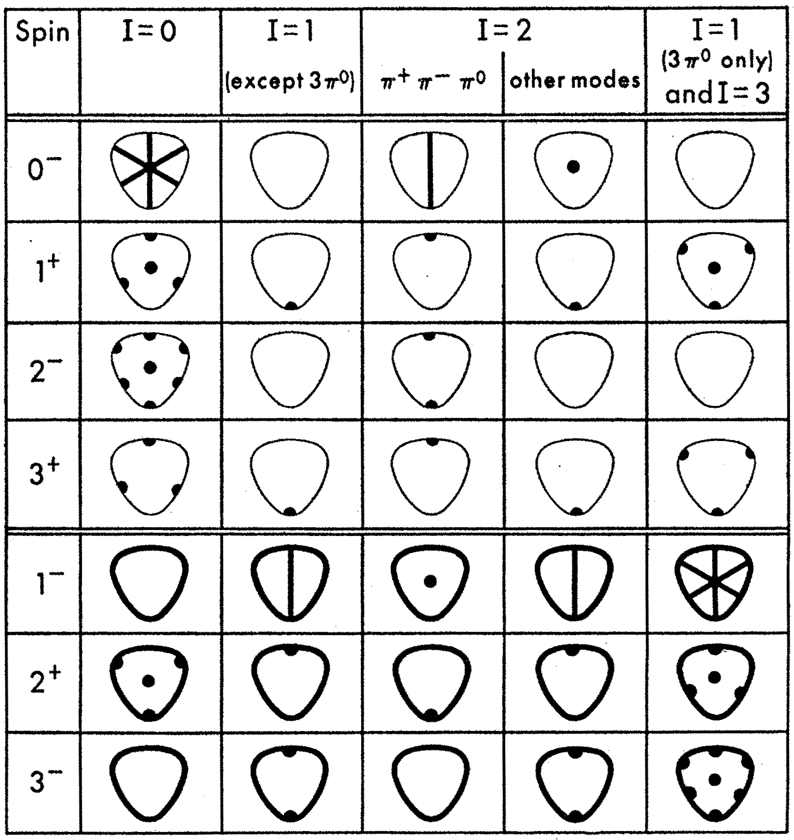


FIG. 2. Regions of the 3π Dalitz plot where the density must vanish because of symmetry requirements are shown in black. The vanishing is of higher order (stronger) where black lines and dots overlap. In each isospin and parity state, the pattern for a spin of $J+$ even integer is identical to the pattern for spin J, provided $J\geqq 2$. (Exception: vanishing at the center is not required for $J\geqq 4$.)

图 2.24: 3π 系统的 Dalitz 图。

[10] 由于角动量守恒，这样测得的末态粒子系统的自旋也就是衰变粒子的自旋。但是测得的宇称是专指末态粒子系统的，不一定等于衰变粒子的宇称。

[11] 参阅文献 Zemach, C (1964) *Phys. Rev.* **133** B1201

2.5.3 OZI 规则

二十世纪六十年代在研究短寿命介子时遇到一个不好理解的问题。当时发现的 ω 介子和 ϕ 介子的量子数完全相同，都是 $J^{PC}=1^{--}$，$I^G=0^-$，它们的质量和宽度分别是：

$$m_\omega = 782.7\,\text{MeV} \qquad \Gamma_\omega = 8.5\,\text{MeV}$$
$$m_\phi = 1019.5\,\text{MeV} \qquad \Gamma_\phi = 4.3\,\text{MeV}$$

既然量子数相同，它们的衰变道应该相同。考虑到 ω 介子的质量比 ϕ 介子的要轻，对于任一给定的衰变道，ω 的相空间比 ϕ 的要小。如果相互作用机制相同，则 ω 在该特点衰变道的部分宽度应该比 ϕ 的小。再考虑到 ω 质量较低，有些衰变道只有 ϕ 介子才具有，因此 ω 的总宽度要比 ϕ 的窄。然而，上式表明实验给出 ω 介子的宽度比 ϕ 介子的要宽。特别是 $\omega\to\pi^++\pi^-+\pi^0$ 的部分宽度为 7.6 MeV，而 $\phi\to\pi^++\pi^-+\pi^0$ 的部分宽度仅为 0.6 MeV，

对这个问题的回答涉及动力学机制。按照夸克模型，如果 ω 粒子是 $u\overline{u}$ 和 $d\overline{d}$ 的线性叠加，ϕ 是 $s\overline{s}$ 态，则当 ω 衰变时，ω 介子中原有的组份夸克和组份反夸克都转化为末态粒子的组份夸克，但是 ϕ 介子中原有的组份夸克必须湮灭掉，其衰变末态粒子的组份夸克必须另行成对产生出来，因此 ϕ 介子到 3π 的衰变较 ω 衰变困难就可以理解了。如果画出 ϕ 的衰变过程费曼图，并且只画出组份夸克费米子线，如图 2.25 所示，则可以看到 ϕ 介子到 3π 的费曼图中断裂成两个互不关联的部分，而 ω 粒子到 3π 的图是一个整体。

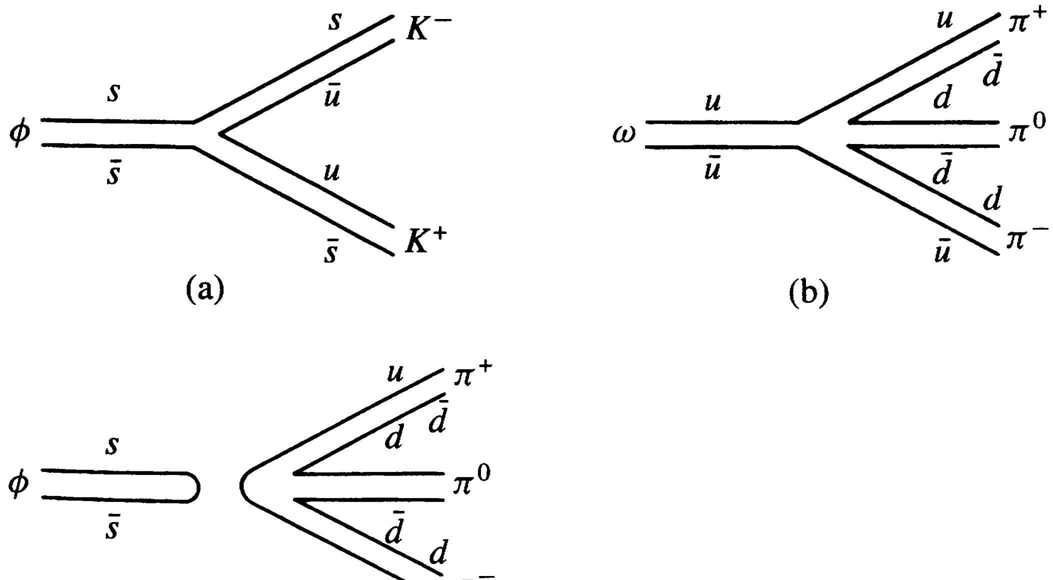


图 2.25: ϕ、ω 衰变和 Zweig 规则。

受这个例子启发，S. Okubo, Zweig 和 J. Iizuka 总结出一个经验规则：在强子衰变或反应过程中，如果组份夸克的费曼图断裂成互不关联的两部分，则该过程的概率被大大压低。这个规则称为 OZI 规则，或 Zweig 规则。图 2.25 中 $\omega\to\pi^++\pi^-+\pi^0$ 衰变道是 Zweig 允许的，$\phi\to\pi^++\pi^-+\pi^0$ 衰变道是 Zweig 禁戒的。

2.5.4 ψ 粒子家族

丁肇中早期在矢量介子 ρ,ω,ϕ 方面做过多年研究。这些矢量介子的量子数和光子的相同，都是 $J^{PC}=1^{--}$，只是质量较重，也称为重光子。丁肇中认为很难想象只存在三种矢量介子，试图通过实验寻找更多的 $J^{PC}=1^{--}$ 的重矢量介子。

由于寻找的新粒子质量未知，因此最好的方法是利用强子散射的生成实验来发现新粒子，从而确定粒子的质量。根据假设的量子数，新粒子应该能够衰变到 e^- 和 e^+。因此丁肇中提出在 BNL 的 AGS 质子加速器上建造一台磁谱仪，利用加速器产生的质子轰击固定靶，通过对 e^-e^+ 的探测，在 e^-e^+ 有效质量直到 5 GeV 的范围内普查重矢量粒子，为方便起见，称为 J 粒子：

$$\begin{array}{l} p \;+\; \text{Be} \;\rightarrow\; J \;+\; X \\ \qquad\qquad\qquad \hookrightarrow e^- \;+\; e^+ \end{array} \tag{2.5.6}$$

其中 X 代表所有其他粒子。因为实验测量的是 e^- 和 e^+ 两个粒子，所以这种反应过程称为双举过程 [12]。

现代高能粒子的散射实验中可以产生很多粒子，其中寿命极短的共振态经过各种级联衰变过程，最终产生很多实验可探测的末态粒子，包括 $\gamma,e^{\pm},\mu^{\pm},K^{\pm},p,\overline{p},n$ 等。它们携带了相互作用的各种信息。为了记录和分析这些粒子的全面信息 (电荷、动量、质量、角分布等)，用单个探测器是远远不够的。必须把各种不同类型的探测器组合起来，它们和电子学以及磁体组成的系统称为磁谱仪，或者谱仪。为了探测 e^- 和 e^+，丁肇中设计建造了一台双臂谱仪，如图 2.26 所示。

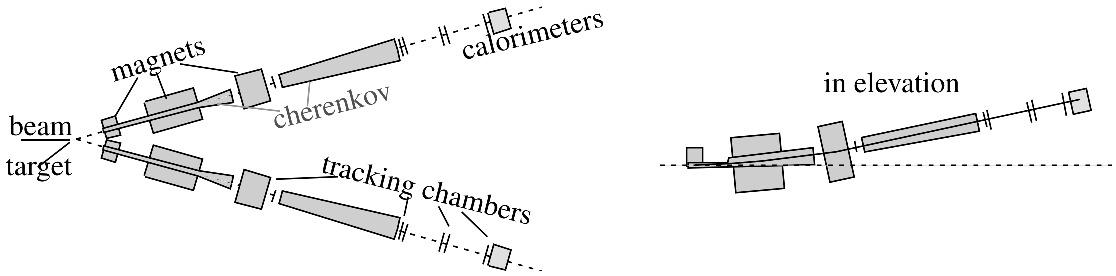


图 2.26: 丁肇中发现 J/ψ 粒子的双臂磁谱仪。

实验的主要困难在于衰变产物中两个带电粒子基本上是带电 π 介子，大约每一百万个事例中才有一对电子产生。因此谱仪必须能够有很好的排除强子的能力。此外谱仪应该有很高的动量和角度探测精度。

设正负电子对的动量为 p_1,p_2，角度为 θ_1,θ_2，则 e^-e^+ 的不变质量为：

$$M_{e^-e^+}=\sqrt{2m_e^2+2E_1E_2-2p_1p_2\cos(\theta_1+\theta_2)}$$

1974 年，丁肇中领导的实验组得到了 e^-e^+ 的不变质量分布，如图 2.27 所示，图中显示了一个非常清楚的窄共振峰，这就是 J 粒子，其质量为 3100 MeV，宽度小于 5 MeV。

与此同时，SLAC 的 Richter 实验组利用 SPEAR 正负电子加速器上的 Mark I 通用磁谱仪，从形成实验中也发现了 J 粒子，他们称之为 ψ 粒子。因为该粒子在两个

[12]高能物理散射实验中，可以测量所有次级粒子的动量和能量。这称为遍举过程 (exclusive process)。也可以只测量其中一个或两个或几个粒子的动量和能量，这称为单举 (inclusive) 或双举或多举过程。

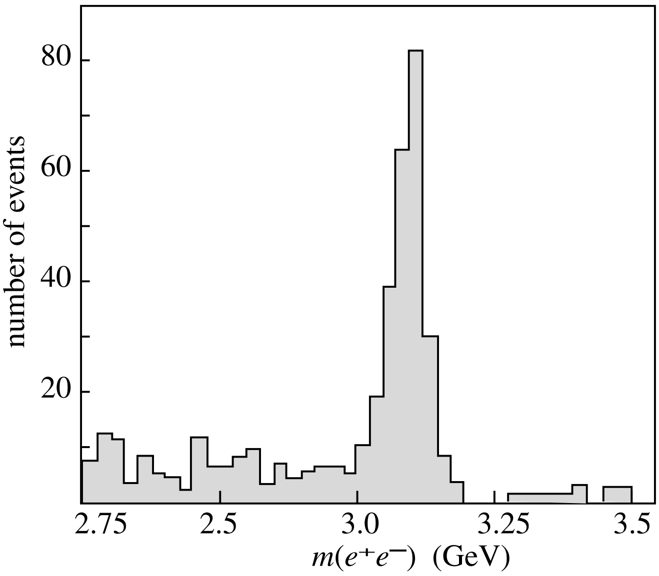


图 2.27: BNL 质子轰击 Be 靶实验中发现 J/ψ 的 e^-e^+ 不变质量谱。

实验室中的发现是独立的，因此现在称为 J/ψ 粒子。SPEAR 加速器的最大质心能量为 $\sqrt{s}=8\,\mathrm{GeV}$。Richter 等人把加速器能量调到 $\sqrt{s}=3\,\mathrm{GeV}$ 附近，然后缓慢调节加速器能量 (称为扫描)，并测量了如下几种不同过程中的截面：

$$\begin{aligned} e^- + e^+ \rightarrow \psi &\rightarrow \text{hadrons} \\ &\rightarrow e^- + e^+ \\ &\rightarrow \mu^- + \mu^+ \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

结果发现在 J/ψ 粒子质量的附近，截面突然高出大约两个数量级，形成明显的共振峰，如图 2.28 所示。

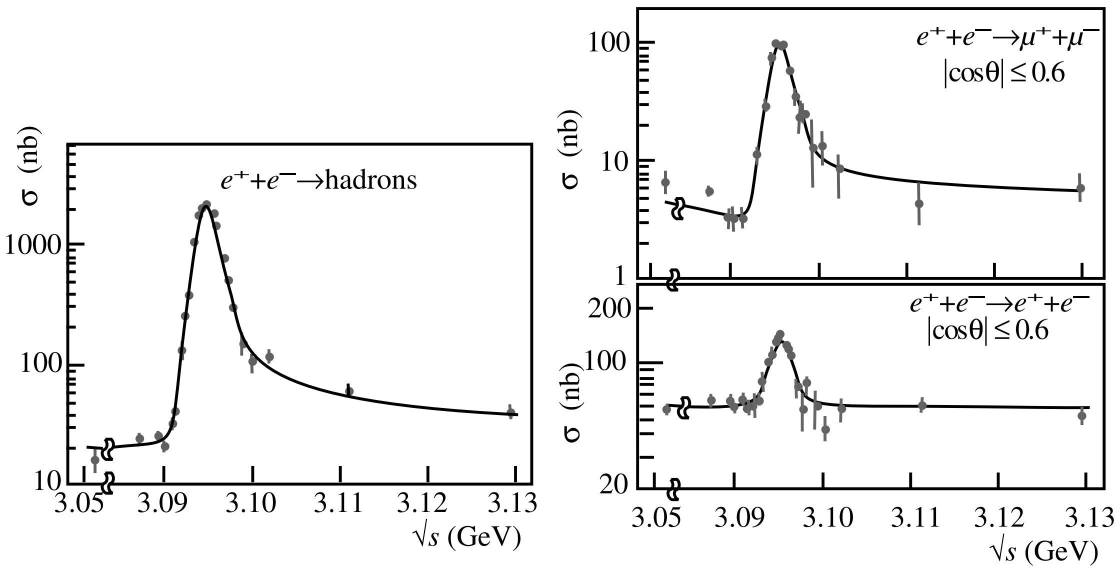


图 2.28: SLAC 正负电子对撞实验中发现的 J/ψ 能谱。

❍ J/ψ 共振态能衰变到 e^-e^+，又能在 e^-e^+ 对撞中产生，这两个过程都是以单光子为媒介，因此预期 J/ψ 的量子数 $J^{PC}=1^{--}$，和光子的量子数一样。不过由于 J/ψ 粒子的性质很出人意料，需要对它的量子数进一步分析和确认。

❍ 首先 J/ψ 的自旋宇称也可以是 $J^P=1^+$，通过宇称破坏的弱作用过程衰变。为了检测这种可能性，考虑 e^-e^+ 湮灭生成 $\mu^-\mu^+$ 的反应。通常若反应中没有共振态出现，则有如下过程：

$$e^- \ + \ e^+ \ \to \ \gamma \ \to \ \mu^- \ + \ \mu^+$$

如果反应中产生了共振态 J/ψ，则还有如下过程：

$$e^- \ + \ e^+ \ \to \ J/\psi \ \to \ \mu^- \ + \ \mu^+$$

我们知道 γ 的自旋宇称 $J^P=1^-$，如果 J/ψ 有相同的的自旋宇称 $J^P=1^-$，那么上述两个过程的振幅之间会发生干涉，如果 J/ψ 的 $J^P=1^+$，则无干涉。图 2.29 给出了 $e^-+e^+\to\mu^-+\mu^+$ 和 $e^-+e^+\to e^-+e^+$ 之间的截面之比。如果存在干涉，则干涉效应会在 J/ψ 峰下产生一个下陷，如图中实线所示，反之则如图中虚线所示，实验数据用带误差的点表示。比较后发现存在干涉。因此 J/ψ 粒子的自旋宇称确定是 $J^P=1^-$。

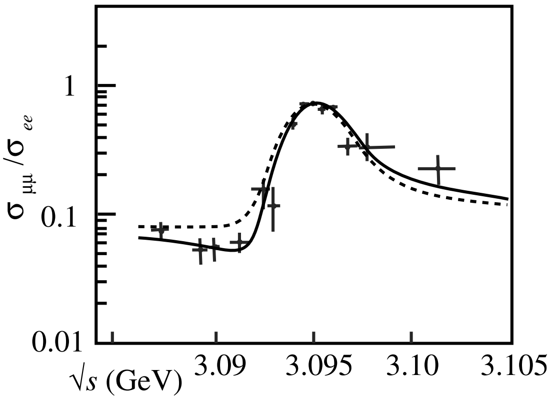


图 2.29: $e^-+e^+\to\mu^-+\mu^+$ 和 $e^-+e^+\to e^-+e^+$ 的截面之比。

❍ 其次考虑 J/ψ 粒子的强子衰变。由于 J/ψ 的宽度很小，因此有可能是电磁衰变。通过测量 $e^-+e^+\to n\pi$ 中截面和能量的关系曲线，当 $n=3$ 和 5 时发现出现共振峰，但是当 $n=2$ 和 4 时无共振峰。这说明反应过程中 G 宇称守恒，且 $G=-1$，因此 J/ψ 的强子衰变是强相互作用过程，

❍ 最后实验发现 J/ψ 衰变到 $\rho^0\pi^0$ 的分支比和衰变到 $\rho^+\pi^-$ 或者 $\rho^-\pi^+$ 的分支比相等，所以 J/ψ 的同位旋是 $I=0$。

Mark I 合作组在发现 ψ 粒子后在 SPEAR 上进行了更系统的扫描，十天后发现了另一个窄共振峰 ψ'，它的量子数和 J/ψ 的一样，也是 $J^{PC}=1^{--}$。J/ψ 和 ψ' 的质量和宽度可以通过共振峰形状求得。Mark I 给出的值为：

$$m_\psi = 3097\,\text{MeV} \qquad \Gamma_\psi = 91\,\text{keV}$$
$$m_{\psi'} = 3686\,\text{MeV} \qquad \Gamma_{\psi'} = 281\,\text{keV}$$

早在 1970 年 Glashow 等就预言了质量很大的 c 夸克存在。1974 年 J/ψ 和 ψ' 被发现后，人们立即判断它们是 $c\overline{c}$ 的 $^3\mathrm{S}_1$ 束缚态，前者是 $1^3\mathrm{S}_1$，后者是 $2^3\mathrm{S}_1$。为了对这两个粒子有更深刻的理解需要进行更多的实验研究。1976 年 Mark I 在质心能量 $\sqrt{s} = 4.02\,\mathrm{GeV}$ 处寻找带 c 夸克的赝标介子。他们主要研究了如下反应道：

$$e^- + e^+ \to D^0 + \overline{D}^0 + X$$
$$e^- + e^+ \to D^- + D^+ + X$$

这些赝标介子寿命很短，很快衰变。从它们的衰变末态粒子可以找出这些共振态。第一个赝标介子是在 $K^\pm\pi^\mp$ 质量分布中找到的，对应如下衰变：

$$D^0 \to K^- + \pi^+ \quad (+\text{共轭过程})$$

中性 D 介子的质量为 1865 MeV，宽度比实验精度还小。但是下列衰变是强烈禁戒的：

$$D^0 \nrightarrow K^+ + \pi^- \quad (+\text{共轭过程})$$
$$D^0 \nrightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (+\text{共轭过程})$$

随后，又在下列衰变道中发现了带电的 D 介子：

$$D^+ \to K^- + \pi^+ + \pi^+ \quad (+\text{共轭过程})$$

带电 D 介子的质量为 1875 MeV，宽度同样很小。实验发现下列衰变是强烈禁戒的：

$$D^+ \nrightarrow K^+ + \pi^+ + \pi^- \quad (+\text{共轭过程})$$
$$D^+ \nrightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \quad (+\text{共轭过程})$$

从这些实验事实出发，经过一些理论分析可知 D^+ 和 D^0 介子是 $J^P = 0^-$ 的质量最轻的带 c 夸克的介子，它们的反粒子分别是 D^- 和 $\overline{D}^0$，相应的夸克组份为：

$$D^+ = c\overline{u}, \qquad D^- = u\overline{c}$$
$$D^0 = c\overline{d}, \qquad \overline{D}^0 = d\overline{c}$$

故 D^+ 和 D^0 的粲数 $C = +1$，D^- 和 $\overline{D}^0$ 的粲数 $C = -1$。D 介子允许和禁戒的衰变规律可以从 GIM 机制得到很好的解释。还有一种粲数为 $C = +1$ 的 D_s^+ 介子，它和它的反粒子的夸克组份是：

$$D_s^+ = c\overline{s}, \qquad D_s^+ = s\overline{c}$$

J/ψ 和 ψ 粒子的宽度很窄，因此寿命很长，这可以用 OZI 规则予以解释。与 ϕ 情形略有不同的是，ϕ 可以衰变为一对 K 介子：

$$\phi \to K^0 + \overline{K}^0$$
$$\phi \to K^+ + K^-$$

J/ψ 粒子不能衰变到一对 D^+D^- 介子或一对 $D^0\overline{D}^0$ 介子：

$$J/\psi(\psi') \nrightarrow D^0 + \overline{D}^0$$
$$J/\psi(\psi') \nrightarrow D^+ + D^-$$

因为 $m_{J/\psi}$ 和 $m_{\psi'}$ 比 $m_{D^+} + m_{D^-}$ 和 $m_{D^0} + m_{\overline{D}^0}$ 都小。于是 J/ψ 和 ψ' 粒子只能通过把 c 和 $\overline{c}$ 夸克湮灭的 Zweig 禁戒的过程进行强衰变，衰变概率被大大地压低，它的每一个强衰变道的部分宽度最多只有 keV 的量级，与电磁衰变同一量级。以上结论被后来在 SLAC 发现的 ψ'' 共振峰从另一方面加以肯定。ψ'' 是 $3^3\mathrm{S}_1$ 态，它的质量和宽度为：

$$m_{\psi''} = 3770\,\mathrm{MeV}, \qquad \Gamma_{\psi''} = 24\,\mathrm{MeV}$$

由于 ψ'' 质量大于一对 D 介子，因此可以衰变到一对 D^+D^- 介子或一对 $D^0\overline{D}^0$ 介子，这些过程不再是 OZI 规则禁戒的，ψ'' 的宽度也显得很正常。

2.5.5 ϒ 粒子家族

1977 年 Lederman 和他的合作者在 Fermilab 设计建造了一台双臂谱仪，通过观测高能强子反应产生 $\mu^-\mu^+$ 的双举过程：

$$p \;+\; \mathrm{Be, Cu, Pt} \;\rightarrow\; \mu^- \;+\; \mu^+ \;+\; X$$

发现几个很难分清的共振态，通称为 ϒ。图 2.30 是该实验的 $\mu^-\mu^+$ 不变质量谱。

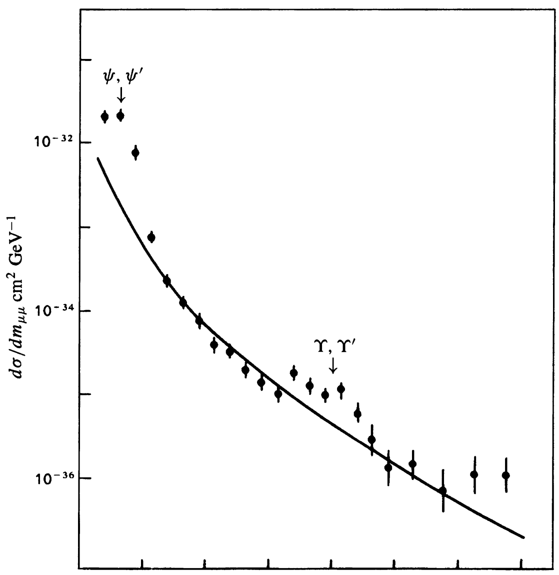


图 2.30: Fermilab 质子轰击固定靶实验中发现 ϒ 的 $\mu^-\mu^+$ 不变质量谱。

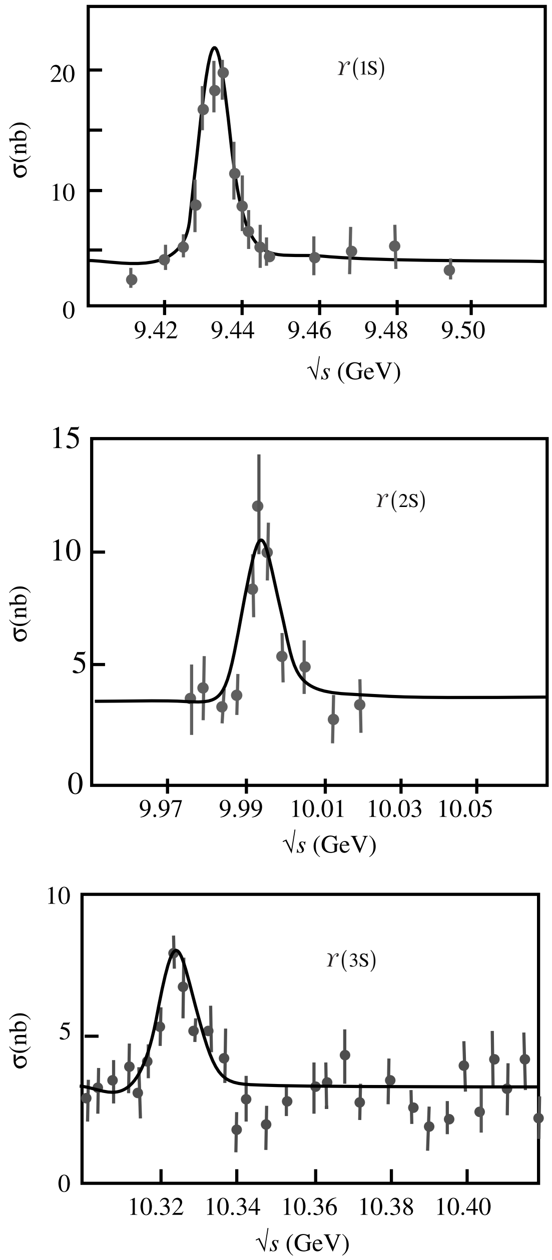


图 2.31: CESR 正负电子对撞机上 CLEO 实验测得的 ϒ 强子截面，显示三个共振峰。

随后在德国 Hamburg 的 DESY 和美国 Cornell 的 CESR 对这些新共振态进行了精密测量和衰变性质的研究。图 2.31 所示为 CESR 正负电子对撞机上 CLEO 实验测得的强子

截面，发现了三个宽度很窄的共振态：

$$
\begin{aligned}
m_{\Upsilon(1^3S_1)} &= 9460\,\text{MeV}, & \Gamma_{\Upsilon(1^3S_1)} &= 53\,\text{keV} \\
m_{\Upsilon(2^3S_1)} &= 10023\,\text{MeV}, & \Gamma_{\Upsilon(2^3S_1)} &= 43\,\text{keV} \\
m_{\Upsilon(3^3S_1)} &= 10352\,\text{MeV}, & \Gamma_{\Upsilon(3^3S_1)} &= 26\,\text{keV}
\end{aligned}
$$

这些 Υ 粒子的量子数都是 $J^{PC}=1^{--}$，$I=0$，它们是 $b\overline{b}$ 的束缚态。窄宽度可以用 OZI 规则予以解释。这和 ψ 粒子家族的情形非常相似。

除了上述 $b\overline{b}$ 束缚态介子，还有其它带有底数 $B=+1$ 的介子，质量最轻的这种介子共有四种，它们及相应的反粒子是：

$$
\begin{aligned}
B^+ &= u\overline{b}, & B^- &= b\overline{u} \\
B^0 &= d\overline{b}, & \overline{B}^0 &= b\overline{d} \\
B_s^0 &= s\overline{b}, & \overline{B}_s^0 &= b\overline{s} \\
B_c^+ &= c\overline{b}, & B_c^- &= b\overline{c}
\end{aligned}
$$

它们都是赝标介子。因为是质量最轻的介子，所以只能通过弱作用衰变。B^+, B^0 有相同的质量 5279 MeV，B_s 的质量为 5368 MeV，B_c 的质量是 6286 MeV。

如同 ψ 粒子家族情形，Υ 也有共振态 $\Upsilon(4^3\text{S}_1)$，它的质量和宽度分别是：

$$
m_{\Upsilon(4^3S_1)} = 10580\,\text{MeV}, \qquad \Gamma_{\Upsilon(3^3S_1)} = 20\,\text{MeV}
$$

由于它的质量 $m_{\Upsilon(4^3S_1)} > m_{B^+} + m_{B^-} = m_{B^0} + m_{\overline{B}^0}$，因此有如下衰变：

$$
\begin{aligned}
\Upsilon(4^3S_1) &\rightarrow B^0 + \overline{B}^0 \\
\Upsilon(4^3S_1) &\rightarrow B^+ + B^-
\end{aligned}
$$

这些过程不再是 OZI 规则禁戒的，$\Upsilon(4^3\text{S}_1)$ 的宽度也就显得正常。

2.5.6 重夸克偶素

电子偶素 e^-e^+、粲夸克偶素 $c\overline{c}$、底夸克偶素 $b\overline{b}$ 都是一种正粒子和一种反粒子组成的两体系统，和氢原子的结构非常类似，氢原子的求解方法可用于处理这些偶素问题。由于 c 夸克和 b 夸克质量比 u,d,s 夸克重很多，因此粲夸克偶素和底夸克偶素也称为重夸克偶素。

一、氢原子

非相对论量子力学相当完美地处理了氢原子问题。氢原子是质量为 m_p 的质子和质量为 m_e 的电子组成的两体系统，通过引入约化质量：

$$
\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}
$$

可以把两体问题转化为一个质心运动和一个电子绕位于原点的 Coulomb 势运动的单体问题。质心运动不涉及动力学机制。单体问题是带电粒子在有心力场中的运动：

$$
V(r) = -\frac{\alpha}{r}
$$

通过求解有心力场中的 Schrödinger 方程，可得到量子化的氢原子能量：

$$E_n(\mathrm{H}) = -\frac{\alpha^2\mu}{2n^2} = -\frac{E_0}{n^2}$$

其中 $E_0 = 13.6\,\mathrm{eV}$ 是基态能量。氢原子的能级如图 2.32 所示，波函数用 n, l, m 三个量子数表示。对于每个确定的主量子数 n，有 n 个轨道量子数 l，对于每个确定的轨道量子数，又有 $2l+1$ 个磁量子数 m。因此氢原子的能级是 n^2 度简并的。实验测量的是电子进行能级跃迁时发出或吸收的光子的波长，这些波长形成氢原子的一系列光谱，由 Rydberg 公式描述。

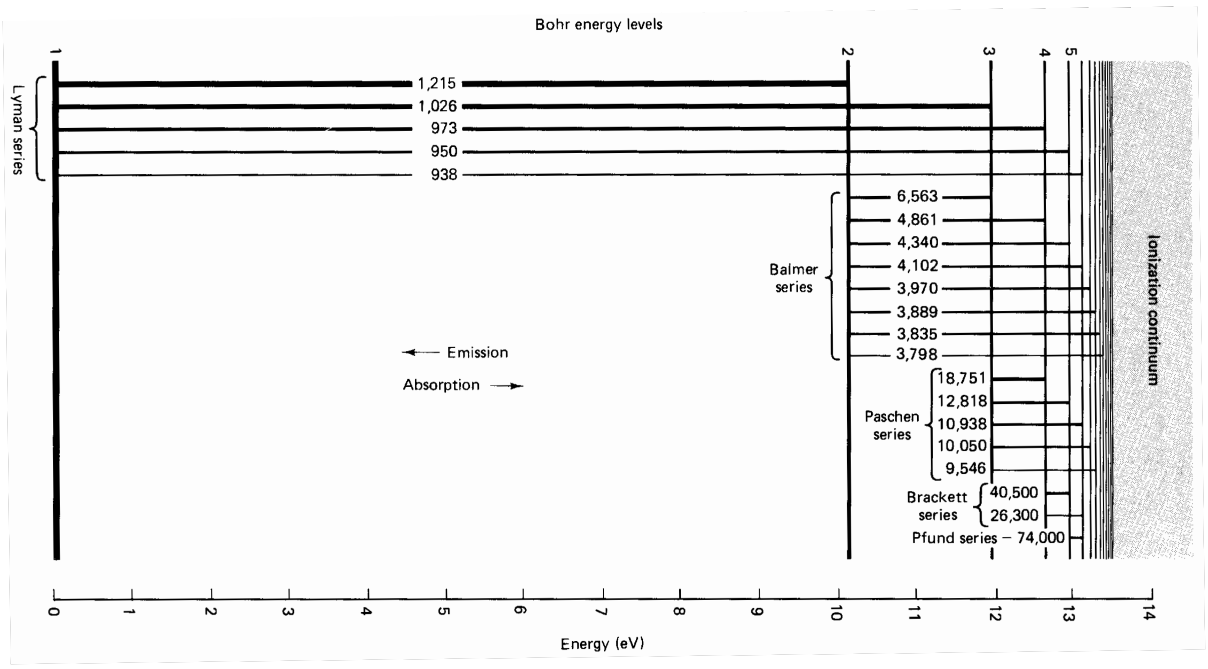


图 2.32: 氢原子能级。

随着实验精度的提高，人们发现氢原子的一条光谱事实上包含两条、三条或更多条光谱。这种称为氢原子精细结构的能级分裂是由相对论效应以及电子的自旋和轨道角动量耦合造成的。考虑这些修正后，计算结果表明第 n 能级分裂为 n 个子能级，用量子数 $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, \left(n-\frac{1}{2}\right)$ 表示。氢原子所有能级都往下偏移，如图 2.33 所示。

氢原子的精细结构的一个特点是能级依赖于 j，而不是 l，两个具有不同 l 值的态属于同一能级。例如 $^2\mathrm{S}_{\frac{1}{2}}$、$^2\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}$ 态是完全简并的。但是 1947 年 W. Lamb 等人的实验结果表明事实并非如此，S 态的能量比 P 态的能量略高。这种微小的称为 Lamb 移动的能级移动源于 QED 的辐射修正，在费曼图中是圈图，必须考虑电磁场量子化后才能给出完整的计算结果。结果表明辐射修正依赖于 l，因此造成具有不同 l 的态，例如 $2\mathrm{S}_{\frac{1}{2}}$、$2\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}$ 的能级分裂。

氢原子的能级除了以上修正，还存在超精细结构，其根源在于质子具有自旋，质子的自旋与电子的轨道角动量会发生相互作用。这种机制类似电子的自旋和轨道角动量的耦合，不过在量级上小大约三个数量级，正比于 $\frac{m_e}{m_p}$。

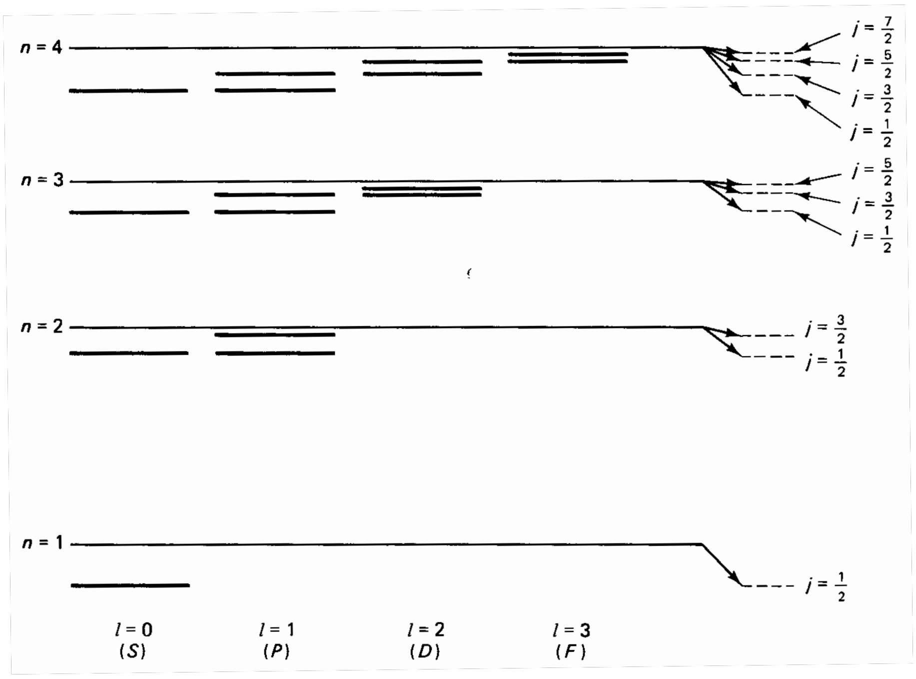


图 2.33: 氢原子的精细结构。

二、电子偶素

电子偶素与氢原子的一个明显区别是质量很大的质子替换为正电子，不过这不是本质上的区别，以上对氢原子的讨论可以应用到电子偶素的情形。考虑到正负电子质量相同，约化质量为 $\frac{m_e}{2}$，很容易写出电子偶素的能级：

$$E_n(e^- e^+) = \frac{1}{2} E_n(\mathrm{H}) = -\frac{\alpha^2 m_e}{4n^2}$$

相应的精细结构、Lamb 移动和超精细结构修正都可以同样讨论，不过我们指出几点：

- 在电子偶素中，能级的超精细结构分裂和精细结构分裂具有相同量级，这是因为氢原子中的 $\frac{m_e}{m_p}$ 因子在电子偶素中为 $\frac{m_e}{m_e} = 1$。精细结构引起的能级变化为：

$$\Delta E \sim \frac{\alpha^4 m_e}{n^3}$$

- Lamb 移动引起的能级分裂最小，此外这种能级简并的消除在精细结构层次已经发生，因此在电子偶素中 Lamb 移动已无多大意义。

- 氢原子是稳定的，但是在电子偶素中 e^- 和 e^+ 可以湮灭生成两个或两个以上的光子。根据第 2.4.2 节例 3 中结论：如果电子偶素处在 $^1\mathrm{S}_0$ 自旋单态，则主要衰变为两个光子，如果处在 $^3\mathrm{S}_1$ 自旋三重态，则衰变主要为三个光子。计算表明：

$$\Gamma(2\gamma) = \frac{\alpha^5 m_e}{2}$$
$$\Gamma(3\gamma) = \frac{2(\pi^2 - 9)}{9\pi} \alpha^6 m_e$$

综合上述因素，电子偶素的能级如图 2.34 所示，电子偶素的态一般用 $n^{2S+1}\mathrm{L}_J$ 表示。

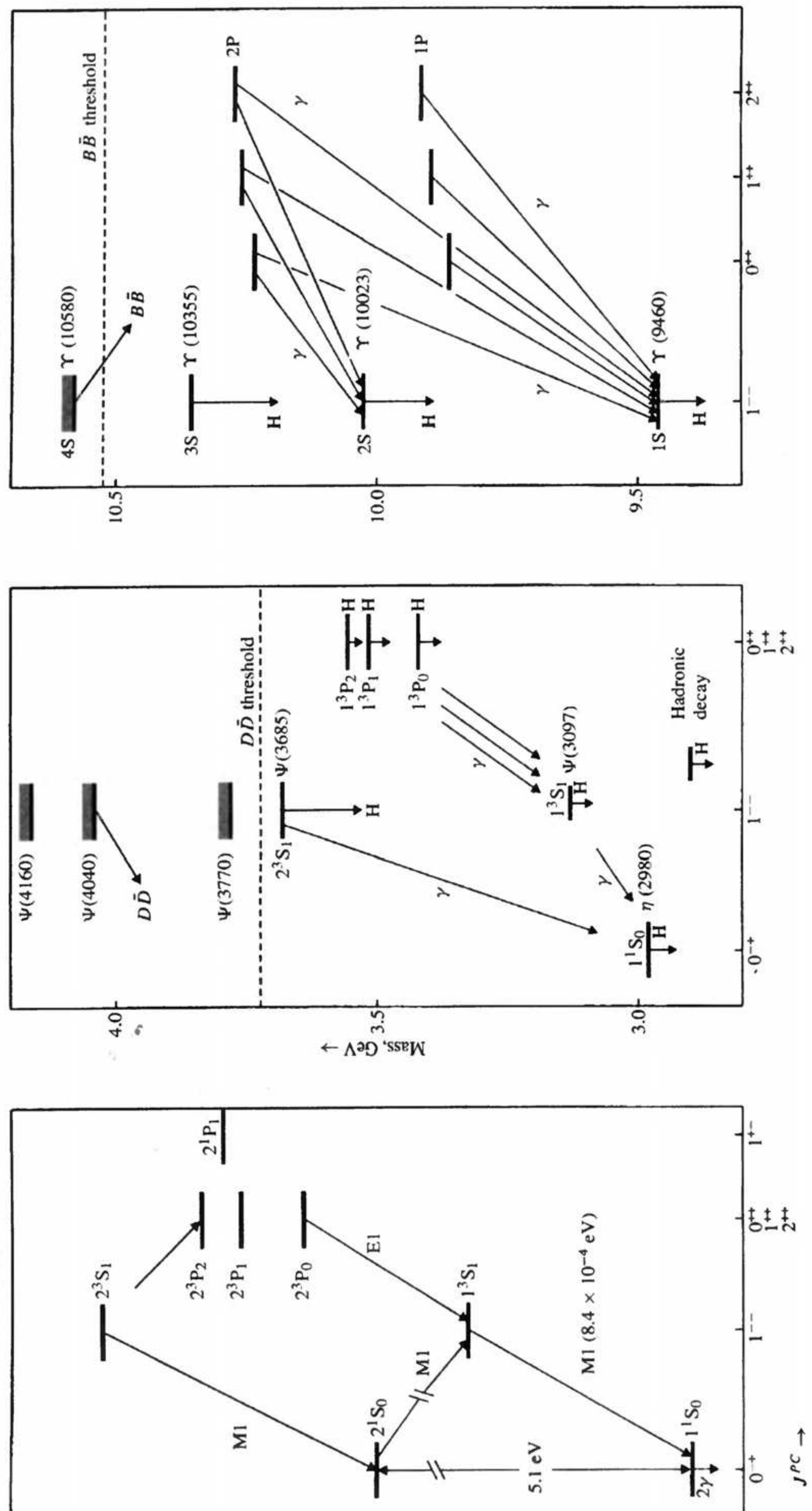


图 2.34: 电子偶素、粲偶素和底偶素的能级。电子偶素中的 2P 能级和重夸克偶素中的 1P 能级对应。电子偶素的能级间距已经放大。

三、重夸克偶素

图 2.34 中还给出了粲夸克偶素和底夸克偶素的能级。简单比较就可以发现它们和电子偶素的能级很相近，因此把夸克偶素归因于正反夸克的束缚态是可信的。

电子偶素的势场 $-\frac{\alpha}{r}$ 是熟知的电磁相互作用势。由于强相互作用和电磁相互作用都是由无质量的矢量玻色子传递的，因此它们的势场形式上应该相似。考虑到胶子带色，强作用应该存在如下形式的势场：

$$-\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r}$$

其中 $\frac{4}{3}$ 来自胶子的色因子，由不同颜色的胶子的数目决定。但是夸克是禁闭在强子中的，因此不同于电磁相互作用，当夸克之间距离 r 较大时，强相互作用随着 r 的增加而增大。这部分势场的精确形式未知。用谐振子势 $\sim r^2$、对数势 $\sim \ln r$、线性势 $\sim r$ 都可以合理地描述实验数据 (因为实验数据所在的 r 区间很窄，这些势在该区间内没有原则区别)。通常采用最简单的线性势。于是强相互作用势为：

$$V(r) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r} + kr \tag{2.5.8}$$

在粲夸克偶素和底夸克偶素能区，$\alpha_s \approx 0.2$。图 2.35 所示是 $\alpha_s = 0.2, k = 1\,\text{GeV}\,\text{fm}^{-1}$ 时的强相互作用势。由于夸克偶素相互作用势中同时存在线性项和类似 Coulomb 项，因此夸克偶素的 Schrödinger 方程必须通过数值解得到。

注意图 2.34 中并没有列出夸克偶素的全部能级。以粲夸克偶素 $c\bar{c}$ 为例，根据第 2.3.2 节例 1，当 $n=1$ 时，粲夸克偶素有两个态，当 $n=2$ 时，有六个态：

谱学符号	PDG 名称	曾用名	质量	宽度
$1^1\mathrm{S}_0$	$\eta_c(1S)$	$\eta_c, \eta(2980)$	$2980.3 \pm 1.2\,\text{MeV}$	$26.7 \pm 3.0\,\text{MeV}$
$1^3\mathrm{S}_1$	$J/\psi(1S)$	J/ψ	$3096.916 \pm 0.011\,\text{MeV}$	$93.2 \pm 2.1\,\text{keV}$
$2^1\mathrm{S}_0$	$\eta_c(2S)$	η_c'	$3637 \pm 4\,\text{MeV}$	$14 \pm 7\,\text{MeV}$
$2^1\mathrm{P}_1$	h_c	$^1\mathrm{P}_1$	$3525.93 \pm 0.27\,\text{MeV}$	$< 1\,\text{MeV}$
$2^3\mathrm{S}_1$	$\psi(2S)$	$\psi', \psi(3685)$	$3772.92 \pm 0.35\,\text{MeV}$	$27.3 \pm 1.0\,\text{MeV}$
$2^3\mathrm{P}_0$	$\chi_{c0}(1P)$	χ_0	$3414.75 \pm 0.31\,\text{MeV}$	$10.2 \pm 0.7\,\text{MeV}$
$2^3\mathrm{P}_1$	$\chi_{c1}(1P)$	χ_1	$3510.66 \pm 0.07\,\text{MeV}$	$0.89 \pm 0.05\,\text{MeV}$
$2^3\mathrm{P}_2$	$\chi_{c2}(1P)$	χ_2	$3556.20 \pm 0.09\,\text{MeV}$	$2.03 \pm 0.l2\,\text{MeV}$

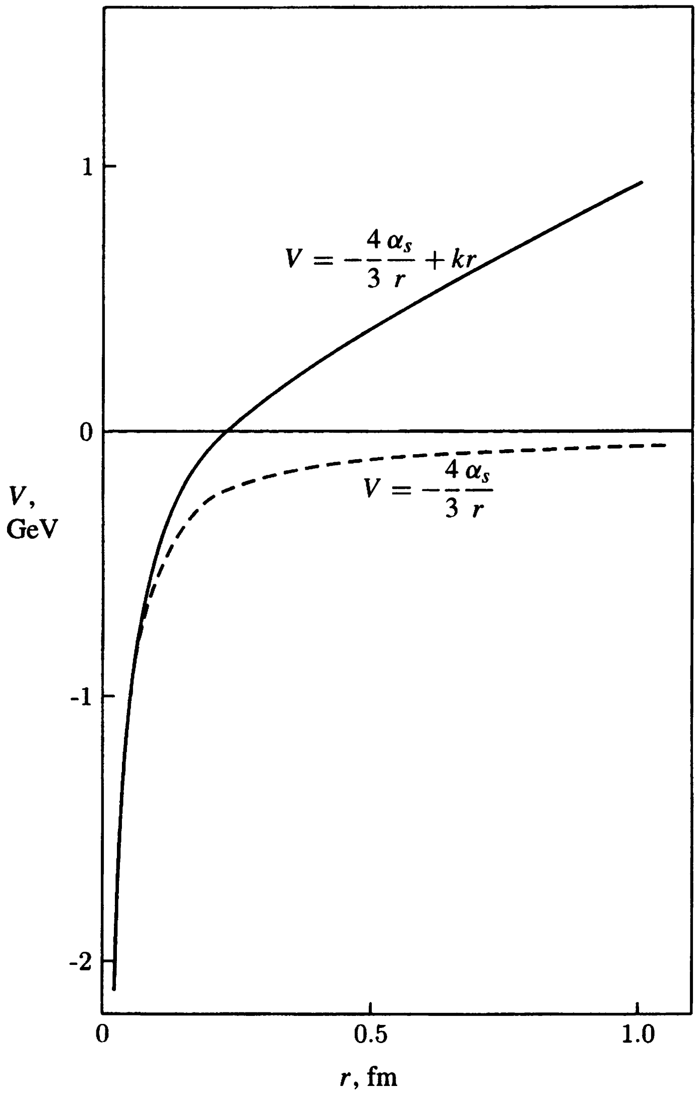


图 2.35: $\alpha_s = 0.2, k = 1\,\mathrm{GeV\,fm^{-1}}$ 时的强相互作用势。

第 3 章　对称性及其应用

对称性 (symmetry) 在粒子物理研究中占有很重要的地位。例如，在相互作用动力学机制还不够清楚的情况下，可以通过对称性的研究获得这方面的知识，对相互作用哈密顿量的具体形式给出相应的限制，从而对动力学机制有某种程度的了解。另一方面，有时候虽然已经有了很好的动力学理论，但是具体计算很复杂，那么通过对称性分析，可以很简洁地得到同样结果。

本章首先介绍对称性和守恒定律的一般概念以及它们之间的内在联系。我们将讨论连续时空的对称性，导出能量、动量和角动量守恒定律；我们还将讨论空间反射和时间反演等分立时空的对称性。接着从粒子物理学的视角简单介绍处理对称性的有力工具 — 群论。最后重点探讨粒子物理学中 U(1)、同位旋 SU(2)、味 SU(3) 和色 SU(3) 等内部对称性，进而给出强子结构的描述。

3.1　对称性和守恒定律

物理学中对称性的概念可以概括为：如果某一系统在某一变换下保持不变，则说该系统具有该变换所对应的对称性。物理学中有些对称性是精确的，而有些对称性是近似的，称之为对称性破坏或破缺。检验对称性完善或破缺的标准只能是实验事实，任何主观想象是靠不住的。

既然对称性和某种特定的变换相联系，那么就可以根据变换所涉及的对象以及变换的性质对对称性进行分类。对时间和空间性质进行变换所对应的对称性称为时空对称性 (space time symmetry)，时空对称性是最常见、最基本的对称性。但是并不是所有对称性都能归入这类对称性之中，对时间和空间之外的其他性质进行变换所体现的对称性称为内部对称性 (internal symmetry)。

人们从经典物理和量子物理中的大量实验事实总结出很多守恒规律。经过长期研究，人们发现对称性和守恒定律有着密切的联系。理论上说，这些守恒定律源于相互作用哈密顿量的某种对称性，或者说运动方程具有某种变换下的不变性必导致系统存在某种相应的守恒量。而所谓的不变性或对称性的根源在于自然界中存在某种不可测量性或不可分辨性。表 3.1 给出了各种不可分辨性所引起的各种对称性，以及由此导致的相应的守恒定律及其适用范围。

粒子物理学中遇到的守恒量，有些是经典物理中就熟知的，例如能量、动量、角动量、电荷等；另一些是微观物理学中特有的，例如同位旋、轻子数、重子数、奇异数、粲数、底数、P 宇称、C 宇称、G 宇称、CP 宇称等。有经典对应的守恒量都是相加性量子数，而无经典对应的守恒量中有些是相加性的量子数，例如同位旋、轻子数、重子数、奇异数、粲数、底数，有些则是相乘性的量子数，如 P 宇称、C 宇称、G 宇称、CP 宇称等。相乘性守恒量都是无经典对应的守恒量。

表 3.1: 粒子物理学中的一些对称性和守恒量

不可观测量	不变性	守恒量	适用范围
绝对位置	空间平移 $\mathbf{r}\to\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$	动量 ($\mathbf{p}$)	强、电磁、弱
绝对时间	时间平移 $t\to t+\delta t$	能量 (E)	强、电磁、弱
绝对方向	空间转动 $\theta\to\theta'$	角动量 ($\mathbf{J}$)	强、电磁、弱
绝对速度	Lorentz 变换	Lorentz 群生成元	强、电磁、弱
绝对的左和右	空间反射 $\mathbf{r}\to-\mathbf{r}$	P 宇称	强、电磁
电荷绝对符号	电荷共轭 $e\to-e$	C 宇称	强、电磁
时间流动方向	时间反演 $t\to-t$		强、电磁
不同电荷态的相对相位	$\psi\to e^{i\theta Q}\psi$	电荷 (Q)	强、电磁、弱
不同重子数态的相对相位	$\psi\to e^{i\theta\mathcal{B}}\psi$	重子数 ($\mathcal{B}$)	强、电磁、弱
不同轻子数态的相对相位	$\psi\to e^{i\theta\{L_e,L_\mu.L_\tau\}}\psi$	轻子数 (L_e,L_μ,L_τ)	强、电磁、弱
同位旋多重态成员	SU(2) 规范变换	同位旋 (I)	强
		同位旋第三分量 (I_3)	强、电磁

3.1.1 经典力学中的对称性

经典物理学中的对称性和守恒定律之间的普遍联系首先由 A.E. Noether 于 1915 年给出，正式发表于 1918 年。Noether 定理可表述为：若运动规律在某一明显不依赖于时间的变换下具有不变性，则必然相应存在一个守恒定律。

下面讨论经典力学如何从绝对时间、空间绝对位置、和空间绝对方向不可测量导出相应的能量、动量和角动量守恒定律。在拉格朗日力学中，力学系统由拉格朗日函数 (拉氏量) 来描述：

$$L=L(q_i,\dot{q}_i) \tag{3.1.1}$$

式中 q_i、$\dot{q}_i$ 分别是系统第 i 个自由度的广义坐标和广义速度。

如果时间没有绝对原点，即绝对时间不可测量，则系统在时间平移下不变，此时拉氏量不显含时间，于是：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L=\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)=\sum_i(\dot{p}_i\dot{q}_i+p_i\ddot{q}_i)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i p_i\dot{q}_i\right)$$

即：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i p_i\dot{q}_i-L\right)=0$$

所以：

$$H=\sum_i p_i\dot{q}_i-L=\text{constant} \tag{3.1.2}$$

上式表明力学系统的总能量守恒。

一般情况下 q_i、$\dot{q}_i$ 都是时间 t 的函数，即拉氏量与时间有关，则定义拉氏量对时间的积分为作用量：

$$A=\int_{t_1}^{t_2}L(q_i,\dot{q}_i)\mathrm{d}t$$

它是广义坐标和广义速度的泛函。此时力学系统的运动规律，按哈密顿原理进行，这可以通过变分方法表述，即：当广义坐标和广义速度作任意变化 $\delta q_i(t)$、$\delta \dot{q}_i(t)$，但在积分限上不变：

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \tag{3.1.3}$$

$$\delta \dot{q}_i(t_1) = \delta \dot{q}_i(t_2) = 0 \tag{3.1.4}$$

时，作用量取极值 $\delta A = 0$。于是：

$$\delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) \mathrm{d}t = 0$$

由于积分限上不变，上式变为：

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i) \mathrm{d}t = 0$$

δL 的变化是由 $\delta q_i(t)$、$\delta \dot{q}_i(t)$ 引起的，故：

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \mathrm{d}t = 0 \tag{3.1.5}$$

上式第二项分部积分：

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}(\delta q_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_i \mathrm{d}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

由于 (3.1.3) 式，上式第一项为零。所以 (3.1.5) 式为：

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \mathrm{d}t = 0$$

对于任意 δq_i，上式成立的条件是被积函数为零，即：

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \tag{3.1.6}$$

这就是力学系统的运动方程，叫做拉格朗日方程。

当广义坐标 q_i 不是绝对可测量时，L 不显含 q_i，此时：

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

因此 (3.1.6) 变为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

即：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{constant}$$

式中 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 是系统第 i 个自由度的广义动量。上式表明系统的广义动量守恒。若选取广义坐标为位置，则广义动量相当于系统动量，因此空间的均匀性，即空间绝对位置的不可测量性引起空间平移不变性，从而导致动量守恒。若选取广义坐标为角度，则广义动量相当于系统角动量，因此空间的各向同性，即空间绝对方向的不可测量性引起空间转动不变性，从而导致角动量守恒。

上面利用经典力学的拉氏量，从时间的均匀性、空间的均匀性和空间的各向同性等连续时空对称性，导出了相应的能量守恒、动量守恒和角动量守恒定律。这些定律推广到量子力学也证明普遍成立。

3.1.2 对称变换和 Wigner 定理

在量子力学中，系统的状态由波函数 $|\psi(t)\rangle$ 描述，而系统的运动规律由系统的时间演化算符 $\hat{T}(t,0)$ 决定。如果对一个量子系统进行某种变换，当这种变换不改变系统的物理性质时，称为对称变换，用算符 $\hat{U}(t)$ 表示。

设初始时刻 $t=0$ 系统处于状态 $|\psi(0)\rangle$，在已知物理条件下系统演化，到时刻 t，系统处于状态 $|\psi(t)\rangle$，则有：

$$|\psi(t)\rangle = \hat{T}(t,0)|\psi(0)\rangle \tag{3.1.7}$$

对初态和末态作对称变换：

$$\begin{aligned} |\psi'(0)\rangle &= \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle \\ |\psi'(t)\rangle &= \hat{U}(t)|\psi(t)\rangle \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

如果系统在 $\hat{U}(t)$ 作用下是对称的，那么在同样物理条件下，经过相同时间，将得到：

$$|\psi'(t)\rangle = \hat{T}(t,0)|\psi'(0)\rangle$$

利用 (3.1.7) 和 (3.1.8) 式，上式可写为：

$$\hat{U}\hat{T}|\psi(0)\rangle = \hat{T}\hat{U}|\psi(0)\rangle \tag{3.1.9}$$

它的物理意义是：有两种物理过程，一是在初始时刻 $t=0$ 对系统状态 $|\psi(0)\rangle$ 进行 $\hat{U}$ 变换，得到态矢 $\hat{U}|\psi(0)\rangle$，到时刻 t，系统状态演化为 $\hat{T}\hat{U}|\psi(0)\rangle$；二是在初始时刻 $t=0$ 不进行变换，在相同的物理条件下 $|\psi(0)\rangle$ 随时间演化，到时刻 t，变为 $\hat{T}|\psi(0)\rangle$，再进行 $\hat{U}$ 变换得到 $\hat{U}\hat{T}|\psi(0)\rangle$。上述两种物理过程等效，即对称变换不影响态矢随时间的演化规律。

因为 (3.1.9) 式中初始态 $|\psi(0)\rangle$ 任意，所以有

$$\hat{U}\hat{T} = \hat{T}\hat{U} \quad 或 \quad [\hat{U},\hat{T}] = 0 \tag{3.1.10}$$

上式是对称变换 $\hat{U}$ 的数学表述，因此定义对称：在一个系统中，当算符 $\hat{U}$ 和时间演化算符 $\hat{T}$ 对易时，该系统对 $\hat{U}$ 而言是对称的。$\hat{U}$ 也称为对称变换算符。

由于量子系统的时间演化本质上由系统的哈密顿量 $\hat{H}$ 决定，因此也可以用 $\hat{H}$ 来定义对称变换 $\hat{U}$。写出 $\hat{U}$ 的具体形式：

$$\hat{U} = e^{-i\hat{H}t} \tag{3.1.11}$$

注意上式默认 $\hat{H}$ 不显含时间。于是对称变换 $\hat{U}$ 可定义为：

$$\boxed{\hat{U}\hat{H} = \hat{H}\hat{U} \quad 或 \quad [\hat{U},\hat{H}] = 0} \tag{3.1.12}$$

凡满足上式的变换，称为系统的对称变换。一个量子系统的某种对称性可以用系统的哈密顿量在相应变换下的不变性来描述。更普遍地说，设一种变换不改变系统各物理量之间的相互关系，则称该变换为系统的一个对称变换。

关于系统的对称变换有 Wigner 定理：假设存在一个使系统在物理上保持不变的变换，如果该变换将系统的每个态矢 $|\psi\rangle$ 变为 $|\psi'\rangle$，则总是可以调节相位，使得对于所有 $|\psi\rangle$，不是 $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$ 就是 $|\psi'\rangle = \pi|\psi\rangle$。这里 $\hat{U}$、π 是某个幺正、反幺正算符。

设有一变换使正交归一基 $\{|\psi_n\rangle\} \to \{|\psi'_n\rangle\}$。按量子力学的概率解释，系统任意两个可能的态矢 $|\psi\rangle$、$|\phi\rangle$ 的内积，必然满足条件：

$$|\langle\psi|\phi\rangle| = |\langle\psi'|\phi'\rangle| \tag{3.1.13}$$

于是取 $|\psi\rangle$、$|\phi\rangle$ 如下：

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_m\rangle, \qquad |\phi\rangle = \sum_n c_n|\psi_n\rangle$$

变换后成为：

$$|\psi'\rangle = |\psi'_1\rangle + |\psi'_m\rangle, \qquad |\phi'\rangle = \sum_n c'_n|\psi'_n\rangle$$

按 (3.1.13) 式规定 $|\langle\psi|\phi\rangle| = |\langle\psi'|\phi'\rangle|$，这导致：

$$|c_1 + c_m| = |c'_1 + c'_m|$$

在不影响物理情况下，可以选 $|\phi'\rangle$ 的相位，使得 $c'_1 = c_1$。展开这个绝对值等式：

$$c_1 c^*_m + c^*_1 c_m = c_1 c'^*_m + c^*_1 c'_m$$

乘以 c'_m，并注意 $|c'_m|^2 = |c_m|^2$，可得：

$$c^*_1 c'^2_m - c'_m(c_1 c^*_m + c^*_1 c_m) + c_1|c_m|^2 = 0$$

解此关于 c'_m 的二次方程，得到：

$$c'_m = \begin{cases} c_m \\ \frac{c_1}{c^*_1} c^*_m \end{cases}$$

在不影响物理内容情况下，还可以进一步选定 $|\psi\rangle$ 的相位，使 c_1 为实数，于是：

$$c'_m = \begin{cases} c_m \\ c^*_m \end{cases}$$

若是前者，变换是幺正的。若是后者，则：

$$|\phi'\rangle = \sum_n c^*_n|\psi'_n\rangle$$

变换是反幺正的。(还可以证明，每一个变换只能是二者之一，证明从略。)

Wigner 定理告诉我们，对称变换或者是幺正变换，或者是反幺正变换。实际上，通常所遇到的对称变换，除时间反演外，均系幺正变换。而且对于连续变换，只能是幺正变换。在今后的讨论中，如果不作特别说明，我们所提到的对称变换，均为幺正变换，满足：

$$\boxed{\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = 1 \quad \text{或} \quad \hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger} \tag{3.1.14}$$

对称变换既然是幺正变换，自然具有如下幺正变换的性质：

1. 对称变换下任意两个态矢的内积不变，即：

$$\langle \psi' | \phi' \rangle = \langle \psi | \phi \rangle$$

2. 对称变换下算符之间的代数关系不变[1]。设 $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$，在对称变换 $\hat{U}$ 下，有:

$$\hat{C}' = \hat{U}\hat{A}\hat{B}\hat{U}^\dagger = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{B}\hat{U}^\dagger = \hat{A}'\hat{B}'$$

3. 对称变换下算符的本征值方程形式及本征值不变。算符 $\hat{A}$ 的本征值方程为：

$$\hat{A}|\psi_n\rangle = \lambda_n|\psi_n\rangle$$

变换后为：

$$\hat{A}'|\psi'_n\rangle = \lambda_n|\psi'_n\rangle$$

其中 $\lambda'_n = \lambda_n$.

4. 对称变换下算符的平均值也不变，即有：

$$\langle A\rangle = \langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle \psi|\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi\rangle = \langle \psi'|\hat{A}'|\psi'\rangle = \langle A'\rangle$$

5. 对称变换下 Schrödinger 方程的形式不变，即：

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \hat{H}'|\psi'\rangle$$

3.1.3 量子力学中的对称性

式 (3.1.12) 表明，对称变换算符 $\hat{U}$ 与哈密顿算符 $\hat{H}$ 对易时，系统在 $\hat{U}$ 变换下不变。量子力学中已证明：一个不显含时间 t 的物理量 A 是守恒量的充要条件是该物理量的算符 $\hat{A}$ 与 $\hat{H}$ 对易：

$$[\hat{A}, \hat{H}] = 0$$

既然对称变换算符 $\hat{U}$ 与 $\hat{H}$ 对易，那么 $\hat{U}$ 是否就是一个守恒物理量呢？注意到不同于经典力学情形，量子力学中的可观测物理量算符必须是厄米的，而 (3.1.12) 式只要求 $\hat{U}$ 是幺正的，一般情况下它并不是厄米的，因而没有与之对应的可观测量。为此我们分别就 $\hat{U}$ 为连续变换和分立变换两种情况进行讨论。

❍ 对于幺正对称变换算符 $\hat{U}$ 是连续变换的情形，如果 $\hat{U}$ 可以写成[2]：

$$\boxed{\hat{U} = e^{-i\alpha\hat{G}}} \tag{3.1.15}$$

式中 α 是实参数，$\hat{G}$ 称为 $\hat{U}$ 的**生成元 (generator)**，那么可以证明 $\hat{G}$ 是厄米算符。事实上指数算符 (3.1.15) 式对波函数的作用由下式定义：

$$\hat{U}|\psi\rangle = e^{-i\alpha\hat{G}}|\psi\rangle = \left[1 - i\alpha\hat{G} + \frac{(-i\alpha\hat{G})^2}{2!} + \cdots\right]|\psi\rangle \tag{3.1.16}$$

[1]需要指出：在幺正变换下，原先表象的任何代数关系均不变；而在反幺正变换下，原先表象的任何代数关系中的常数均应代以复数共轭。特别地，量子力学基本对易规则中的虚数 i 应代以 $-i$.

[2]如果对于变换参数 α，算符 $\hat{U}$ 可以连续变化，则总是可以将 $\hat{U}$ 表示成为指数形式 (3.1.15)，也就是总是可以作 Taylor 级数 (3.1.16) 式展开。

利用 $\hat{U}$ 的幺正条件 (3.1.14) 式，即可证明 $\hat{G}$ 是厄米的，即:

$$\hat{G}^{\dagger} = \hat{G}$$

可见，如果幺正对称变换 $\hat{U}$ 是连续的，那么一定存在一个与 $\hat{U}$ 相应的厄米算符 $\hat{G}$，相应的物理量 G 是一个可观测量。进一步考虑到任意一个有限的连续变换，都可以看成是无穷多个无穷小变换的乘积，因此无穷小变换可以给出与原来连续变换同样的物理性质。在无穷小变换下:

$$\hat{U} = e^{i\alpha\hat{G}} \xrightarrow{\alpha \ll 1} 1 - i\alpha\hat{G}$$

代入 (3.1.12) 式，有:

$$[(1 - i\alpha\hat{G}), \hat{H}] = (1 - i\alpha\hat{G})\hat{H} - \hat{H}(1 - i\alpha\hat{G})$$

即有:

$$[\hat{G}, \hat{H}] = 0$$

这就证明了连续幺正对称变换算符 $\hat{U}$ 的生成元 $\hat{G}$ 是一个守恒的厄米算符，所代表的可观测物理量是一个守恒量。

❍ 对于某些分立变换 $\hat{U}$，如果 $\hat{U}$ 满足:

$$\hat{U}^2 = 1 \tag{3.1.17}$$

由式 (3.1.12) 和 (3.1.14) 可以看出，变换算符 $\hat{U}$ 既是幺正的又是厄米的，所以在分立变换情形下，厄米算符 $\hat{U}$ 所代表的物理量是可观测的。如果 $\hat{U}$ 满足:

$$[\hat{U}, \hat{H}] = 0$$

则 $\hat{U}$ 对应的物理可观测量是一个守恒量。值得指出的是，这类守恒量在经典理论中是不存在的。

当系统存在某种对称性时，必定伴随着它存在一个守恒量。除了位置之外[3]，凡是有物理意义的力学量，都与一定的对称性相联系，从而可以由守恒定律来定义。这不仅适合于经典力学中有的力学量，也适合经典力学中没有的力学量。实际上，如同位旋、宇称、正反粒子共轭、重子数和轻子数等等，它们的概念都是基于对称性和守恒定律产生。

[3]位置对任何系统都不是守恒量，位置算符的定义，由概率解释给出。

3.2 时空对称性

时空对称性包括连续时空和分立时空对称性。连续时空变换包括空间平移，时间平移和空间转动等。在物理学中，这一组对称性目前公认是严格的[4]。不连续时空变换包括空间反射和时间反演，它们不能用无限小对称操作得到，只能取分立。

3.2.1 空间平移对称性和动量守恒

如果系统所处的空间是均匀的，那么系统在空间平移变换下具有不变性。下面讨论空间平移不变性导致的守恒律。

设系统状态用 $\psi(\mathbf{r})$ 表示。对系统实施空间平移 $\hat{D}(\mathbf{a})$，使得坐标发生平移[5]：

$$\mathbf{r}' = \hat{D}(\mathbf{a})\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{a}$$

相应地系统状态变为 $\psi'(\mathbf{r}')$。按空间平移不变的定义，$\psi'(\mathbf{r}')$ 在 $\mathbf{r}'$ 处的值等于 $\psi(\mathbf{r})$ 在 $\mathbf{r}$ 处的值，可写为：

$$\psi'(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = \psi(\mathbf{r})$$

将 $\hat{D}(\mathbf{a})\mathbf{r}$ 重新写为 $\mathbf{r}$，则 $\mathbf{r}$ 应视为 $\hat{D}^{-1}(\mathbf{a})\mathbf{r}$，$\hat{D}^{-1}(\mathbf{a})$ 表示 $\hat{D}(\mathbf{a})$ 的逆操作，因此上式可以写为：

$$\psi'(\mathbf{r}) = \psi(\hat{D}^{-1}(\mathbf{a})\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}-\mathbf{a}) \tag{3.2.1}$$

由状态 $\psi(\mathbf{r})$ 到 $\psi'(\mathbf{r})$ 的变换也可以通过对 $\psi(\mathbf{r})$ 实施空间平移来实现：

$$\psi'(\mathbf{r}) = \hat{D}(\mathbf{a})\psi(\mathbf{r}) \tag{3.2.2}$$

于是根据 (3.2.1) 和 (3.2.2) 式有：

$$\hat{D}(\mathbf{a})\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}-\mathbf{a}) \tag{3.2.3}$$

式 (3.2.3) 表明，空间平移变换 $\hat{D}(\mathbf{a})$ 使得系统在均匀空间平移距离 $\mathbf{a}$，移动后系统在 $\mathbf{r}$ 处的态矢 $\hat{D}(\mathbf{a})\psi(\mathbf{r})$ 和移动前在 $\mathbf{r}-\mathbf{a}$ 处的态矢 $\psi(\mathbf{r}-\mathbf{a})$ 相同。因而 $\hat{D}(\mathbf{a})$ 是对称变换算符。

根据概率守恒，如果平移前态矢 $|\psi\rangle$ 是归一化的，则平移后态矢 $\hat{D}(\mathbf{a})|\psi\rangle$ 也是归一化的，即：

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{D}^\dagger(\mathbf{a})\hat{D}(\mathbf{a})|\psi\rangle = 1$$

上式表明：

$$\hat{D}^\dagger(\mathbf{a})\hat{D}(\mathbf{a}) = 1$$

即 $\hat{D}(\mathbf{a})$ 是幺正变换算符。

连续变换 $\hat{D}(\mathbf{a})$ 既是对称的，又是幺正的，根据第 3.1.3 节讨论，必然存在一个守恒量。我们需要写出 $\hat{D}(\mathbf{a})$ 的明显形式。为此先考虑一个沿着 x 方向的变换。这时有：

$$\hat{D}(a,0,0)\psi(x,y,z) = \psi(x-a,y,z)$$

[4]从经典力学发展到量子力学时，许多观念、规律都遭到根本性的变换，但和时空属性相关联的能量守恒、动量守恒和角动量守恒这三大守恒定律却几乎原封不动的被量子力学继承下来。这说明，量子系统的行为虽然“乖张”（从经典观点看），但毕竟也运行在和经典力学同一时空之中，从而这个时空的属性也必定体现在量子系统的运动行为上，并表现为这三个守恒定律的存在。

[5]我们采用主动变换 (active transformation)，即坐标系不动而物理系统变动。也可以采用坐标系变动而物理系统不动的被动变换 (passive transformation)。

将上式右端关于平移量 a 作 Taylor 展开，有

$$\psi(x-a,y,z)=\left(1-a\frac{\partial}{\partial x}+\frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\cdots\right)\psi(x,y,z)=e^{-a\frac{\partial}{\partial x}}\psi(x,y,z)$$

令 $\hat{p}_x=-i\frac{\partial}{\partial x}$，上式变为：

$$\psi(x-a,y,z)=e^{-ia\hat{p}_x}\psi(x,y,z)$$

同样的推导可得：

$$\psi(x,y-a,z)=e^{-ia\hat{p}_y}\psi(x,y,z)$$
$$\psi(x,y,z-a)=e^{-ia\hat{p}_z}\psi(x,y,z)$$

因此沿任意方向作一平移 $\mathbf{a}$，有：

$$\psi(\mathbf{r}-\mathbf{a})=e^{-i\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{p}}}\psi(\mathbf{r})$$

与 (3.2.3) 式比较，得空间平移变换算符的具体形式为：

$$\hat{D}(\mathbf{a})=e^{-i\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{p}}} \tag{3.2.4}$$

式中 $\hat{\mathbf{p}}$ 是动量算符：

$$\hat{\mathbf{p}}=-i\boldsymbol{\nabla} \tag{3.2.5}$$

它是空间平移算符的生成元。根据第 3.1.3 节讨论，连续幺正对称变换的生成元是一个守恒的厄米算符，所代表的可观测物理量是一个守恒量，所以 $\hat{\mathbf{p}}$ 所对应的动量 $\mathbf{p}$ 是守恒量。这样我们从系统在空间平移变换下的不变性导出了动量守恒定律。

在不同方向相继平移，先后次序可以改变：

$$[\hat{D}_i(a_i),\hat{D}_j(a_j)]=0,\quad i,j=x,y,z$$

从上式可导出群的生成元 $\hat{\mathbf{p}}$ 的各分量之间互相对易：

$$[\hat{p}_i,\hat{p}_j]=0 \tag{3.2.6}$$

动量算符 $\hat{\mathbf{p}}$ 所满足的基本对易 (3.2.6) 式是平移变换性质的自然结果。

注意，量子力学中的动量守恒说明动量的平均值和动量的概率不随时间变化，并不意味着动量有确定的值。换言之，具有空间平移不变性的系统，并不一定处在动量的本征态上。系统是否处在动量本征态上，由其初始条件决定。

3.2.2 时间平移对称性和能量守恒

如果系统所处的时间是均匀的，那么系统在时间平移变换下具有不变性，导致能量守恒定律。时间平移的处理方法类似于空间平移，可以借鉴前者。

设系统状态用 $\psi(t)$ 表示。对系统实施时间平移 $\hat{D}(\hat{\tau})$，它使得系统沿时间轴移动间隔 τ，移动后系统在 t 时刻的态矢 $\hat{D}(\tau)|\psi\rangle$ 与移动前在 $t-\hat{\tau}$ 时刻的态矢 $\psi(t-\tau)$ 相同：

$$\hat{D}(\tau)\psi(t)=\psi(t-\tau) \tag{3.2.7}$$

所以时间平移变换 $\hat{D}(\hat{\tau})$ 是对称变换，它的作用使系统运动状态延迟了一段时间 τ。容易证明 $\hat{D}(\hat{\tau})$ 还是幺正变换算符。因此必然存在一个守恒量。

将式 (3.2.7) 右端关于平移量 τ 作 Taylor 展开：

$$D(\tau)\psi(t) = e^{-\tau\frac{\partial}{\partial t}}\psi(t)$$

于是：

$$D(\tau) = e^{i\tau\hat{E}} \tag{3.2.8}$$

式中 $\hat{E}$ 是能量算符：

$$\hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t} \tag{3.2.9}$$

它是时间平移算符的生成元，所对应的物理量是守恒的能量。这样我们从系统在时间平移变换下的不变性导出了能量守恒定律。

3.2.3 空间转动对称性和角动量守恒

设系统状态用 $\psi(\mathbf{r})$ 表示。对系统实施空间转动变换 $\hat{R}(\mathbf{n},\alpha)$，它使得系统绕 $\mathbf{n}$ 轴转过角度 α。如果系统所处空间是各向同性的，则此系统在空间转动下具有不变性，空间转动后系统在 $\mathbf{r}$ 处的态矢 $\hat{R}(\mathbf{n},\alpha)\psi(\mathbf{r})$ 和转动前在 $\mathbf{r}$ 处的态矢 $\psi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha)$ 相同：

$$\hat{R}(\mathbf{n},\alpha)\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha) = \psi(\mathbf{r}-\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}) \tag{3.2.10}$$

上式表明 $\hat{R}(\mathbf{n},\alpha)\psi(\mathbf{r})$ 是对称变换算符。不难证明它也是幺正的。因此空间转动变换下必然存在一个守恒量。

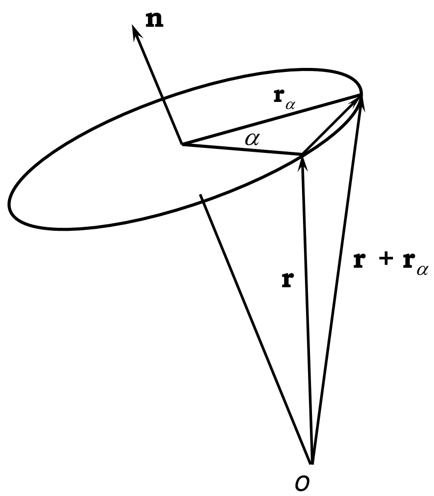


图 3.1: 绕转动轴 $\mathbf{n}(\theta,\phi)$ 转动 α 角。

同样作 Taylor 展开，可以得到空间转动变换的具体表达式：

$$\hat{R}(\mathbf{n},\alpha) = e^{-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{J}}} \tag{3.2.11}$$

式中 $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{n}$ 是转动矢量，$\hat{\mathbf{J}}$ 是空间转动算符的生成元。系统在空间转动下的不变性导致角动量守恒定律。不同于空间平移情形，空间转动算符各分量之间是不对易的：

$$[\hat{J}_j, \hat{J}_k] = i\epsilon_{jkl}\hat{J}_l \tag{3.2.12}$$

式中 Levi-Civita 符号 ϵ_{jkl} 是三秩反对称张量 (third-rank antisymmetric tensor)。

我们定义的角动量与经典力学无关，$\hat{\mathbf{J}}$ 可以是轨道角动量 $\hat{\mathbf{L}}$、自旋角动量 $\hat{\mathbf{S}}$ 或任意两个角动量的耦合等。只需把普通 Euclidean 空间的转动换成内部空间的转动。角动量各分量间的对易关系，由转动本身的性质决定的，所以适用于一切角动量。

3.2.4 空间反射对称性和宇称

以上讨论的是系统在连续时空变换下的对称性。下面讨论系统在分立时空变换下的对称性。

一个系统的空间反射对称性是指在原有坐标系 K 中与反射变换后的坐标系 K' 中，系统的运动方程具有相同的形式，或者说在空间反射变换 $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ 下，系统的哈密顿量不变。设系统状态用 $|\psi(\mathbf{r})\rangle$ 表示，对系统的空间反射操作用 $\hat{P}$ 表示，根据空间反射变换定义，连续两次 $\hat{P}$ 变换下系统不变：

$$\hat{P}\hat{P}|\psi(\mathbf{r})\rangle = \hat{P}|\psi(-\mathbf{r})\rangle = |\psi(\mathbf{r})\rangle$$

于是：

$$\hat{P}\hat{P} = 1 \tag{3.2.13}$$

空间反射变换下系统概率不变：

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\hat{P}^\dagger\hat{P}|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

因此：

$$\hat{P}^\dagger\hat{P} = 1 \tag{3.2.14}$$

即 $\hat{P}$ 是幺正算符。根据 (3.2.13)、(3.2.14) 式，可知：

$$\hat{P}^\dagger = \hat{P}$$

因此空间反射变换算符是厄米的。根据第 3.1.3 节讨论，分立对称变换算符 $\hat{P}$ 既是幺正的，又是厄米的，因此它所代表的物理量是可观测的。如果系统在空间反射下不变，表明系统的哈密顿量满足：

$$\hat{P}^\dagger\hat{H}\hat{P} = \hat{H}$$

或者：

$$[\hat{P}, \hat{H}] = 0$$

则 $\hat{P}$ 既是守恒算符，它所代表的物理可观测量 (宇称) 是一个守恒量。根据 (3.2.13) 式，宇称只能是 1 或者 −1。

宇称守恒是空间反射对称性的必然结果，而反射对称来源于“绝对的左和右“是不可观测的假设。我们知道在弱相互作用宇称是不守恒，这就表明弱作用中不具备空间反射对称性，即绝对的左和右是可分辨的。

3.2.5 时间反演

时间反演变换 $t \to t' = -t$ 是另一种不连续变换，或许把它称为“运动反演”更恰当和更容易理解。

在经典力学中，如果力仅与质点的位置有关，例如质点仅受保守力作用，由于加速度是时间的二次导数，因此时间反演后的牛顿第二定律和反演前的牛顿第二定律形式上完全一样，也就是说在这种情况下牛顿第二定律具有时间反演对称性。但是如果质点在有摩擦的介质中运动，在线性阻尼情况下，质点受到的阻力和运动速度成正比。在时间反演下，质点的运动方向反转，速度改变一个符号，因此在这种情况下质点的运动不具备时间反演对称性。

在量子力学中，粒子的运动遵从 Schrödinger 方程：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = \hat{H}\psi(t) \tag{3.2.15}$$

由于方程只含对时间的一阶导数，当用 $-t$ 代替 t 时，$\hat{H}$ 不变，Schrödinger 方程变为：

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\psi(-t) = \hat{H}\psi(-t) \tag{3.2.16}$$

上面两个式子相差一个符号，因此 $\psi(-t)$ 不是 Schrödinger 方程 (3.2.15) 的解，或者说在时间反演变换下 Schrödinger 方程不再具有不变性。方程的虚数因子提示，时间反演对称性同复共轭有某种联系。如果我们取 (3.2.16) 式的复共轭，则有：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(-t) = \hat{H}^*\psi^*(-t)$$

在 $\hat{H}^* = \hat{H}$ 的情形下，上式化为：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(-t) = \hat{H}\psi^*(-t) \tag{3.2.17}$$

以 $\hat{T}$ 表示时间反演算符，定义时间反演波函数为：

$$\hat{T}\psi(t) \equiv \psi^*(t) \tag{3.2.18}$$

于是 $\psi(t)$ 和 $\hat{T}\psi(t)$ 满足同样的 Schrödinger 方程。这样定义的时间反演态 $\hat{T}\psi(t)$，就使得 Schrödinger 方程在时间反演下不变。

显然 (3.2.18) 式的算符 $\hat{T}$ 不是幺正算符。事实上根据时间反演概念，对于坐标和动量的本征矢，有：

$$\hat{T}|\mathbf{r}\rangle = |\mathbf{r}\rangle$$
$$\hat{T}|\hat{\mathbf{p}}\rangle = |-\hat{\mathbf{p}}\rangle$$

如果 $\hat{T}$ 是幺正算符，由上式可得：

$$\hat{T}|\hat{\mathbf{p}}\rangle = \hat{T}\int|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle \mathrm{d}^3x = \int|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle \mathrm{d}^3x = |\mathbf{p}\rangle$$

显然，这个结果是不合理的。故时间反演变换不能是幺正变换。根据 Wigner 定理，如果一个对称变换不是幺正变换，那么就是反幺正变换。因此 $\hat{T}$ 是反幺正算符，或反线性算符，对于任意态矢 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$，有：

$$\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*$$

即时间反演下，任意两个态矢量的内积变为其共轭复数，从而可以保证量子力学的几率解释。但是 $\hat{T}$ 是反幺正算符，其本征值方程为：

$$\hat{T}\psi(t) = T\psi(t) \tag{3.2.19}$$

按照 (3.2.18) 式，$\hat{T}$ 的作用将 $\psi(t)$ 变为了它的复共轭，使得本征值问题 (3.2.19) 失去意义。因此不可能将 $\hat{T}$ 视为力学量，更无守恒量可言。

值得指出的是，以上我们讨论的空间反射和时间反演对称性都是对 Schrödinger 方程的标量波函数而言的。如果粒子的自旋是半整数，则会涉及相等宇称，能级简并等问题。这在相对论量子场论中有更深入的讨论。

3.3 物理学中的群论简介

二十世纪中叶以来，人们发现了许多比时空对称性更为深刻的内部对称性，以及这些内部对称性微妙的破缺机制 (不仅仅是在哈密顿量中加一项明显的对称性破缺项)。对称性在物理中的应用从提供一个有用的框架变为物理学研究的前沿。这就需要有一个定量的方法来处理对称性，这个数学工具就是群论。下面对此做一简单 (不严格) 的介绍，特别关注李群和李代数。

3.3.1 群的基本概念

设 G 是一些 (可能是抽象的) 元素的集合 (set)，在 G 中各元素之间规定一种运算关系，称为乘法 (multiplication)，即将群 G 中的任意两个元素 a、b 相乘复合成为第三个元素，记作 $ab = c$。如果这样定义的群运算 (乘法) 使集合 G 的全部元素满足以下四条公理，我们称 G 构成一个群 (group)：

1. 封闭律：$\forall a, b \in G$，有 $ab = c \in G$
2. 结合律：$\forall a, b, c \in G$，有 $a(bc) = (ab)c$
3. 存在单位元：$\forall a \in G$，$\exists$ 单位元素 e，满足 $ea = ae = a$
4. 存在逆元：$\forall a \in G$，$\exists$ 逆元素 a^{-1}，满足 $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

群的乘法一般不满足交换律，也就是说 $\forall a, b \in G$，有 $ab \neq ba$，这种群称为非阿贝尔群 (non-Abelian group)，否则称为**阿贝尔群 (Abelian group)**。群中元素的个数称为群的**阶 (order)**，阶数有限的群称为有限群 (finite group)，阶数无限的群称为无限群 (infinite group)。有限群常见于固体物理学中，因为固体结构本身表现出分立对称性。粒子物理学中更感兴趣的是无限群。

不管是有限群还是无限群，如果一个群的元素可以用分立的指标来标记：

$$G = \{g_1, g_2, g_3, \cdots\}$$

则称为分立群 (discrete group)。如果一个群的元素个数不可数，则上述表示法不适用，此时每个群元素 $g_{\boldsymbol{\alpha}}$ 用一组连续变化的实参数 (称群参数) $\boldsymbol{\alpha}$ 表示：

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$$

通常规定群参数 $\boldsymbol{\alpha}=0$ 时的群元素表示单位元素 e。如果群元素是群参数的连续函数，则称之为连续群 (continuous group) [6]，群参数的个数 N 称为群的**维 (dimension)**，群参数变化的范围称为群参数空间。如果连续群是解析性的，即它的任意一个群元素对群参数均可微，所得微商 $\frac{\partial g}{\partial \alpha_i}$ 仍然是群的一个元素，这样的群称为**李群 (Lie group)**，根据它的发明者挪威数学家 Sophus Lie 得名。群参数只能在有限范围内连续变化的李群称为**紧致李群 (compact Lie group)**。粒子物理学中，群的紧致性是非常重要的，因为紧致群保证群是幺正的 (或者有一个幺正的表示)。

例 1：正三角形 $\triangle ABC$ 中心为 O，对它进行纯旋转使得几何对称的操作有六个：

e： 不转动
a： 通过 OA 轴转 $180°$
b： 通过 OB 轴转 $180°$
c： 通过 OC 轴转 $180°$
d： 通过垂直于 $\triangle ABC$ 且过中心的轴逆时针转 $120°$
f： 通过垂直于 $\triangle ABC$ 且过中心的轴顺时针转 $120°$

容易证明这六个元素 (操作) 在规定的乘法 (连续两次转动) 下满足群的四个公理，因而构成一个六阶有限群 C_{3v}。

例 2：波函数的复数相位因子可以写为

$$U(\alpha)=e^{i\alpha} \tag{3.3.1}$$

其中相位角 α 是参数。显然：

① 任意两个相位因子的乘积仍然是一个相位因子：$U(\alpha)\cdot U(\alpha')=U(\alpha+\alpha')$

② 任意三个相位因子都满足结合律：$(U(\alpha)\cdot U(\beta))\cdot U(\gamma)=U(\alpha)\cdot(U(\beta)\cdot U(\gamma))$

③ 参数 α 为零时的相位因子恒等于1：$U(0)=1$

④ 相位因子的逆则为：$U^{-1}(\alpha)=U(-\alpha)$
因此波函数所有复数相位因子的集合在复数乘法下成群，称为 **U(1) 群**。

U(1) 群的每一个元素都用一个在 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$ 范围内连续变化的实参数 α 表示，因而 U(1) 群是一维紧致李群。因为参数在定义域内可以取任意值，所以 U(1) 群的元素个数有无限个，是无限群。U(1) 群是可微的，它的任意一个元素 $U(\alpha)$ 对于群参数 α 的微分为：

$$\mathrm{d}U(\alpha)=U(\alpha+\mathrm{d}\alpha)-U(\alpha)=e^{i\alpha}(1+i\mathrm{d}\alpha)-e^{i\alpha}=ie^{i\alpha}\mathrm{d}\alpha=iU(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

显然 $U(\alpha)$ 的微商 $\frac{\mathrm{d}U(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}$ 也是 U(1) 群的一个元素。注意当参数 $\alpha=0$ 和 2π 时相位因子值相同，不符合同一集合中的元素互不相同的要求，因此必须将非单值的参数点合并，算作一个点。

[6]这里我们采取了用参数定义连续群的初等方法，这种大家较熟悉的参数连续性概念依赖于距离的概念，而距离在群中是没有意义的，所以在连续群的定义中必须使用更一般的不依赖距离的连续性概念，更加抽象的连续性概念是建立在拓扑空间的邻域概念的基础上的。可参阅有关的数学专著。

3.3.2 群的乘法结构

根据群的定义立即可以得到群的重排定理 (rearrangement theorem)：设 $g \in G$，则有 $gG = G$ 及 $Gg = G$。群的重排定理表明 gG 和 Gg 仍然是原来的群 G，只是把原来的群元素重新排列，定理由此得名。群的重排定理是群的普遍性质，虽然其得名来自有限群的特殊情况。

从群的定义可知，如果我们在 G 中确定每一对元素乘积的结果 $ab = c$，那么这个群的结构也就给出。我们把群元素的乘积 $\{ab = c\}$ $(a, b \in G)$ 称为群的乘法结构或群结构。本质上而言，群论所研究的是满足群论要求的群结构。

对于有限群，为了清晰地显示群结构，常构造群的乘法表 (multiplication table)，又称群表。构造规则是，对群元素编号 $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，表的第一列排放乘法的第一因子，表的第一行排放乘法的第二因子，列与行的元素遍及全部群元素。构造群表时群元素的排列次序是任意的，但是一般把单位元排在首位。表 3.2 列出了六阶群 C_{3v} 的群表。

表 3.2: 群 C_{3v} 的群表

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

对于连续群，构造群的乘法表显然是不切实际的，但是可以用群参数的连续函数的乘法来表示。相当于有限群的乘法表。群参数的连续函数相乘的结果是一个乘法函数 (参阅第 3.3.5 节)，乘法函数的形式决定着群的乘法结构。因此我们可以将群元素和它的参数等同地看待，通过研究乘法函数来研究群的结构和性质。例如 U(1) 群的乘法结构可以用相位角参数 α 的函数，复数相因子的乘积来表示。

例 3: 矩阵的乘法满足结合律，因此若用矩阵的乘法定义群的乘法，则所有行列式不为零 (非奇异) 的同阶矩阵的全体构成群，称为矩阵群。

所有 2×2 的幺模实正交矩阵 R 的集合构成的矩阵群称为 **SO(2) 群**。所谓正交是指 $R^T R = 1$，实矩阵是指 $R^* = R$。由正交条件 $R^T R = 1$ 得 $(\det R)^2 = 1$，即 $\det R = \pm 1$。幺模指的是取矩阵行列式 $\det R = +1$。由于平面上绕固定点的转动可以用 2×2 的幺模实正交矩阵描述，因此物理上可以把 SO(2) 群解释为平面转动群。描写平面转动的幺模实正交矩阵可以写为：

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

矩阵 R 的形式是参数化的，参数 α 的几何意义即为转角。α 对于 R 必须是单值的，这可以通过限定 $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$，且 $\alpha = 0$ 和 2π 算作同一点而得到。在参数 α 下，SO(2) 群的乘法函数特别简单，当两个平面转动相乘时，其转角相加。

所有 2×2 的实正交矩阵 R 的集合也构成矩阵群，称为**O(2) 群**。显然 O(2) 群中的矩阵有 $\det R = +1$ 和 $\det R = -1$ 两种，前一种的矩阵群正是 SO(2) 群，后一种的每一个可以写为前一种的相应矩阵与行列式为 -1 的 Pauli 矩阵:

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

的乘积。$\hat{\sigma}_3$ 表示平面上关于坐标轴的反射。所以 O(2) 群由平面上的转动和反射组成。为了将 O(2) 参数化，需要引入两个参数，即转角 α 用于描述不同平面转动，$d = \pm 1$ 用于描写正常情况下的转动和反射情况下的转动。这样在参数 (α, d) 下 O(2) 群的矩阵可写为:

$$R(\alpha, d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

当 $d = +1$ 或者 $d = -1$ 时，α 的变化范围都是单位圆，所以参数 (α, d) 的变化域是两个分离的单位圆。

由参数的连续性可以定义群的连通性。连续群可以分为连通的和不连通的，前者又可以分为单连通的和多连通的。例如 SO(2) 群是单连通的，因为周围是一维的连通图形；O(2) 群是不连通的，它有两个不相连通的连通分支，SO(2) 和 $\hat{\sigma}_3$ SO(2)，即两个分离的圆周。

3.3.3 群的同构和同态

设有两个群 $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_i, \cdots\}$ 和 $G' = \{g'_1, g'_2, \cdots, g'_i, \cdots\}$，两者间存在一对一映射 D，使得 $D(g_i) = g'_i$。如果该映射保持乘法运算不变，即:

$$D(g_i g_j) = D(g_i) D(g_j), \quad \forall g_i, g_j \in G$$

那么称映射 D 是从群 G 到群 G' 的同构映射，简称**同构 (isomorphism)**。显然同构映射的逆映射也是同构映射。如果映射 D 是多对一的对应关系，那么称 D 是同态映射，简称**同态 (homomorphism)**。两个同构的群具有完全相同的乘法表，因此代数上可以认为是同一的。

例 4：设一个 2×2 的六阶矩阵群 G' 如下:

$$e' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$c' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad d' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad f' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

在 C_{3v} 与 G' 之间建立一一映射 D，使得:

$$D(e) = e' \qquad D(a) = a' \qquad D(b) = b'$$
$$D(c) = c' \qquad D(d) = d' \qquad D(f) = f'$$

则由 C_{3v} 和 G' 的乘法表可知，$D(g_i g_j) = g'_i g'_j$，并且一一对应，因此 D 是同构映射，它把六个不同的 C_{3v} 的群元素一一映射到 G' 的六个不同的矩阵。

3.3.4 群的表示

物理系统的很多重要性质均依赖于系统的对称性，相应的对称性往往可以用不同的群描写。群论的同构映射告诉我们，两个同构的群，群的性质完全相同。如果能够找到与原有群同构的一般线性矩阵群，即所谓群的表示，那么研究清楚矩阵群的性质，也就完全掌握了原有群的性质。从而获得对应系统的许多对称性质和演化规律的认识。我们将矩阵群作为群的表示，原因是矩阵群的性质比较容易研究。

如果 $n\times n$ 非奇异方阵的集合所构成的群 M 与群 G 同态，即存在一个映射 D，使得 G 中每一个元素 g 都对应某给定线性空间中的一个线性变换矩阵，则称 M 是 G 的一个**线性表示 (linear representation)**，简称表示。常把 M 记为 $D(G)$，或 $\{D(g)\}, \forall g\in G$。如果表示 $D(G)$ 和群 G 同构，那么称 $D(G)$ 是 G 的**忠实表示 (faithful representation)** 。表示中的每一个元素称为表示矩阵，表示矩阵的维数 n 是该**表示的维**。寻找群的所有线性表示是群论的一个基本任务。

给定一个群的表示 $D(G)$ 相当于给定线性矢量空间的一个线性变换，表示矩阵的具体形式是与线性空间基的选定密切相关的。当我们说到群 G 的表示 $D(G)$ 时，事实上意味着已经选定了一组基 $\{e_i\}$，所属的矢量空间是 V_n，称为表示空间。因此我们称基 $\{e_i\}$ 负载了群 G 的一个表示 $D(G)$。

可以把群 G 的所有元素映射到 1×1 的单位矩阵 I，显然这样的映射满足同态的性质，因此 1×1 单位矩阵组成的群 $D=\{I\}$ 是 G 的一个表示。任何群都存在这样的一个表示，这种表示称为平庸 (trivial) 表示，有时也称为恒等表示，它是一维的。群 G 除了一维平庸表示，还可以有许许多多的其他表示。这些表示的维数可以相同，也可以不同。即使维数相同，也可以有各种表示。其中维数最小的表示忠实地给出了群 G 的所有结构，称为**基础表示 (fundamental, defining representation)** 。显然矩阵群的基础表示是其自身。

例 5：*以群 C_{3v} 为例，它显然有一维平庸表示 $D=\{I\}$。*

如果把 C_{3v} 中的 $\{e,d,f\}$ 映射到 1，而把 $\{a,b,c\}$ 映射到 -1，即：

$$D(e)=D(d)=D(f)=1$$
$$D(a)=D(b)=D(c)=-1$$

以数的乘法定义群的乘法，则 $\{1,-1\}$ 构成一个一维矩阵群 D，它与 C_{3v} 同态，是 C_{3v} 的另一个一维表示。它不同于一维平庸表示，也不是忠实表示。

此外例 4 中的六个二维矩阵 e',a',b',c',d',f' 按照矩阵乘法构成一个矩阵群 D，如果我们作例中所示的映射：

$$D(e)=e' \qquad D(a)=a' \qquad D(b)=b'$$
$$D(c)=c' \qquad D(d)=d' \qquad D(f)=f'$$

可以发现 D 与 C_{3v} 同构，所以 D 构成了 C_{3v} 的一个二维忠实表示。

表示空间的基的选择不是唯一的。事实上可以通过线性变换找到另一组基，只要这种变换是可逆的，则虽然在变换前后群元素的矩阵形式不同，但是都描写了同一个表示空间的同一个矢量，这种线性变换称为**相似变换 (similarity transformation)**。因此如果群 G 的任一元素 g 在两个表示 $D'(G)$ 和 $D(G)$ 中的表示矩阵存在相似变换：

$$D'(g)=SD(g)S^{-1}, \quad \forall g\in G$$

这样两个表示称为**等价表示 (equivalent representation)**。

相似变换矩阵 S 是与群元素无关的非奇异的 n 维矩阵，只要选取不同的非奇异矩阵 S，就可以得到许许多多的等价表示。由于等价表示所代表的规律是相同的，因此我们可以在这许许多多等价表示中随意选取一个表示来研究就够了。寻找群 G 所有表示的问题简化为寻找 G 的所有不等价的表示问题。

设 $D(G)$ 是一个 n_1+n_2 维的线性表示，如果它的任意一个矩阵 $D(g)$, $g\in G$ 可写为，或通过相似变换后约化为如下形式：

$$D(g)=\begin{pmatrix} D_1(g) & R(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g\in G$$

式中 $D_1(g)$ 和 $D_2(g)$ 分别是 n_1 维和 n_2 维的矩阵，$R(g)$ 是任意 $n_1\times n_2$ 矩阵，那么称表示 $D(G)$ 是**可约的 (reducible)**。如果在上式中进一步有 $R(g)=0$，使得：

$$D(g)=\begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g\in G$$

那么称表示 $D(G)$ 是**完全可约的 (completely reducible)**。此时 $D(G)$ 是 $D_1(G)$ 和 $D_2(G)$ 的**直和 (direct sum)**，记作：

$$D(G)=D_1(G)\oplus D_2(G)$$

如果经过一切可能的相似变换，都不能把所有 $D(g)$ 约化为可约表示或者完全可约表示，则这样的表示是**不可约的 (irreducible)**。在我们谈及群的表示时，通常指的是群的不可约表示。

群表示论要研究的实际上是给定一个群 G 后如何找出它的全部表示。这个问题根据上面分析最后转化为如何找出它的全部不等价不可约表示。

物理系统往往具有多种对称性，如空间平移对称、空间转动对称以及自旋、同位旋等内禀对称，并有相应的群与之对应。一个合理的推测是，这些对称性组合而成的更大的对称性在系统中仍然应该保持，由若干反映较小对称性的所谓较小的群，可以组合成反映更广泛对称性的较大的群。反过来，较大的群有时也应该能够分解成为较小的群，使得较大的群的结构简单地由较小的群的结构确定，从而可能将一个复杂的群的讨论简化为若干较简单的群的讨论。这种群的组合与分解可以通过群表示的直接乘积，即**直积 (direct product)** 来实现。

如果群 G 的两个可约 (或不可约) 表示为 $D_1(G)$ 和 $D_2(G)$，作这两个表示对应的矩阵的直积：

$$D(g)=D_1(g)\otimes D_2(g), \quad \forall g\in G$$

显然这个直积也是群 G 的一个表示。如果表示 $D_1(G)$ 和 $D_2(G)$ 是不可约的，它们的直积 $D(G)=D_1(G)\otimes D_2(G)$ 一般来说是可约的。表示的直积 $D(G)$ 可以约化为不可约表示的直和，分解式称为 Clebsch-Gordan 展开。粒子物理学中经常遇到表示的直积约化为不可约表示的直和的问题。

例 6：两个自旋 $\frac{1}{2}$ 电子组成的系统可以处在自旋三重态和自旋单态，用群论的话来说就是两个SU(2) 基础表示直积后，约化为两个不可约表示的直和：

$$2\otimes 2=3\oplus 1$$

式中右边两个不可约表示的对称性不同。3 表示自旋为 1，是对称态。1 表示自旋为零，是反对称态。

3.3.5 李群和李代数

粒子物理学中感兴趣的是李群，即可微的连续群。下列 $n \times n$ 非奇异矩阵 A 构成的矩阵群都是连续群：

群	名称	含义	条件	群的维数 N
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$	复完全线性群	复矩阵 A 的集合		$2n^2$
$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$	复特殊线性群	复矩阵 A 的集合	$\det A = 1$	$2n^2-2$
$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$	实完全线性群	实矩阵 A 的集合		n^2
$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$	实特殊线性群	实矩阵 A 的集合	$\det A = 1$	n^2-1
$\mathrm{U}(n)$	幺正群	幺正矩阵 A 的集合		n^2
$\mathrm{SU}(n)$	特殊幺正群	幺正矩阵 A 的集合	$\det A = 1$	n^2-1
$\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$	复正交群	复正交矩阵 A 的集合		$n(n-1)$
$\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$	特殊复正交群	复正交矩阵 A 的集合	$\det A = 1$	$n(n-1)$
$\mathrm{O}(n)$	实正交群	实正交矩阵 A 的集合		$n(n-1)/2$
$\mathrm{SO}(n)$	特殊实正交群	实正交矩阵 A 的集合	$\det A = 1$	$n(n-1)/2$

连续群的维数 N 也就是描述群元素的独立参数的个数，我们对此作如下说明：

- ❍ 复完全线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的元素是一系列 $n \times n$ 的非奇异复矩阵，每个复矩阵有 n^2 个复数矩阵元，每个复数用两个实数表示，因此 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 群的每个元素需要 $2n^2$ 个独立参数来描述，即 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的维数是 $2n^2$。如果再附加 $\det A = 1$ 这个条件，则描述复特殊线性群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ 元素的独立参数减少 2 个，即其维数是 $2n^2-2$。

- ❍ 类似可得实完全线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 和实特殊线性群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 的维数是 n^2 和 n^2-1。

- ❍ 幺正群 $\mathrm{U}(n)$ 的每个复矩阵 A 满足幺正条件 $A^\dagger A = 1$。对于对角矩阵元，幺正条件给出了 n 个限制，对于非对角复数矩阵元则给出 $2[(n^2-n)/2]$ 个限制 (这里除以 2 表示非对角矩阵元上下对称，乘以 2 表示复数矩阵元需要 2 个实数表示)，因此描述 $\mathrm{U}(n)$ 的独立参数个数为 $2n^2-n-(n^2-n)=n^2$ 个，即幺正群 $\mathrm{U}(n)$ 是 n^2 维的。如果再要求 $\det A = 1$，则特殊幺正群 $\mathrm{SU}(n)$ 的维数是 n^2-1。

- ❍ 复正交群 $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ 的每个复矩阵 A 满足正交条件 $A^T A = 1$。对于对角复数矩阵元，正交条件给出了 $2n$ 个限制，对于非对角复数矩阵元则给出 n^2-n 个限制，因此描述 $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ 的独立参数个数为 $2n^2-2n-(n^2-n)=n(n-1)$ 个，即复正交群 $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ 是 $n(n-1)$ 维的。类似可知实正交群 $\mathrm{O}(n)$ 的维数是 $n(n-1)/2$。

- ❍ 思考：特殊复 (实) 正交群的维数和复 (实) 正交群的维数相同，为什么？
(参阅，例如高崇寿《群论及其在粒子物理学中的应用》1992年，第50页)

U(1) 群 (1 维) 与电荷守恒、重子数守恒、轻子数守恒等紧密相关。SO(3) 群 (3 维) 则与普通空间 (三维实 Euclidean 空间) 中的转动有着密切联系，故又称为空间转动群。SU(2) 群 (3 维) 与角动量和同位旋密切相关，SU(3) 群 (8 维) 等则在粒子分类中起着关键作用。这些群是粒子物理理论中很重要的群，它们都是紧致李群。

一、定义和概念

我们首先提出一些后面会遇到的关于李群的基本概念。我们规定群参数为零 $\boldsymbol{\alpha}=0$ 的群元素为单位元素：

$$g(\boldsymbol{\alpha}=0)=g(0,0,\cdots,0)\equiv e$$

群参数空间中 $\boldsymbol{\alpha}=0$ 的点称为该空间的原点。我们特别关注李群在单位元素附近的行为，即群元素对群参数的微商在群参数空间原点邻域的行为。这是因为李群的群元素是群参数的连续可微函数，微商对应一个无穷小变换，有限变换是无穷多个无穷小变换的乘积。一旦了解了李群在单位元素附近，即微商在原点邻域的行为，就可以 (通过求指数次幂) 生成整个李群，并得到群的结构。因此这个微商称为**生成元**：

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha_j=0,\text{all } j}\equiv X_k$$

一般说来，生成元的个数等于参数的个数 N。我们在第 3.2 节中已遇到过几个对应某种变换算符的生成元，例如角动量是空间转动算符的生成元。由于空间转动变换的集合构成 SO(3) 转动群，因此角动量也称为 SO(3) 群的生成元。

对于李群，定义相互对易的生成元的最大数目为李群的**秩 (rank)**，我们用 r 表示。例如空间平移群有三个生成元 $\hat{p}_i=-i\frac{\partial}{\partial x_i}$，它们互相对易，因此空间平移群的秩 $r=3$。后面要介绍的 SO(3) 群有三个生成元 (角动量)，它们都不互相对易，因此 SO(3) 群的秩 $r=1$。对于 SU(3) 群，它的八个生成元中，只有两个 (同位旋第三分量 I_3 和超荷 Y) 互相对易，因此 SU(3) 群的秩 $r=2$。SU(n) 群的秩为 $r=n-1$。

群的生成元定义了一个 N 维的矢量空间，称为**代数 (algebra)**。群的代数本身也构成了群的一种表示，称为**伴随表示 (adjoint representation)**。生成元还定义了代数各元素之间的矢量积 (vector, cross, outer product)，这个矢量积就是熟知的对易关系：

$$[X_k,X_l]\equiv X_kX_l-X_lX_k=C_{klm}X_m$$

式中的张量 C_{klm} 称为代数的**结构常数 (structure constant)**。群生成元的对易关系仍然是生成元，仍然属于代数，它是封闭的。既然对易关系决定了群的结构常数，结构常数又完全确定群的代数，也就确定了群在参数空间原点邻域的行为，因此也经常把生成元的对易关系称为代数。李群的代数就是李代数。例如 SO(3) 群的生成元 (角动量) 可定义一个三维角动量空间，角动量之间的矢量积就是角动量对易关系。这个空间是封闭的，称为代数。SO(3) 群的结构常数是三秩反对称张量 ϵ_{klm}，数值为 $\pm1,0$。

在物理学的研究中，为了和物理现象直接联系，常常引入：

$$G_i\equiv -iX_i$$

也称为生成元。此时的对易关系为：

$$[G_j,G_k]=iC_{jkl}G_l$$

这种生成元和相应的对易关系在量子力学中更常用。注意区分两种生成元的定义，我们用不同符号加以区分。

已知群的生成元，群元素可以由生成元通过求指数次幂得到：

$$g(\boldsymbol{\alpha})=e^{-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{G}}$$

上式表明生成元具有与群元素很不一样的数学结构：群元素相乘，生成元相加。

生成元不仅用来定义对易关系 (矢量积)，也用来定义标量积。总角动量的平方就是一个例子：

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2$$

生成元的标量积称为 **Casimir 不变量 (Casimir invariant)**。Casimir 不变量与所有生成元对易，因而在群变换下不变，它的本征值是个守恒量子数。Casimir 不变量的数目与具体的群有关，它等于群的秩。

因为群论中出现很多群的阶、维、秩等术语，为避免混淆，我们总结如下：

m	= 群的阶数	= 群元素个数	
n	= 表示的维数	= 表示矩阵的维数	= 表示空间的维数
N	= 连续群的维数	= 群参数个数 (参数空间维数)	= 生成元个数 (代数空间维数)
r	= 李群的秩	= Casimir 不变量个数	

二、SO(2) 群

第 3.3.2 节例 3 中初步讨论了平面转动的 SO(2) 群。SO(2) 群的表示是 2×2 矩阵的集合，它们就是 SO(2) 群的基础表示。表示矩阵的维数等于表示的维数，故 SO(2) 群的基础表示是二维的 ($n=2$)。平面转动只需一个参数，参数个数等于群的维数，故 SO(2) 群是一维的 ($N=1$)。例 3 中我们还得到了 SO(2) 群的表示矩阵的形式：

$$g(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

为了研究 SO(2) 群的结构，把表示矩阵 $g(\alpha)$ 对参数 α 的依赖关系写成指数形式是方便的。我们知道矩阵的指数函数由它的级数展开定义，例如对于 Pauli 矩阵 $\hat{\sigma}_2$：

$$\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

它的指数函数为：

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha\hat{\sigma}_2} &= \sum_n (-i\hat{\sigma}_2)^n \frac{\alpha^2}{n!} = I\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots\right) - i\hat{\sigma}_2\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= I\cos\alpha - i\hat{\sigma}_2\sin\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

式中 I 是单位矩阵。式 (3.3.2) 正好等于 SO(2) 群的表示矩阵，即：

$$\boxed{g(\alpha) = e^{-i\alpha\hat{\sigma}_2}} \tag{3.3.3}$$

式中 $\hat{\sigma}_2$ 就是 SO(2) 群的生成元。生成元的个数等于群参数的个数 $N=1$。如果已知生成元，那么根据 (3.3.3) 式可以得到群的表示矩阵。群的乘法结构由这些表示矩阵的乘积体现，物理上可视为连续两个转动的和。

比较 (3.3.3) 式和 U(1) 群的 (3.3.1) 式，发现它们很相似。事实上 SO(2) 群和 U(1) 群有相同的代数，它们同构。可以把 U(1) 群的复数相因子分成是实部和虚部，映射到实数平面中的 x 和 y。

三、SO(3) 群

所有 3×3 的幺模实正交矩阵的集合构成的矩阵群称为 **SO(3) 群**。由于三维普通空间中的定点转动可以用 3×3 的幺模实正交矩阵描述，因此物理上可以把 SO(3) 群解释为空间转动群。

空间转动需要用三个连续变化的实参数来标记，例如可以选用转动轴 $\mathbf{n}$ 的方向 (θ,ϕ) 和转动角 α 等参数描述转动 $R(\mathbf{n},\alpha)$。注意到 $R(\mathbf{n},\alpha)=R(-\mathbf{n},2\pi-\alpha)$，因此 α 的变化范围可取为 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，转动角的变化范围是 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$、$0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$。可见空间转动群是一个紧致李群。

我们知道绕坐标轴 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 转动 α 的矩阵可写为：

$$g(\mathbf{e}_1,\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\tag{3.3.4}$$

$$g(\mathbf{e}_2,\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha&0&\sin\alpha\\0&1&0\\-\sin\alpha&0&\cos\alpha\end{pmatrix}\tag{3.3.5}$$

$$g(\mathbf{e}_3,\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}\tag{3.3.6}$$

利用上面三式可以求得 SO(3) 群的表示矩阵 $g(\mathbf{n},\alpha)$ 的具体形式。事实上，如果对标准矩阵 $g(\mathbf{e}_3,\alpha)$ 作相似变换：

$$g(\mathbf{n},\alpha)=hg(\mathbf{e}_3,\alpha)h^{-1}\tag{3.3.7}$$

其中 h 是任一将 $\mathbf{e}_3$ 变为 $\mathbf{n}$ 的转动矩阵 ($h\mathbf{e}_3=\mathbf{n}$)，那么上式表明，绕 $\mathbf{n}$ 方向转动 α 角的变换矩阵 $g(\mathbf{n},\alpha)$ 可以表示为三个转动的乘积：先把 $\mathbf{n}$ 方向转到 $\mathbf{e}_3$ 方向，再绕 $\mathbf{e}_3$ 方向转动 α 角，最后把 $\mathbf{e}_3$ 方向转回到 $\mathbf{n}$ 方向。显然 h 可取为：

$$h=g(\mathbf{e}_3,\phi)g(\mathbf{e}_2,\theta)$$

将上式代入 (3.3.7) 式，借助标准矩阵 (3.3.5) 和 (3.3.6) 式就可以求得 SO(3) 群的表示矩阵 $g(\mathbf{n},\alpha)$。

为了进一步研究 SO(3) 群的结构，我们把转动矩阵 $g(\mathbf{n},\alpha)$ 对参数的依赖关系写成指数形式。类比 Pauli 矩阵，定义：

$$\hat{J}_1\equiv\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\qquad \hat{J}_2\equiv\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\qquad \hat{J}_3\equiv\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\tag{3.3.8}$$

把 (3.3.2) 中的 $\hat{\sigma}_2$ 换成 $\hat{J}_3$，就可得 $g(\mathbf{e}_3,\alpha)$ 的指数形式：

$$g(\mathbf{e}_3,\alpha)=e^{-i\alpha\hat{J}_3}$$

根据三个坐标轴的循环对称性可知绕其他两个轴转动的矩阵为：

$$g(\mathbf{e}_1,\alpha)=e^{-i\alpha\hat{J}_1},\qquad g(\mathbf{e}_2,\alpha)=e^{-i\alpha\hat{J}_2}$$

于是描述一般转动的表示矩阵 $g(\mathbf{n},\alpha)$ 的指数形式为：

$$g(\mathbf{n},\alpha)=hg(\mathbf{e}_3,\alpha)h^{-1}=e^{-i\alpha h\hat{J}_3h^{-1}}$$

不难验证：

$$h\hat{J}_3h^{-1}=n_1\hat{J}_1+n_2\hat{J}_2+n_3\hat{J}_3=\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{J}}$$

于是表示矩阵变为：

$$g(\mathbf{n},\alpha)=e^{-i\alpha(n_1\hat{J}_1+n_2\hat{J}_2+n_3\hat{J}_3)}=e^{-i\alpha\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{J}}}$$

重新定义 SO(3) 群的参数：

$$\boldsymbol{\alpha}=\alpha\mathbf{n}$$

得到表示矩阵 $g(\boldsymbol{\alpha})$：

$$\boxed{g(\boldsymbol{\alpha})=e^{-i(\alpha_1\hat{J}_1+\alpha_2\hat{J}_2+\alpha_3\hat{J}_3)}=e^{-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{J}}}}\tag{3.3.9}$$

式中 $\hat{\mathbf{J}}$ 就是 SO(3) 群的生成元。生成元的个数等于群参数的个数 $N=3$。如果已知生成元，那么根据 (3.3.9) 式，在给定群参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 下，SO(3) 群的表示矩阵 $g(\mathbf{n},\alpha)$ 由生成元完全确定。群的生成元不是唯一的，它依赖于参数的选取，可以按需要确定。但是不论何种选择，每组生成元的个数均相同，且等于群参数个数。SO(3) 群的三个线性无关的生成元 $\hat{J}_1,\hat{J}_2,\hat{J}_3$ 张成一个三维、线性、完备的代数空间 $\{\hat{J}_1,\hat{J}_2,\hat{J}_3\}$，三个生成元形成该代数空间的一组基。

现在我们具体讨论 SO(3) 群的乘法结构，它由两个表示矩阵的乘积体现，这就需要将 $g(\boldsymbol{\alpha})g(\boldsymbol{\beta})$ 写成 $g(\boldsymbol{\gamma})$ 的形式，即把 $e^{\sum\limits_i-i\alpha_i\hat{J}_i}e^{\sum\limits_j-i\beta_j\hat{J}_j}$ 写成 $e^{\sum\limits_k-i\gamma_k\hat{J}_k}$ 的形式。注意到生成元 (3.3.8) 式决定的对易关系是：

$$[\hat{J}_1,\hat{J}_2]=i\hat{J}_3,\qquad[\hat{J}_2,\hat{J}_3]=i\hat{J}_1,\qquad[\hat{J}_3,\hat{J}_1]=i\hat{J}_2$$

利用三秩反对称张量 ϵ_{ijk}，上式可写为：

$$\boxed{[\hat{J}_i,\hat{J}_j]=i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k}\tag{3.3.10}$$

式中采用了 Einstein 求和惯例。于是：

$$\left[\sum_i-i\alpha_i\hat{J}_i,\sum_j-i\beta_j\hat{J}_j\right]=-i\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j[\hat{J}_i,\hat{J}_j]=\sum_k\hat{J}_k\sum_{i,j}\epsilon_{ijk}\alpha_i\beta_j$$

利用矩阵公式 $e^Ae^B=e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[B,A]]+\cdots}$，其中 A、B 是任意两个同阶矩阵，可以写出：

$$e^{\sum\limits_i-i\alpha_i\hat{J}_i}e^{\sum\limits_j-i\beta_j\hat{J}_j}=e^{\sum\limits_k\hat{J}_k\left(-i\alpha_k-i\beta_k+\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j}\epsilon_{ijk}\alpha_i\beta_j+\cdots\right)}=e^{\sum\limits_i-i\gamma_k\hat{J}_k}\tag{3.3.11}$$

其中：

$$\gamma_k=f_k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\alpha_k+\beta_k+\frac{1}{2}\sum_{i,j}i\epsilon_{ijk}\alpha_i\beta_j+\cdots\tag{3.3.12}$$

其中的 $f_k\ (k=1,2,3)$ 是 SO(3) 群在所取参数下的乘法函数。上式表明 SO(3) 群的乘法函数的形式由常数 ϵ_{ijk} 完全决定，即这些常数决定着 SO(3) 群的乘法结构，所以称 ϵ_{ijk} 为群的结构常数。

类似 SO(2) 群和 O(2) 群的做法，如果把三维空间反射 $\hat{P}$ 包含到 SO(3) 群，所有三维实正交矩阵的集合在矩阵乘法下构成三维实正交矩阵群，称为 **O(3) 群** [7]。SO(3) 群是单连通的，O(3) 群是不连通的，它有两个不连通的分支，SO(3) 和 $\hat{P}$SO(3)，即两个分离的球面。前者由全部正常三维空间转动组成，后者由全部反射情形下的转动组成，它们的矩阵行列式分别为 +1 和 −1，不能互相连续过渡。

四、SU(2) 群

所有 2×2 的幺正矩阵 U 在矩阵乘法下成群，称为 **U(2) 群**。幺正矩阵的每个矩阵元都是复数，所谓幺正条件，指的是 $U^\dagger U = I$。如果对 U(2) 群加上幺模条件 $\det U = +1$，则 2×2 的幺模幺正矩阵构成 **SU(2) 群**。不难证明 2×2 的幺正矩阵都可以写成一个 2×2 的幺模幺正矩阵乘以指数因子 $e^{i\alpha}$，前者所成的群即为 SU(2) 群，后者 (等价于 1×1 的幺正矩阵) 所成的群就是 U(1) 群：

$$\mathrm{U}(2) = \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)$$

事实上 $n\times n$ 的幺正群 U(n) 是特殊幺正群 SU(n) 和 U(1) 群的直积：

$$\mathrm{U}(n) = \mathrm{SU}(n) \otimes \mathrm{U}(1)$$

SU(2) 群的每个 2×2 表示矩阵 U 依赖于四个复数参数，相当于八个实参数。幺正条件 $U^\dagger U = 1$ 给出四个约束方程，幺模条件 $\det U = +1$ 给出一个约束方程，因而独立的实参数有三个。考虑幺正条件后，表示矩阵 U 可以写为：

$$U = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ -\gamma^* & \beta^* \end{pmatrix}$$

令：

$$\beta = a - ib_3, \qquad \gamma = -b_2 - ib_1$$

U 可写为：

$$U = \begin{pmatrix} a-ib_3 & -b_2-ib_1 \\ b_2-ib_1 & a+ib_3 \end{pmatrix} = aI - i\mathbf{b}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.3.13}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 是 Pauli 矩阵：

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

由幺模条件，即 $\beta^*\beta + \gamma^*\gamma = 1$ 可知：

$$a^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = a^2 + b^2 = 1 \tag{3.3.14}$$

根据上式，我们可以令：

$$a = \cos\frac{\alpha}{2}, \qquad b = \sin\frac{\alpha}{2}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{b}}{b} \tag{3.3.15}$$

[7] 由于群 SO(2)、SO(3) 是群 O(2)、O(3) 满足矩阵行列式为 +1 这个“特殊 (special)” 条件下的一个子集，因此它们的名称以 S 开始。类似地 $n\times n$ 幺模实正交矩阵群 SO(n) 是 $n\times n$ 实正交矩阵群 O(n) 的子集；$n\times n$ 幺模幺正矩阵群 SU(n) 是 $n\times n$ 幺正矩阵群 U(n) 的子集等。矩阵行列式为 +1 称为幺模条件。

联立 (3.3.13)、(3.3.14)、(3.3.15) 式，得到：

$$U = \cos\frac{\alpha}{2} I - i\sin\frac{\alpha}{2}\mathbf{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}} = e^{-i\frac{\alpha}{2}\mathbf{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}}$$

进一步令：

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha\mathbf{n} \tag{3.3.16}$$

$$\hat{\mathbf{T}} \equiv \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}{2} \tag{3.3.17}$$

表示矩阵可写为：

$$\boxed{U(\boldsymbol{\alpha}) = e^{-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{T}}} = e^{-i(\alpha_1\hat{T}_1+\alpha_2\hat{T}_2+\alpha_3\hat{T}_3)}} \tag{3.3.18}$$

式中 $\hat{\mathbf{T}}$ 就是 SU(2) 群的生成元，生成元的个数 $N = 3$。式 (3.3.18) 给出了 SU(2) 群的一种参数化方案，在给定参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 下，SU(2) 群的乘法函数由上式中的矩阵 $\hat{\mathbf{T}}$ 的对易式决定。利用 Pauli 矩阵的性质和 $\hat{\mathbf{T}}$ 的定义式 (3.3.17) 容易求得：

$$\boxed{[\hat{T}_i, \hat{T}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{T}_k} \tag{3.3.19}$$

SU(2) 群的三个线性无关的生成元 $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3$ 张成一个三维代数空间，三个生成元是该代数空间的一组基。注意：不要把生成元构成的代数空间和表示矩阵构成的表示空间混淆起来。例如 SU(2) 的代数空间是三维的 $N = 3$，表示空间是二维的 $n = 2$。物理学中所谓的内部空间指的是表示空间。例如把 SU(2) 应用于质子和中子的同位旋，内部空间就是同位旋空间。代数空间的基是同位旋的三个分量，表示空间的基是核子 (量子态) 的两个分量，即质子和中子。

对比 (3.3.19) 式和 SO(3) 群的 (3.3.10) 式，我们发现 SU(2) 群的生成元 $\hat{T}_i$ 和 SO(3) 群的生成元 $\hat{J}_i$ 都是三个，且有相同的李代数，因此在群参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 下两者的乘法函数是相同的。由此可见 SU(2) 群和 SO(3) 群有相似的结构。实际上 SU(2) 和 SO(3) 同态 [8]。两个 SU(2) 的群元素对应一个 SO(3) 的群元素。

五、SU(3) 群

所有 3×3 幺正矩阵 U 的集合构成的矩阵群称为 **U(3) 群**。三维幺正矩阵依赖于 9 个复参数或 18 个实参数。幺正条件 $\hat{U}^\dagger\hat{U} = 1$ 给出了 9 个约束方程，因此共有 9 个独立实参数，或者说独立的幺正矩阵数目有 9 个。其中的一个幺正矩阵对应着相位因子，对应 U(1) 群。其余 8 个幺正矩阵满足幺模条件 $\det\hat{U} = 1$，构成 **SU(3) 群**。

我们考虑由 8 个群参数 $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ 表征的无穷小变换 $U(\boldsymbol{\epsilon})$，相应地引入 8 个群参数空间中群元素对群参数的微商，即厄米生成元 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$，则：

$$\hat{U}(\boldsymbol{\epsilon}) = -i\boldsymbol{\epsilon}\cdot\hat{\boldsymbol{\lambda}}$$

下面将看到 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ 可以由 Pauli 矩阵 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 构造，会多出常数 2。为此重新定义生成元：

$$\hat{\mathbf{T}} \equiv \frac{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}{2}$$

[8] 李代数决定了群的局部性质。两个或多个局部性质相同的群，整体性质可能不同。

于是由 $\boldsymbol{\alpha}$ 表征的有限变换 $U(\boldsymbol{\alpha})$ 可以用这些 $\hat{\mathbf{T}}$ 表示：

$$\boxed{\hat{U}(\boldsymbol{\alpha}) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - i\frac{\boldsymbol{\alpha}}{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\lambda}}\right)^n = e^{-i\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\hat{\mathbf{T}}}}$$

下面我们具体讨论如何选择SU(3) 群的八个 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ 矩阵。幺模条件 $\det\hat{U} = 1$ 说明 λ_i 矩阵的迹 $\mathrm{Tr}\,\hat{\lambda}_i = 0$，而矩阵的迹与基的选择无关，因此每个 λ_i 必须是无迹的。考虑到 SU(3) 群是 SU(2) 群的推广。对应SU(2) 情形下的Pauli 矩阵，在SU(3) 中，我们可以简单写出如下三个线性独立的 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ 矩阵：

$$\hat{\lambda}_1 = \begin{pmatrix}\hat{\sigma}_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \hat{\lambda}_2 = \begin{pmatrix}\hat{\sigma}_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \hat{\lambda}_3 = \begin{pmatrix}\hat{\sigma}_3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

即 SU(3) 群表示空间的 1,2,3 对称包含 SU(2) 群表示空间的 1,2 对称，也就是：

$$1\leftrightarrow 2\qquad \hat{\lambda}_1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \hat{\lambda}_2 = \begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \hat{\lambda}_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

考虑到SU(3) 群的 1,2,3 对称还包含 SU(2) 群的 1,3 对称和 2,3 对称，我们有：

$$1\leftrightarrow 3\qquad \hat{\lambda}_4 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad \hat{\lambda}_5 = \begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}\qquad \hat{\lambda}_A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$2\leftrightarrow 3\qquad \hat{\lambda}_6 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad \hat{\lambda}_7 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\qquad \hat{\lambda}_B = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

以上共给出了九个 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ 矩阵，其中只有八个是独立的。注意对角的 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ 矩阵除了 $\hat{\lambda}_3$ 外，还有 $\hat{\lambda}_A$ 和 $\hat{\lambda}_B$，它们不是独立的，我们对 $\hat{\lambda}_A$ 和 $\hat{\lambda}_B$ 作线性组合[9]：

$$\hat{\lambda}_8 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\lambda}_A + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\lambda}_B$$

这样得到SU(3) 群的 λ_8 矩阵：

$$\hat{\lambda}_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

这八个 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ 矩阵称为 Gell-Mann 矩阵。注意 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ 矩阵的选取形式有很多，Gell-Mann 矩阵是其中最常见的一种。

容易验证在SU(3) 群生成元的所有对易关系中只有以下三个为零：

$$[\hat{T}_1, \hat{T}_8] = [\hat{T}_2, \hat{T}_8] = [\hat{T}_3, \hat{T}_8] = 0$$

但是 $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3$ 彼此不对易。故SU(3) 群的秩为 2，有两个 Casimir 不变量，其中一个：

$$\hat{C}^2 = \sum_{i=1}^{8}\hat{T}_i^2$$

[9]系数 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的选取使得 $\mathrm{Tr}\left(\hat{\lambda}_i\right)^2 = 2$，以便于计算。

3.4 U(1) 整体对称性

前面讨论过电荷、重子数、轻子数等相加性量子数的守恒定律。这些守恒定律的实质在于物理规律的 U(1) 整体对称性。下面以电荷为例加以说明。

我们用 ψ_Q 表示具有电荷 Q 的系统波函数，对系统进行相位变换 $\hat{U}$：

$$\hat{U} = e^{i\alpha\hat{Q}} \tag{3.4.1}$$

式中 α 是与时空无关的任意实函数 [10]，$\hat{Q}$ 是电荷算符，也是相位变换 $\hat{U}$ 的生成元。在 $\hat{U}$ 变换下系统状态变为：

$$\psi'_Q = \hat{U}\psi = e^{i\alpha\hat{Q}}\psi \tag{3.4.2}$$

由于系统波函数的相对相位不能绝对测定，因此系统在变换前后保持不变，也就是说，如果 ψ_Q 满足 Schrödinger 方程，则 ψ'_Q 也满足 Schrödinger 方程：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \tag{3.4.3}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi' = \hat{H}\psi' \tag{3.4.4}$$

把 (3.4.2) 式代入 (3.4.3) 式得：

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{i\alpha\hat{Q}}\psi_Q\right) = \hat{H}e^{i\alpha\hat{Q}}\psi_Q$$

因为 $\hat{Q}$ 与时间无关，所以上式可写为：

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_Q = e^{-i\alpha\hat{Q}}\hat{H}e^{i\alpha\hat{Q}}\psi_Q$$

与 (3.4.4) 式比较，U(1) 整体对称性要求：

$$e^{-i\alpha\hat{Q}}\hat{H}e^{i\alpha\hat{Q}} = \hat{H}$$

由于 α 是任意实参数，可考虑无穷小变换，即 $\alpha \ll 1$，将指数展开：

$$(1 - i\alpha\hat{Q})\hat{H}(1 + i\alpha\hat{Q}) = \hat{H}$$

即

$$\hat{Q}\hat{H} - \hat{H}\hat{Q} = [\hat{Q}, \hat{H}] = 0$$

可见系统的 U(1) 整体对称性要求电荷算符与系统的哈密顿量对易，故电荷算符代表的物理量 — 电荷 Q 是一个守恒量。

从群论的角度看，所有相位变换 (3.4.1) 构成 U(1) 群。变换的生成元也就是 U(1) 群的生成元，它所对应的量子数是相加性的。如果一个系统包含 n 个粒子，分别具有电荷量子数 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$，那么在波函数进行变换时，各粒子分别进行变换：

$$\psi'_Q = e^{i\alpha\hat{Q}_1}e^{i\alpha\hat{Q}_2}\cdots e^{i\alpha\hat{Q}_n}\psi_Q = e^{i\alpha\sum_i\hat{Q}_i}\psi_Q$$

即:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n = \sum_i Q_i$$

系统的总电荷是系统中各部分电荷之和。

如果把上面讨论的 Q 换成重子数 $\mathcal{B}$、轻子数 L_e, L_μ, L_τ，用完全相同的办法可以证明这些 U(1) 整体变换不变性分别导致相应的量子数守恒定律。同样地，一个量子系统的总重子数、总轻子数等是系统中各部分相应量子数的和。

[10] 参数 α 与时空无关的对称性称为整体对称性，若参数是时空的函数 $\alpha(x^\mu)$，则称为定域规范对称性。

3.5 u, d 夸克和味 SU(2) 对称性

前面已经指出，考虑到质子和中子质量非常接近，以及核子之间的核力具有电荷无关性，如果忽略质子电荷，那么我们将无法区分质子和中子，它们是同一个核子的两种状态：

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

这两个态构成同位旋空间的两个基矢。

核子的这种同位旋概念可以推广到夸克。由于 u 夸克和 d 夸克质量相近，假设夸克之间的强相互作用与夸克味道无关 (事实上也是)，如果忽略夸克的电荷，则无法区分 u 夸克和 d 夸克，这就是强相互作用的味对称性 (flavor symmetry)。u、d 夸克构成了 SU(2) 群表示空间 (同位旋空间) 的一组基。

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.5.1}$$

强相互作用在 $u \leftrightarrow d$ 变换下不变，等价于在同位旋空间转动不变：

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{3.5.2}$$

这些 2×2 幺正变换矩阵构成 U(2) 群。其中的一个幺正矩阵对应于相位因子，不涉及夸克味道，故与夸克味对称性无关。另有三个幺正矩阵满足幺模条件 $\det \hat{U} = 1$，构成 SU(2) 特殊幺正群。SU(2) 群的三个生成元构成 SU(2) 群代数空间的基。

3.5.1 同位旋空间的性质

第 3.3.5 节中已经得到 SU(2) 群的代数，即生成元的对易关系：

$$[\hat{T}_j, \hat{T}_k] = i\epsilon_{jkl}\hat{T}_l$$

可见同位旋具有与自旋完全相同的对易性质。SU(2) 群的三个生成元算符 $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3$ 都不相互对易，故不能同时测量，只有一个 Casimir 不变量。如果定义 $\hat{T}^2 = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2$，则：

$$[\hat{T}^2, \hat{T}_3] = 0$$

因此 $\hat{T}^2$ 与 $\hat{T}_3$ 对易，可以同时测量。所以用总同位旋 I 和同位旋第三分量 I_3 表示同位旋态，本征态记作 $|I, I_3\rangle$，显然：

$$\hat{T}^2 |I, I_3\rangle = I(I+1)|I, I_3\rangle \tag{3.5.3}$$

$$\hat{T}_3 |I, I_3\rangle = I_3 |I, I_3\rangle \tag{3.5.4}$$

于是 u、d 夸克可以由同位旋本征态 $|I, I_3\rangle$ 表示：

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle, \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

类似量子力学中自旋的处理方法，我们定义阶梯算符 (ladder operator)：

$$\hat{T}_+ \equiv \hat{T}_1 + i\hat{T}_2, \qquad \hat{T}_- \equiv \hat{T}_1 - i\hat{T}_2 \tag{3.5.5}$$

则有：

$$\hat{T}_+|I,I_3\rangle = \sqrt{I(I+1)-I_3(I_3+1)}|I,I_3+1\rangle$$
$$\hat{T}_-|I,I_3\rangle = \sqrt{I(I+1)-I_3(I_3-1)}|I,I_3-1\rangle$$

因此上升阶梯算符 $\hat{T}_+$ 作用在 $|I,I_3\rangle$ 态上使得 I_3 增加 1，多次使用 $\hat{T}_+$ 直到 I_3 取最大值 I，而下降阶梯算符 $\hat{T}_-$ 作用在 $|I,I_3\rangle$ 态上使得 I_3 减少 1，多次使用 $\hat{T}_-$ 直到 I_3 取最小值 $-I$，如图 3.2 所示。对于二态系统，有：

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{T}_+u &= 0, & \hat{T}_+d &= u \\ \hat{T}_-u &= d, & \hat{T}_-d &= 0 \end{aligned}} \tag{3.5.6}$$

即阶梯算符使得 $u \to d$，$d \to u$。

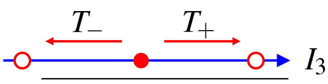


图 3.2: 阶梯算符 $\hat{T}_+$、$\hat{T}_-$ 使得 I_3 增加、减少 1。

两个同位旋 $|I^{(1)},I_3^{(1)}\rangle$ 和 $|I^{(2)},I_3^{(2)}\rangle$ 相加与两个自旋相加完全等同，即同位旋第三分量直接相加 $I_3 = I_3^{(1)} + I_3^{(2)}$，同位旋 I 取值为 $I^{(1)}+I^{(2)}, I^{(1)}+I^{(2)}-1,\cdots,|I^{(1)}+I^{(2)}|$。强相互作用在同位旋变换下不变意味着存在守恒量子数，它们是 I 和 I_3。

3.5.2 u,d 重子

有一些重子只包含 u、d 两种夸克，例如质子和中子的夸克组份分别是 uud 和 udd。下面讨论如何得到这些重子，特别是质子的波函数。利用 u、d 两个夸克可以得到有四种同位旋组合态。当 I_3 取最大值和最小值时，有：

$$uu \equiv \left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle_2 = |1,+1\rangle$$
$$dd \equiv \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_2 = |1,-1\rangle$$

下降阶梯算符作用在上面第一式 (或上升阶梯算符作用在面第二式) 左右两边：

$$\hat{T}_-(uu) \quad = ud + du$$
$$\hat{T}_-|1,+1\rangle = \sqrt{2}|1,0\rangle$$

两式相等，得到：

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud+du)$$

最后一个态 $|0,0\rangle$ 可以利用它与 $|1,0\rangle$ 正交得到：

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud-du)$$

可见两组同位旋二重态组合得到一组同位旋为 1 的三重态和一个同位旋为 0 的单态，用群论的语言来说就是：

$$2\otimes 2 = 3\oplus 1$$

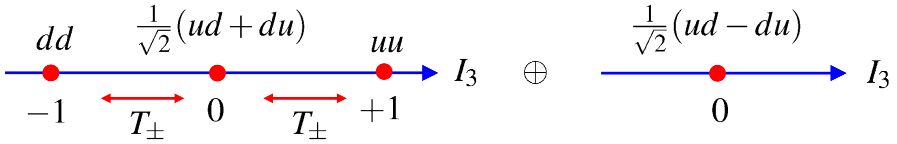


图 3.3: 两组 u、d 夸克二重态的四种组合，其中三种组合构成同位旋三重态，这些态之间可以通过阶梯算符转换，还有一种组合构成同位旋单态，它与三重态独立。

如图 3.3 所示。这四种同位旋组合中，同位旋 $I=1$ 的态在交换两个夸克时对称，同位旋 $I=0$ 的态在交换两个夸克时对反称。

在以上四个同位旋态的每一个态中，加上 u 或 d 夸克，可以得到两个新的态，对应 $I_3' = I_3 \pm \frac{1}{2}$。于是总共有八种同位旋组合态，如图 3.4 所示。

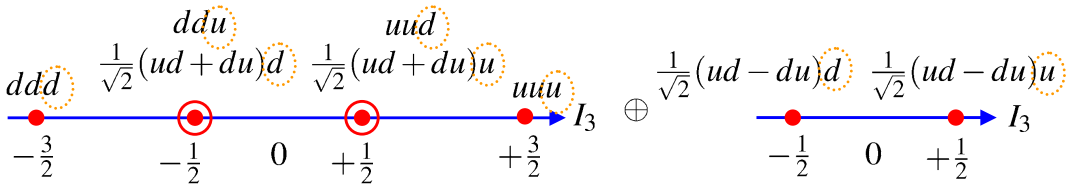


图 3.4: 三个 u、d 夸克的八种组合，它们是一组同位旋四重态，和两组同位旋二重态。这些同位旋多重态内部的各个态之间可以通过阶梯算符转换。

具体的同位旋空间波函数可以从 $|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle = ddd$ 出发，利用上升阶梯算符以及态之间的正交关系得到。例如：

$$
\begin{aligned}
\hat{T}_+\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle &= \hat{T}_+(ddd) = (\hat{T}_+d)dd + d(\hat{T}_+d)d + dd(\hat{T}_+)d \\
\text{i.e.}\sqrt{3}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle &= udd + dud + ddu \\
\therefore \quad \left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(udd + dud + ddu)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{T}_+\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{T}_+(udd + dud + ddu) \\
\text{i.e.}\quad 2\left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[(uud + udu) + (uud + duu) + (udu + duu)\right] \\
\therefore \quad \left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{T}_+\left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{T}_+(uud + udu + duu) \\
\text{i.e.}\ \sqrt{3}|\frac{3}{2},+\frac{3}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(uuu + uuu + uuu) \\
\therefore \quad \left|\frac{3}{2},+\frac{3}{2}\right\rangle &= uuu
\end{aligned}
$$

以上我们得到了一组 $I=\frac{3}{2}$ 的同位旋四重态。在图 3.4 中左边六个态中，利用正交关系可得一组 $|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$ 的同位旋二重态。而图 3.4 中右边二个态给出另外一组 $|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$ 同

位旋二重态。因此三组同位旋二重态组合得到一组同位旋为 $\frac{3}{2}$ 的四重态和两组同位旋为 $\frac{1}{2}$ 的二重态，用群论的语言来说就是：

$$2\otimes 2\otimes 2=2\otimes(3\oplus 1)=(2\otimes 3)\oplus(2\otimes 1)=4\oplus 2\oplus 2$$

具体如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\left|\frac{3}{2},+\frac{3}{2}\right\rangle=uuu\\
&\left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(uud+udu+duu)\\
&\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu+dud+udd)\\
&\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=ddd
\end{aligned}\right\}\ \boxed{S}$$
$$\left.\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle=+\frac{1}{\sqrt{6}}(2uud-udu-duu)\\
&\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{6}}(2ddu-dud-udd)
\end{aligned}\right\}\ \boxed{M_S}\tag{3.5.7}$$
$$\left.\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(udu-duu)\\
&\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(udd-dud)
\end{aligned}\right\}\ \boxed{M_A}$$

显然这三组多重态具有不同的粒子交换对称性质。对于以 $\boxed{S}$ 标记的四重态，波函数在交换任意两个夸克时对称。对于以 $\boxed{M_S}$ 标记的二重态，波函数在交换 $1\leftrightarrow 2$ 夸克时对称，在交换 $1\leftrightarrow 3$、$2\leftrightarrow 3$ 夸克时无确定对称性。对于以 $\boxed{M_A}$ 标记的二重态，波函数在交换 $1\leftrightarrow 2$ 夸克时反对称，在交换 $1\leftrightarrow 3$、$2\leftrightarrow 3$ 夸克时无确定对称性。这里 $\boxed{M}$ 是混合对称的意思。

至此仅讨论了同位旋空间波函数，需要加入自旋空间波函数。采用与上面同位旋完全相同的数学，得到三个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子组合的可能波函数：

$$\left.\begin{aligned}
&\left|\frac{3}{2},+\frac{3}{2}\right\rangle=\uparrow\uparrow\uparrow\\
&\left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow+\uparrow\downarrow\uparrow+\downarrow\uparrow\uparrow)\\
&\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(\downarrow\downarrow\uparrow+\downarrow\uparrow\downarrow+\uparrow\downarrow\downarrow)\\
&\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=\downarrow\downarrow\downarrow
\end{aligned}\right\}\ \boxed{S}$$
$$\left.\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle=+\frac{1}{\sqrt{6}}(2\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)\\
&\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{6}}(2\downarrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\downarrow)
\end{aligned}\right\}\ \boxed{M_S}\tag{3.5.8}$$
$$\left.\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)\\
&\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\downarrow-\downarrow\uparrow\downarrow)
\end{aligned}\right\}\ \boxed{M_A}$$

三个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的 u、d 夸克组合而成的束缚态重子的总波函数可以写为：

$$\psi = \eta_{\text{flavor}}\chi_{\text{spin}}\xi_{\text{color}}\phi_{\text{space}}$$

在任意交换两个夸克时，颜色空间的波函数 ξ_{color} 是反对称的 (参阅第 3.7 节)，设我们仅讨论基态重子，则轨道角动量量子数 $l=0$，因此位置空间波函数 ϕ_{space} 具有偶对称 $(-1)^l=+1$，于是只有满足：

$$\eta_{\text{flavor}}\chi_{\text{spin}} = \text{对称} \tag{3.5.9}$$

才能保证总波函数在任意交换两个夸克时反对称。我们有两种 $\eta_{\text{flavor}}\chi_{\text{spin}}$ 组合方式：

- 同位旋空间波函数和自旋波空间函数均为对称 $\boxed{S}$ 时，$\eta_{\text{flavor}}(S)\chi_{\text{spin}}(S)$ 显然对称，故有如图 3.5 所示四个 Δ 重子态。

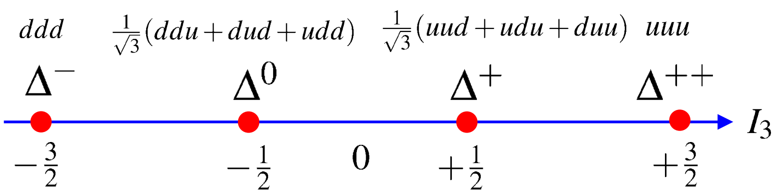


图 3.5: 同位旋和自旋均为对称的三个 u、d 夸克的四种组合。

- 同位旋空间波函数和自旋波空间函数均为混合对称 $\boxed{M}$ 时，$\eta_{\text{flavor}}(M)\chi_{\text{spin}}(M)$ 可能对称。显然在交换 $1\leftrightarrow 2$ 夸克时 $\eta_{\text{flavor}}(M_S)\chi_{\text{spin}}(M_S)$ 和 $\eta_{\text{flavor}}(M_A)\chi_{\text{spin}}(M_A)$ 均对称，但是这两种组合在交换 $1\leftrightarrow 3$ 或者 $2\leftrightarrow 3$ 夸克时无确定对称性。不过可以证明它们的线性组合：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_{\text{flavor}}(M_S)\chi_{\text{spin}}(M_S)) + \frac{3}{\sqrt{2}}(\eta_{\text{flavor}}(M_A)\chi_{\text{spin}}(M_A))$$

对于任意两个夸克交换是对称的。于是，质子 (自旋朝上) 的包含同位旋空间部分和自旋空间部分的波函数为：

$$|p\uparrow\rangle = \frac{1}{6\sqrt{2}}(2uud - udu - duu)(2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + \frac{3}{2\sqrt{2}}(udu - duu)(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)$$

整理后，得到：

$$\begin{aligned} |p\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}(&2u\uparrow u\uparrow d\downarrow - u\uparrow u\downarrow d\uparrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow + \\ &2u\uparrow d\downarrow u\uparrow - u\uparrow d\uparrow u\downarrow - u\downarrow d\uparrow u\uparrow + \\ &2d\downarrow u\uparrow u\uparrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow - d\uparrow u\uparrow u\uparrow) \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

当然在实际计算时不必总是使用 (3.5.10) 式所示的波函数。例如在计算质子磁矩时，不用考虑同位旋，前面三项就足够了。

3.5.3 u,d 轻介子

如同 u,d 夸克构成一组同位旋二重态，它们的反夸克 $\overline{u},\overline{d}$ 也构成一组同位旋二重态，如图 3.6 所示。注意反夸克二重态中夸克的次序和 $\overline{d}$ 前的负号，这是为了保证反夸克二重态和夸克二重态有相同的幺正变换性质，即在 $u\leftrightarrow d$ 以及 $\overline{u}\leftrightarrow\overline{d}$ 下有相同的物理。

$$\boxed{\begin{array}{ll}\hat{T}_+\overline{u}=-\overline{d}, & \hat{T}_+\overline{d}=0\\ \hat{T}_-\overline{u}=0, & \hat{T}_-\overline{d}=-\overline{u}\end{array}} \tag{3.5.11}$$

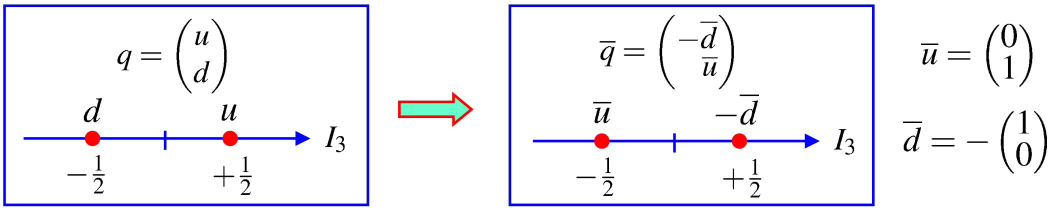


图 3.6: u、d 夸克二重态及其反粒子二重态。

只考虑 u,d 夸克及其反夸克，可能的介子态有四种，其中 I_3 取极值的两个态为：

$$\begin{aligned}|1,+1\rangle&=\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle\overline{\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle}=-u\overline{d}\\|1,-1\rangle&=\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\overline{\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle}=\quad d\overline{u}\end{aligned}$$

其中上划线表示它们是反夸克同位旋态。把下降阶梯算符作用在 $|1,+1\rangle=-u\overline{d}$ 的两边，得到 $I_3=0$ 的态：

$$|1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(u\overline{u}-d\overline{d})$$

以上三个态构成一组同位旋三重态。利用态的正交性[11] 得到同位旋单态：

$$|1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(u\overline{u}+d\overline{d})$$

用群论的语言来说就是：

$$2\otimes\overline{2}=3\oplus1$$

如图 3.7 所示。

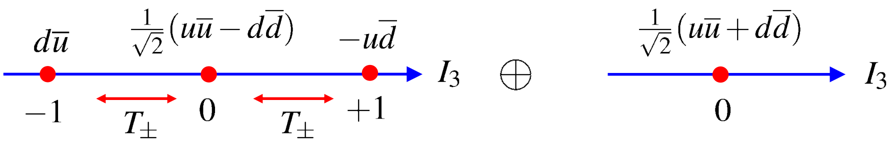


图 3.7: u、d 夸克二重态及其反粒子二重态的四种组合，其中三种组合是同位旋三重态，这些态之间通过阶梯算符转换，还有一种组合是同位旋单态，它与三重态独立。

[11] 同位旋单态的正交性可以用阶梯算符作用在 $|0,0\rangle$ 上验证，例如 $\hat{T}_+|0,0\rangle=\hat{T}_+\frac{1}{\sqrt{2}}(u\overline{u}+d\overline{d})=\frac{1}{\sqrt{2}}(-u\overline{d}+u\overline{d})=0$。同理 $\hat{T}_-|0,0\rangle=0$。

3.6 u, d, s 夸克和味 SU(3) 对称性

尽管 s 夸克的质量比 u, d 夸克的大，但是这种差别不是特别大。因此我们可以假设强相互作用在 $u \leftrightarrow d$, $u \leftrightarrow s$, $d \leftrightarrow s$ 变换下不变，从而把 u, d 夸克的味对称推广到 u, d, s 夸克的味对称。当然这种对称从本质上而言是近似的。

此时 u, d, s 夸克构成 SU(3) 群表示空间 — 味 SU(3) 空间的一组基：

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.6.1}$$

强作用在 $u \leftrightarrow d$, $u \leftrightarrow s$, $d \leftrightarrow s$ 变换下不变，等价于在味 SU(3) 空间转动下不变：

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \\ s' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \tag{3.6.2}$$

这些 3×3 幺正变换矩阵 $\hat{U}$ 构成 U(3) 群。其中的一个幺正矩阵对应着相位因子，与夸克的味对称性无关。另有八个幺正矩阵满足幺模条件 $\det \hat{U} = 1$，构成 SU(3) 特殊幺正群。SU(3) 群有八个厄米生成元构成 SU(2) 群代数空间的基。

3.6.1 味 SU(3) 空间的性质

我们在第 3.3.5 节中已经提到，SU(3) 群的秩为 2，即它的八个生成元中只有两个互相对易，通常取 $[\hat{T}_3, \hat{T}_8] = 0$。群的互相对易的生成元有共同的本征值和本征函数，可以用来区分强子。如果我们定义：

$$\begin{aligned} I_3 &= \hat{T}_3 = \frac{1}{2}\hat{\lambda}_3 \\ Y &= \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{T}_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\lambda}_8 \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

则容易证明：

$$\begin{aligned} I_3 u &= +\frac{1}{2}u \qquad I_3 d = -\frac{1}{2}d \qquad I_3 s = 0 \\ Y u &= +\frac{1}{3}u \qquad Y d = +\frac{1}{3}d \qquad Y s = -\frac{2}{3}s \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

因此 I_3 可以解释为同位旋第三分量，Y 则可以解释为超荷，它们构成二维 (Y, I_3) 平面。味 SU(3) 空间 u, d, s 三重态的 (Y, I_3) 权图如图 3.8 所示。图中还给出了 $\overline{u}, \overline{d}, \overline{s}$ 反夸克三重态的 SU(3) 权图。显然：

$$\begin{aligned} I_3 \overline{u} &= -\frac{1}{2}\overline{u} \qquad I_3 \overline{d} = +\frac{1}{2}\overline{d} \qquad I_3 \overline{s} = 0 \\ Y \overline{u} &= -\frac{1}{3}\overline{u} \qquad Y \overline{d} = -\frac{1}{3}\overline{d} \qquad Y \overline{s} = +\frac{2}{3}\overline{s} \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

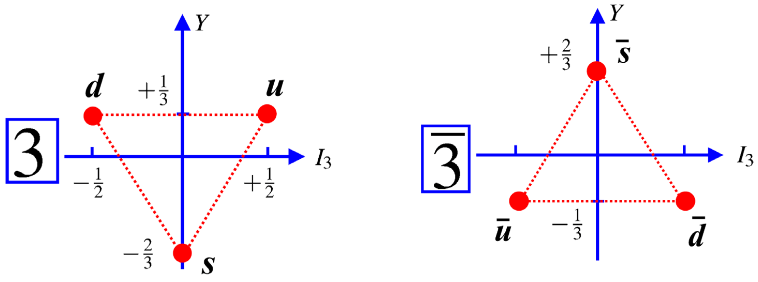


图 3.8: u, d, s 味 SU(3) 三重态以及 $\overline{u}, \overline{d}, \overline{s}$ 味 SU(3) 三重态的权图。

为了描写味 SU(3) 空间中态之间的转换，我们利用 SU(3) 群的其余六个生成元定义六个升降算符：

$$
\begin{aligned}
\hat{T}_{\pm} &= (\hat{T}_1 \pm i\hat{T}_2) \\
\hat{V}_{\pm} &= (\hat{T}_4 \pm i\hat{T}_5) \\
\hat{U}_{\pm} &= (\hat{T}_6 \pm i\hat{T}_7)
\end{aligned} \tag{3.6.6}
$$

这些升降算符 $\hat{T}_{\pm}$、$\hat{V}_{\pm}$、$\hat{U}_{\pm}$ 具有如下性质：

$$
\begin{array}{lll}
\hat{T}_+ u = 0 & \hat{T}_+ d = u & \hat{T}_+ s = 0 \\
\hat{T}_- u = d & \hat{T}_- d = 0 & \hat{T}_- s = 0 \\
\hat{V}_+ u = 0 & \hat{V}_+ d = 0 & \hat{V}_+ s = u \\
\hat{V}_- u = s & \hat{V}_- d = 0 & \hat{V}_- s = 0 \\
\hat{U}_+ u = 0 & \hat{U}_+ d = 0 & \hat{U}_+ s = d \\
\hat{U}_- u = 0 & \hat{U}_- d = s & \hat{U}_- s = 0 \\
\\
\hat{T}_+ \overline{u} = -\overline{d} & \hat{T}_+ \overline{d} = 0 & \hat{T}_+ \overline{s} = 0 \\
\hat{T}_- \overline{u} = 0 & \hat{T}_- \overline{d} = -\overline{u} & \hat{T}_- \overline{s} = 0 \\
\hat{V}_+ \overline{u} = -\overline{s} & \hat{V}_+ \overline{d} = 0 & \hat{V}_+ \overline{s} = 0 \\
\hat{V}_- \overline{u} = 0 & \hat{V}_- \overline{d} = 0 & \hat{V}_- \overline{s} = -\overline{u} \\
\hat{U}_+ \overline{u} = 0 & \hat{U}_+ \overline{d} = -\overline{s} & \hat{U}_+ \overline{s} = 0 \\
\hat{U}_- \overline{u} = 0 & \hat{U}_- \overline{d} = 0 & \hat{U}_- \overline{s} = -\overline{d}
\end{array} \tag{3.6.7}
$$

它们的变换性质可以用图 3.9 简单表示。

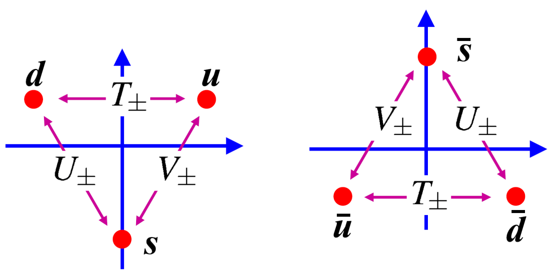


图 3.9: u, d, s 味 SU(3) 态之间以及 $\overline{u}, \overline{d}, \overline{s}$ 味 SU(3) 态之间的转换。

3.6.2 u,d,s 轻介子和多重态混合

下面讨论如何由 u,d,s 三种夸克及其反夸克 $\overline{u},\overline{d},\overline{s}$ 组成轻介子。由于 u,d,s 夸克的质量接近，且远小于 c,b,t 夸克的质量，因此这类介子又称为轻介子。

我们从 u,d,s 夸克的 (Y,I_3) 图出发，以该图的某个顶角，例如 u 顶角为中心，放置一个 $\overline{u},\overline{d},\overline{s}$ 反夸克 (Y,I_3) 图，在夸克的 (Y,I_3) 图上记录下 $\overline{u},\overline{d},\overline{s}$ 顶角的坐标，并标记为 $u\overline{d},u\overline{s},u\overline{u}$，其中第一个字母 u 来自夸克 (Y,I_3) 图的顶角，第二个字母来自反夸克 (Y,I_3) 图的顶角。重复上述过程，对夸克 (Y,I_3) 图的其他两个顶角 d,s 作类似的处理。最终得到一个六角形，它的六个顶角表示六个态 $u\overline{d},u\overline{s},d\overline{s},d\overline{u},s\overline{u},s\overline{d}$，而在六角形的中心处有三个态 $u\overline{u},d\overline{d},s\overline{s}$，共有九个波函数，如图 3.10 所示。上述过程相当于两个 SU(3) 群的直乘。

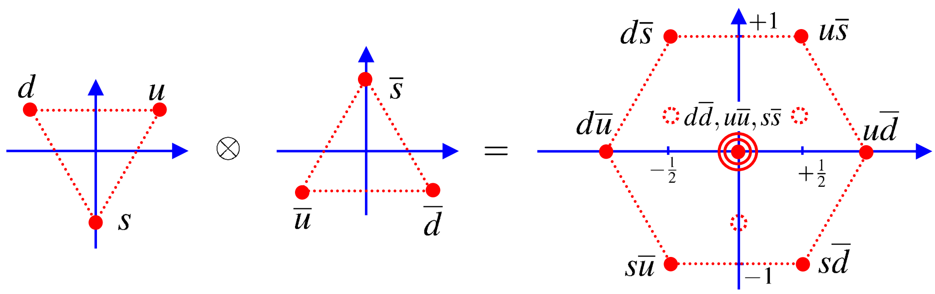


图 3.10: 轻介子九重态。

六角形六个顶角处的态具有不同的量子数 Y,I_3，因此是可以明确区分的。事实上，如果只考虑基态，那么顶角处的态 $u\overline{d},u\overline{s},d\overline{s},d\overline{u},s\overline{u},s\overline{d}$ 分别对应着实验发现的 $\pi^+,K^+,K^0,\pi^-,K^-,\overline{K}^0$ 等赝标介子或者 $\rho^+,K^{*+},K^{*0},\rho^-,K^{*-},\overline{K}^{*0}$ 等矢量介子。但是六角形中心处的三个态具有完全相同的量子数 $Y=0,I_3=0$，因而是简并的。我们需要找出满足一定条件的正确的波函数，它们应该是 $u\overline{u},d\overline{d},s\overline{s}$ 的线性叠加。

- 首先从六角形顶角处的六个态出发，利用 $\hat{T}_\pm.\hat{V}_\pm,\hat{U}_\pm$ 等升降算符应该可以得到六角形中心的三个态。事实上有六种方式从顶角到达中心，如图 3.11 所示。

$$\begin{aligned}
\hat{T}_+|d\overline{u}\rangle &= |u\overline{u}\rangle-|d\overline{d}\rangle, & \hat{T}_-|u\overline{d}\rangle &= |d\overline{d}\rangle-|u\overline{u}\rangle \\
\hat{V}_+|s\overline{u}\rangle &= |u\overline{u}\rangle-|s\overline{s}\rangle, & \hat{V}_-|u\overline{s}\rangle &= |s\overline{s}\rangle-|u\overline{u}\rangle \\
\hat{U}_+|s\overline{d}\rangle &= |d\overline{d}\rangle-|s\overline{s}\rangle, & \hat{U}_-|d\overline{s}\rangle &= |s\overline{s}\rangle-|d\overline{d}\rangle
\end{aligned} \tag{3.6.8}$$

  上式表明中心的三个叠加态中只有两个是线性独立的，因此其中的一个叠加态必然不属于多重态，即不能通过阶梯算符得到。

- 式 (3.6.8) 表明，我们可以在

$$|u\overline{u}\rangle-|d\overline{d}\rangle,\qquad |u\overline{u}\rangle-|s\overline{s}\rangle,\qquad |d\overline{d}\rangle-|s\overline{s}\rangle \tag{3.6.9}$$

  中选取两个线性独立且互相正交的态。如果味 SU(3) 对称是严格的，则这两个态可以任意选取。但是 $m_s>m_{u,d}$，即对称性是近似的。考虑到实验发现了三个质量为 $\sim 140\,\text{MeV}$ 的赝标 π 介子，以及三个质量为 $\sim 770\,\text{MeV}$ 的矢量 ρ 介子，表明三个 $\pi(\rho)$ 介子构成同位旋三重态。已知 $\pi^+(\rho^+)$、$\pi^-(\rho^-)$ 介子的波函数分别是 $u\overline{d}$、$d\overline{u}$，根据第 3.5.3 节中分析结果，我们确定六角形中心的一个态为：

$$\psi_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(u\overline{u}-d\overline{d}) \tag{3.6.10}$$

  此即 (3.6.9) 式中的第一个态，对应物理上的 $\pi^0(\rho^0)$ 介子。

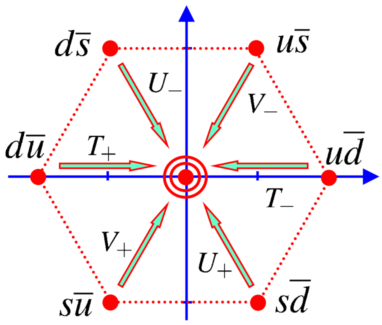


图 3.11: 从轻介子顶角处的六个态出发，利用阶梯算符，在中心处只能得到两个态。

❍ 六角形中心处的第二个态是 (3.6.9) 式中其余两个态的线性叠加：

$$\psi_8 = C_1(|u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle) + C_2(|d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle)$$

将之归一化 $\langle\psi_8|\psi_8\rangle = 1$，使之与 ψ_0 正交 $\langle\psi_0|\psi_8\rangle = 0$，得系数 C_1, C_2，于是：

$$\psi_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \tag{3.6.11}$$

该态与 ψ_0 以及六角形六个顶角处的态属于同一个超多重态，是味八重态。

❍ 六角形中心处的第三个态必须与 ψ_0 和 ψ_8 正交，由此可得：

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \tag{3.6.12}$$

该态是个味单态，也就是说无法通过阶梯算符使之变换到其他八个态：

$$\hat{T}_\pm\psi_1 = 0, \qquad \hat{V}_\pm\psi_1 = 0, \qquad \hat{U}_\pm\psi_1 = 0$$

可见 u, d, s 三种夸克及其反夸克的组合可以得到九个态，其中八个构成味八重态，剩下的一个是味单态。用群论语言说，SU(3) 群的两种三维基础表示的直乘结果，可以约化为两个不可约表示：

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

式中 $\bar{3}$ 表示反味 SU(3) 多重态的 (Y, I_3) 图是个正三角。SU(3) 九个态约化为八重态和单态之和。其中心处 $u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$ 三组波函数组成三个正交归一的线性叠加态，其中两个属于八重态，一个属于单态。如图 3.12 所示。

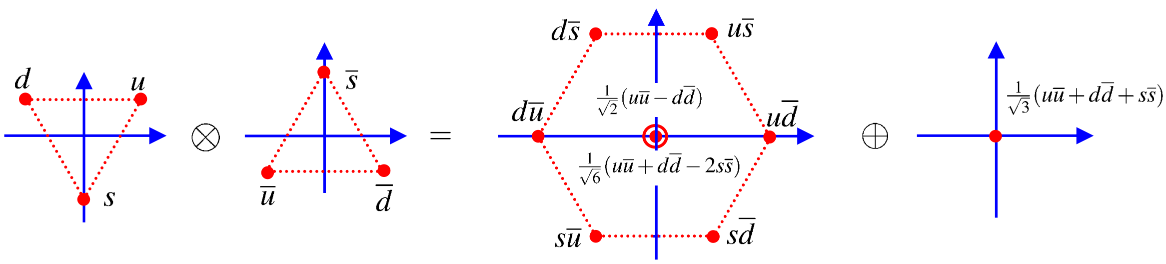


图 3.12: 味八重态和单态的波函数。

根据上述讨论，实验观测到的 18 个基态介子中，七个赝标介子和七个矢量介子的波函数已经确定：

$$\begin{array}{ccccccc} u\overline{d} & u\overline{s} & d\overline{s} & d\overline{u} & s\overline{u} & s\overline{d} & \frac{1}{\sqrt{2}}(u\overline{u}-d\overline{d}) \\ \pi^+ & K^+ & K^0 & \pi^- & K^- & \overline{K}^0 & \pi^0 \\ \rho^+ & K^{*+} & K^{*0} & \rho^- & K^{*-} & \overline{K}^{*0} & \rho^0 \end{array}$$

如果味 SU(3) 对称性是严格的，那么其哈密顿量是对角的：

$$\langle 1 | \hat{H}_{\mathrm{SU(3)\ flavor}} | 8 \rangle = 0$$

于是其余几个物理观测到的基态介子味或者是 SU(3) 八重态，或者是味 SU(3) 单态。但事实上味 SU(3) 对称性是近似的：

$$\langle 1 | \hat{H}_{\mathrm{Real\ SU(3)\ flavor}} | 8 \rangle \neq 0$$

故其余几个物理观测到的基态介子的波函数是味 SU(3) 八重态和味 SU(3) 单态的混合：

$$\begin{pmatrix} f' \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_8 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$$

其中 θ 称为九重态混合角。如果 $\theta = 0°$，那么：

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{\sqrt{6}}(u\overline{u}+d\overline{d}-2s\overline{s}) \qquad (\approx \eta) \\ f &= \frac{1}{\sqrt{3}}(u\overline{u}+d\overline{d}+s\overline{s}) \qquad (\approx \eta') \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

如果 $\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$，$\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$，即 $\theta \approx 35°$，那么：

$$\begin{aligned} f' &= s\overline{s} \qquad (\approx \phi) \\ f &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\overline{u}+d\overline{d}) \qquad (\approx \omega) \end{aligned} \tag{3.6.14}$$

此时 f' 仅由 s 夸克组成，f 介子仅由 u,d 夸克组成，称为理想混合 (ideally mixed)。实验发现，对于赝标基态介子 η,η'，混合角 θ_P 在 $-10°$ 到 $-20°$ 之间，因此它们的波函数接近 (3.6.13) 式的表示。对于矢量基态介子 ϕ,ω，混合角 $\theta_V \approx 35°$，故它们的波函数接近理论混合 (3.6.14) 式。

3.6.3 u,d,s 重子的多重态结构

从前面推导质子波函数的过程已经发现，获取重子在味道空间的完全波函数的过程是相当繁杂的。因此这里我们忽略重子波函数的推导，只关注其多重态结构问题。

从 u,d,s 夸克的 (Y,I_3) 图出发，对于每个顶角，以顶角为中心放置一个 u,d,s 夸克的 (Y,I_3) 图，这样任意两个 u,d,s 夸克组合出九个态，如图 3.13 (上) 所示。从而得到一组对称的六重态 (sextet) 和一组反对称的三重态，如图 3.13 (下) 所示。用群论的语言来说，就是：

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \overline{3}$$

其中上划线说明反对称三重态的 (Y,I_3) 图是个正三角，与 $\overline{u},\overline{d},\overline{s}$ 的基础表示样子一致。

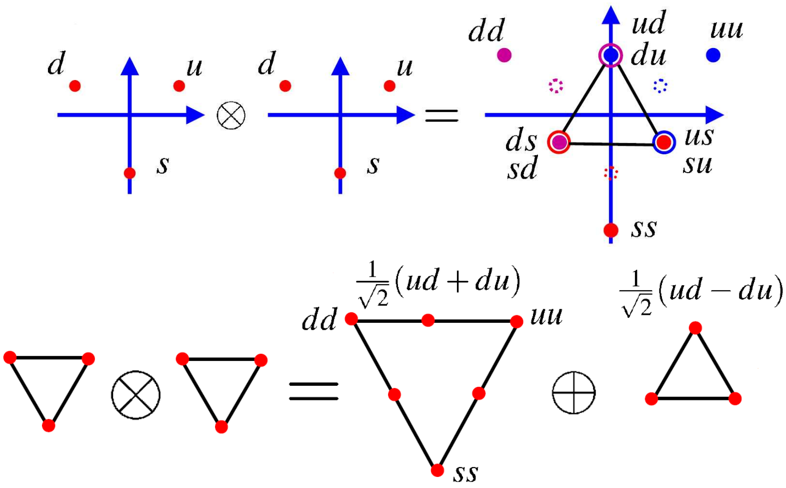


图 3.13: (上) 两个 u,d,s 夸克组合成九个态。(下) 其中的六个态构成一组对称六重态，其余三个态构成一组反对称三重态。

现在加入第三个夸克，如图 3.14 (上) 所示。将之与对称的六重态组合，得到一组对称的十重态和一组混合对称的八重态，如图 3.14 (中) 所示。用群论的语言来说是：

$$6\otimes 3 = 10\oplus 8_{M_S}$$

其中 M_S 表示混合对称。将第三个夸克与反对称的三重态组合，得到一组混合反对称的八重态和一个完全反对称的单态，如图 3.14 (下) 所示。用群论的语言来说是：

$$\overline{3}\otimes 3 = 8_{M_A}\oplus 1_A$$

其中 M_A 表示混合反对称。

总之，三个 u,d,s 夸克的组合，用群论的语言来说，就是：

$$3\otimes 3\otimes 3 = (6\oplus\overline{3})\otimes 3 = 10\oplus 8_{M_A}\oplus 8_{M_S}\oplus 1_A \tag{3.6.15}$$

十重态和单态波函数分别对称和完全反对称。我们将不再讨论十重态和八重态的具体波函数 (其中部分态的波函数显示在图 3.14 中)。不过容易得到 SU(3) 单态的完全反对称波函数：

$$\psi_{\text{singlet}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(uds - usd + dsu - dus + sud - sdu)$$

显然无法用阶梯算符使之变换到其他多重态的成员。

最后我们考虑重子的总波函数，以得到可能的重子多重态。参考第 3.5.2 节中的推理方法，味 SU(3) 空间的波函数 η_{flavor} 和自旋空间的波函数 χ_{spin} 的乘积必须对称：

$$\eta_{\text{flavor}}\chi_{\text{spin}} = \text{对称}$$

事实上只存在以下两种可能的组合：

- 味 SU(3) 波函数和自旋波函数都对称：

$$\eta_{\text{flavor}}(S)\chi_{\text{spin}}(S)$$

这就是自旋宇称 $J^P = \frac{3}{2}^+$ 的重子十重态。

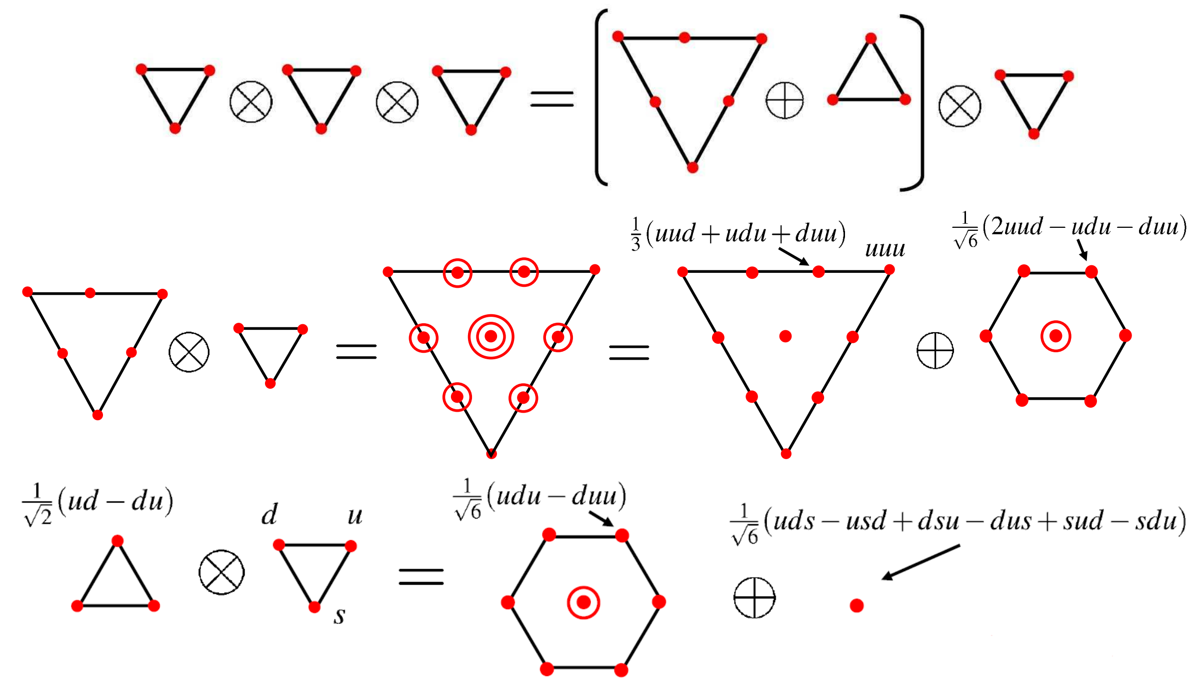


图 3.14: (上) 三个 u, d, s 夸克的组合等价于一个夸克与一组对称六重态和一组反对称三重态的组合。(中) 将第三个夸克与对称六重态组合得到一组对称十重态和一组混合对称八重态。(下) 将第三个夸克与反对称三重态组合得到一组混合反对称八重态和一个完全反对称单态。

❍ 味 SU(3) 波函数和自旋波函数都是混合对称：

$$\alpha\eta_{\text{flavor}}(M_S)\chi_{\text{spin}}(M_S) + \beta\eta_{\text{flavor}}(M_A)\chi_{\text{spin}}(M_A)$$

这就是自旋宇称 $J^P = \frac{1}{2}^+$ 的重子八重态。

这些物理观测到的重子十重态和八重态如图 3.15 所示。注意如果单从夸克模型看，式 (3.6.15) 表示的十重态、八重态和单态都应该存在。但是上述讨论已经考虑到重子的色波函数 ξ_{color} 是完全交换反对称的，由此得到基态重子只可能存在十重态和八重态的结论，与实验事实一致。因此对强子波函数的讨论必然涉及夸克的色 SU(3) 对称性，即 QCD 的动力学机制。

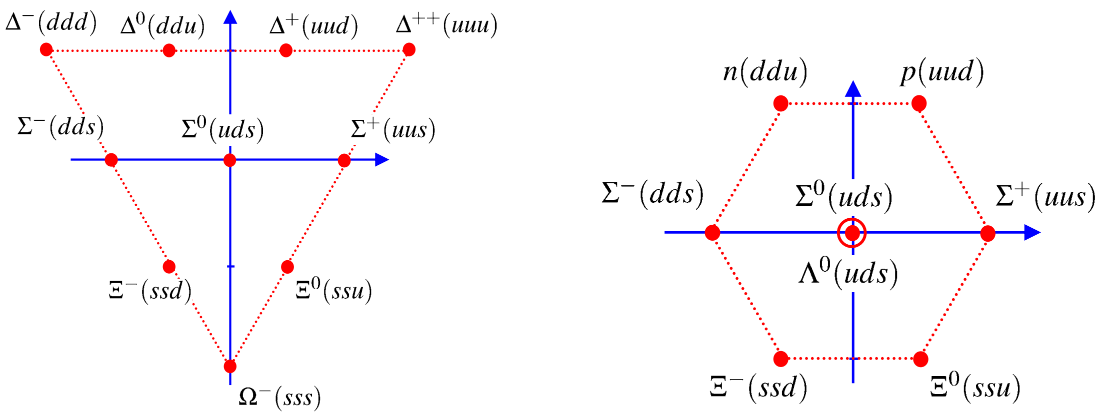


图 3.15: 自然界中存在的重子十重态和重子八重态。

3.7 色 SU(3) 对称性

根据强相互作用的 QCD 理论，强作用在色 SU(3) 空间转动下 $r \leftrightarrow b,\ r \leftrightarrow g,\ b \leftrightarrow g$ 保持不变。这就是色 SU(3) 对称性。不同于味 SU(3) 的近似对称，色 SU(3) 是严格对称的。此时 r, g, b 三种颜色构成色 SU(3) 空间的一组基：

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.7.1}$$

3.7.1 色 SU(3) 空间的性质

完全类比味 SU(3) 对称性中用 (Y, I_3) 标记味 SU(3) 空间态的方法，我们用 (Y_3^c, I_3^c) 标记色 SU(3) 空间中的态。其中 I_3^c 指的是色同位旋第三分量，Y^c 是色超荷。图 3.16 所示为 r, g, b 色 SU(3) 三重态以及 $\overline{r}, \overline{g}, \overline{b}$ 反色 SU(3) 三重态的权图。

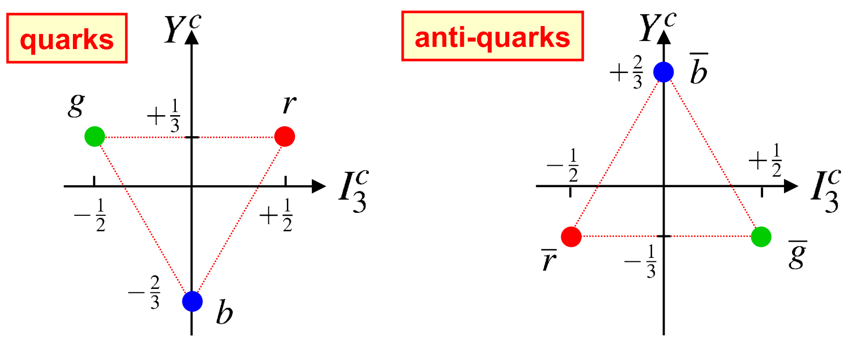


图 3.16: r, g, b 色 SU(3) 三重态以及 $\overline{r}, \overline{g}, \overline{b}$ 反色 SU(3) 三重态的权图。

为了描写色 SU(3) 空间中态之间的转换，我们定义六个如 (3.6.6) 式所示的色升降算符 $\hat{T}_\pm^c, \hat{V}_\pm^c, \hat{U}_\pm^c$，它们满足 (3.6.7)式所示的转换性质，只需要把味 SU(3) 三重态替换为色 SU(3) 三重态：

$$u \to r, \qquad d \to g, \qquad s \to b$$

色升降算符 $\hat{T}_\pm^c$、$\hat{V}_\pm^c$、$\hat{U}_\pm^c$ 在 r, g, b 色三重态之间的变换性质如图 3.17 所示。

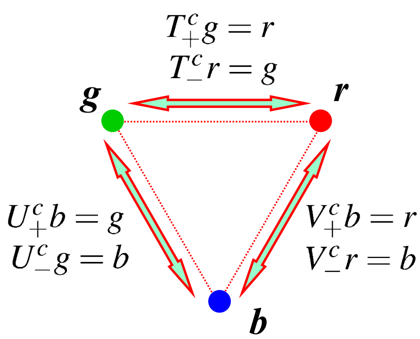


图 3.17: r, g, b 色 SU(3) 态之间的转换。

3.7.2 强子的色波函数

实验观测到的强子都是色禁闭的，它们没有颜色，或称为色单态。强子是色单态不仅表明强子的色量子数 I_3^c, Y^c 为零，而且意味着它们在色 SU(3) 空间变换不变，以及在色阶梯算符作用下为零。

先考虑介子 $q\overline{q}$ 的色波函数。色 SU(3) 和反色 SU(3) 的直乘可以约化为两个不可约表示 (色八重态和色单态) 的直和：

$$3 \otimes \overline{3} = 8 \oplus 1$$

如图 3.18 所示。根据上面分析，介子只能处在色单态，即介子的色波函数是：

$$\xi_{\text{color}}(q\overline{q}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(r\overline{r} + g\overline{g} + b\overline{b})$$

显然在色八重态中再加一个夸克并不能构成色单态，因此不存在 $q\overline{q}q$ 态。

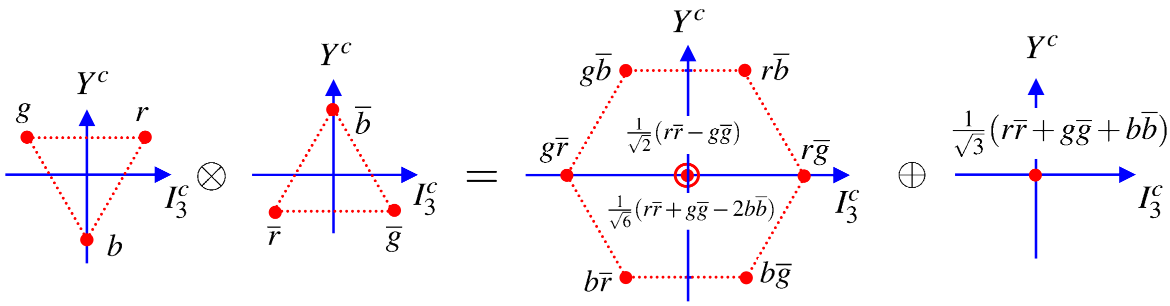


图 3.18: 色八重态和单态的波函数。

下面讨论重子 qqq 的色波函数。参考第 3.6.3 节中重子味 SU(3) 波函数的讨论方法，为了得到重子的色波函数，首先两个色 SU(3) 的直乘可以约化为一组对称六重态和一组反对称三重态，如图 3.19 (上) 所示。显然 qq 不能组成色单态。接着在上述六重态和三重态中加入第三个夸克，得到一个十重态，两个八重态和一个单态，如图 3.19 (下) 所示。其中单态的波函数为：

$$\xi_{\text{color}}(qqq) = \frac{1}{\sqrt{6}}(rgb - rbg + gbr - grb + brg - bgr)$$

可以证明该单态是无色的，即满足：

$$I_3^c = 0,\ Y^c = 0$$

以及：

$$T_\pm^c \xi_{\text{color}} = U_\pm^c \xi_{\text{color}} = V_\pm^c \xi_{\text{color}} = 0$$

因此重子 qqq 存在色单态，具有反对称的色波函数。

根据夸克模型以及色禁闭假设，允许存在以下强子态：

$q\overline{q}$	介子
qqq	重子
$q\overline{q}q\overline{q}$	四夸克态
$qqqq\overline{q}$	五夸克态 (pentaquarks)

除去介子和重子的其他强子一般称为奇特态。迄今为止，实验上还没有发现这些奇特态，虽然几年前一些实验组曾经报道过五夸克态的一些实验“证据”。

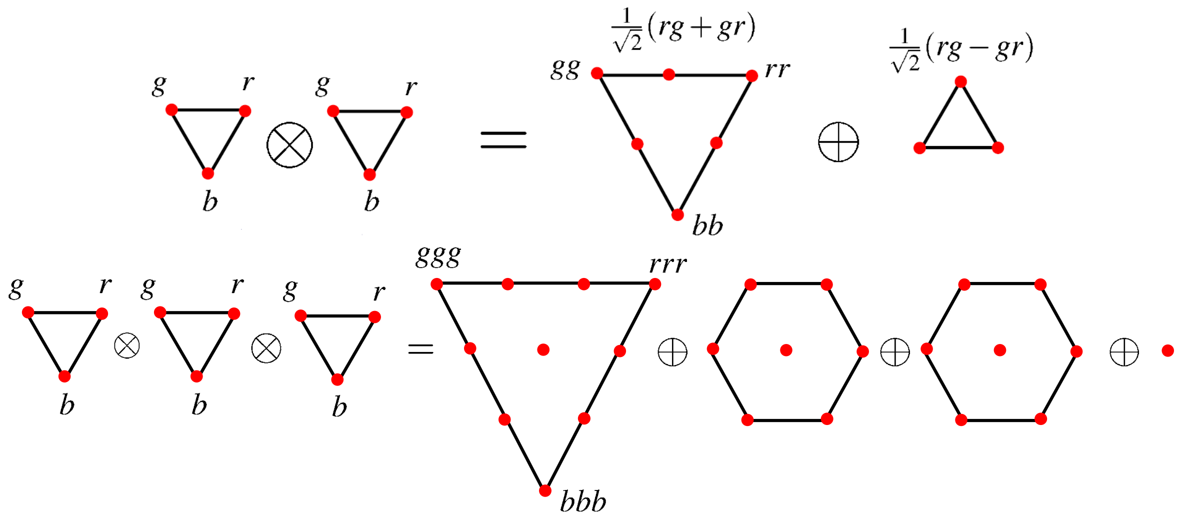


图 3.19: 重子的色多重态。

3.7.3 胶子的色波函数

胶子携带一种色和一种反色，它的色波函数和介子的色波函数完全相同，即可以构成一组色八重态和一个色单态，如图 3.18 所示。这八种带色胶子和一种无色胶子的色波函数为：

$$\text{色八重态:}\quad r\bar{g},\ r\bar{b},\ g\bar{r},\ g\bar{b},\ b\bar{r},\ b\bar{g},\ \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r}-g\bar{g}),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r}+g\bar{g}-2b\bar{b})$$

$$\text{色单态:}\quad \frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r}+g\bar{g}+b\bar{b})$$

但是自由粒子的色禁闭假设表明自然界中不存在色单态胶子。如果存在色单态胶子，则其强作用行为将如同“强作用光子”，具有无限长的力程，将是非禁闭的。实验表明强作用力程很短，故胶子不存在色单态。

另一方面，强相互作用的规范理论表明，强相互作用的基础是色 SU(3) 对称性，色 SU(3) 群有八个生成元，对应八种胶子 (如果自然界选择了 U(3) 对称性，那么将存在九种胶子，第九种胶子将是色单态的，与实验结果不符)。

3.8 强子多重态的质量

强子的夸克模型可以给出强子的很多重要量子数。这一节中我们利用前面的讨论结果，说明强子多重态的质量分裂。

3.8.1 味 SU(3) 破缺引起的质量分裂

如果 u, d, s 夸克的质量相等，即味 SU(3) 的对称性是完全的，那么对于同一味 SU(3) 的超多重态来说，各成员的质量将是完全相同的。实验发现超多重态成员的质量很不相同，这只能用味 SU(3) 对称性的破缺来解释。不过 Gell-Mann 和 Okubo 分析强子质量，发现它们还是呈现一定的规律：

❍ 同一超荷，不同同位旋的一组强子的质量基本相同。

❍ 不同超荷的多重态之间质量差异较大。

他们还得到了强子的 Gell-Mann－Okobo 质量分裂公式。下面我们推导这一公式。

首先，忽略同位旋多重态之间的电磁质量差，简单假设质量 M 包含一个 SU(3) 不变的常数项，和一个与超荷 Y 成比例的项：

$$M = a + bY \tag{3.8.1}$$

对于给定的 SU(3) 多重态，a 和 b 是常数。根据上式，得到重子十重态的质量公式：

$$M_{\Omega} - M_{\Xi^*} = M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} = M_{\Sigma^*} - M_{\Delta} \tag{3.8.2}$$

实验发现 (我们采用同一 U 旋，即电荷相同的多重态以忽略电磁质量差异)：

$$\begin{aligned} M_{\Omega^-} - M_{\Xi^{*-}} &= 137 \pm 2\,\mathrm{MeV} \\ M_{\Xi^{*-}} - M_{\Sigma^{*-}} &= 149 \pm 2\,\mathrm{MeV} \\ M_{\Sigma^{*-}} - M_{\Delta^-} &= 147 \pm 9\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

理论和实验符合得不错。

但是 (3.8.1) 式不适用于重子八重态的情况。按上述简单假设，因为 Λ 和 Σ 粒子的超荷 Y 相同，所以理论上它们之间的质量分裂为零，但是实验上：

$$M_{\Sigma^0} - M_{\Lambda} = 76.6 \pm 0.1\,\mathrm{MeV}$$

为此需要引入第二个简单假设。Gell-Mann 和 Okubo 认为在 (3.8.1) 式的质量中要加上两项不破坏同位旋守恒的 SU(3) 生成元的二次函数项，于是得到：

$$M = a + bY + cI(I+1) + dY^2 \tag{3.8.3}$$

对于给定的 SU(3) 多重态， c 和 d 是常数。上式必须满足十重态质量分裂为恒值的实验事实，即：

$$cI(I+1) + dY^2 = x + yY$$

式中 x 和 Y 是常数。把 $\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega^-$ 的 I 和 Y 值代入上式，消去 x 和 Y，得到两个关于 c 和 d 的方程，两者均给出：

$$d = -\frac{1}{4}c$$

于是 (3.8.3) 式变为：

$$M = a + bY + c\left[I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2\right] \qquad (\text{重子}) \tag{3.8.4}$$

这就是 Gell-Mann－Okubo 质量公式。利用上式，可以导出重子八重态的质量公式：

$$\frac{1}{2}(M_N + M_{\Xi}) = \frac{3}{4}M_{\Lambda} + \frac{1}{4}M_{\Sigma} \tag{3.8.5}$$

理论值和实验值之间存在一定差异，大约为 $7.6 \pm 0.7\,\mathrm{MeV}$，不过这个差异与多重态的典型质量分裂 ($\sim 100\,\mathrm{MeV}$) 比较，还是比较小的。

如果把 (3.8.4) 式应用于赝标介子八重态，可以得到：

$$M_K = \frac{3}{4}M_\eta + \frac{1}{4}M_\pi$$

结果与实验值差异很大。事实上 (3.8.4) 式对于介子是不适用的，必须代之以：

$$M^2 = a + bY + c\left[I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2\right] \qquad (\text{介子}) \tag{3.8.6}$$

这是因为重子是费米子，满足 Dirac 方程，因此质量以一次项出现，介子是玻色子，满足 Klein-Gordon 方程，故质量项以二次项出现。根据 (3.8.6) 式，赝标介子八重态的质量公式为：

$$M_K^2 = \frac{3}{4}M_\eta^2 + \frac{1}{4}M_\pi^2$$

上式和实验值符合较好。

根据 (3.8.6) 式，还可以得到矢量介子八重态的质量公式：

$$M_{K^*}^2 = \frac{3}{4}M_\omega^2 + \frac{1}{4}M_\rho^2$$

如果把 K^* 和 ρ 的质量代入上式，得到 $m_\omega = 928\,\text{MeV}$，与实验结果 $M_\omega = 782\,\text{MeV}$ 完全不符。实际上，根据前面一节的讨论，矢量介子 ω 和 ϕ 是 SU(3) 八重态 ψ_8 和 SU(3) 单态 ψ_1 的理想混合，因此上式质量中的 M_ω 应该以 SU(3) 八重态中 ψ_8 对应的质量 M_8 代替，即：

$$M_{K^*}^2 = \frac{3}{4}M_8^2 + \frac{1}{4}M_\rho^2 \tag{3.8.7}$$

对于赝标介子，也有类似的关系式：

$$M_K^2 = \frac{3}{4}M_8^2 + \frac{1}{4}M_\pi^2 \tag{3.8.8}$$

只不过对于赝标介子 η 和 η'，混合较小，η 粒子可以近似认为对应于 SU(3) 八重态 ψ_8 的夸克组份。

3.8.2 色矩相互作用和强子质量分裂

至此，我们把强子多重态的质量分裂简单地归结为组份夸克的质量差。考察基态介子的超多重态发现，π^+ 和 ρ^+ 的夸克组份相同，都是 $u\bar{d}$，但是它们的质量分别是 140 MeV 和 770 MeV。进一步分析发现两者的自旋取向不同，前者是 $^1\text{S}_0$，后者是 $^3\text{S}_1$。这种情况对于基态重子多重态也同样存在，例如 n 和 Δ^0 的夸克组份都是 udd，质量分别是 939 MeV 和 1236 MeV，它们的明显区别在于前者的 ud 夸克处在自旋交换反对称态，后者的三个夸克完全交换对称。

回忆原子体系的自旋自旋耦合造成原子的能级分裂，即自旋磁矩为 $\boldsymbol{\mu}$ 的电子在质子磁场 $\mathbf{B}$ 中造成的超精细能级分裂：

$$\Delta E = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

根据自旋及其磁矩之间的关系：

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m}\mathbf{S}$$

得到能级分裂：

$$\Delta E \propto \alpha_{em} \frac{\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{S}_p}{m_e m_p}$$

我们知道夸克和胶子都带色荷，QCD 色相互作用的基本顶点和 QED 电磁作用的基本顶点形式上一样，因此可以想象类似夸克的自旋磁矩，有一个具有强相互作用特性的色矩，夸克色矩之间的相互作用也将造成味道相同基态强子的能级分裂：

$$\Delta E \propto \alpha_s \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{m_1 m_2}$$

式中我们用 α_s 代替 α_{em} (准确地说应该是用 $\frac{4}{3}\alpha_s$ 代替 α_{em})，相当于用色荷代替电荷。$\mathbf{S}_1$ 和 $\mathbf{S}_2$ 是两个夸克的自旋，m_1 和 m_2 是它们的质量。当然粒子物理和原子物理不同，在原子物理中，分裂的能级仍然对应同一个粒子，它们是同一个粒子的不同状态。在粒子物理中，不同的能级称为不同的粒子。因此能级分裂也就是质量分裂。

基于上述考虑，强子的质量是由构成它们的夸克的质量再加上色矩之间的相互作用能。对于介子，质量公式为：

$$M_{q\overline{q}} = m_1 + m_2 + A\frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{m_1 m_2} \tag{3.8.9}$$

式中 A 是个常数。对于两个夸克的自旋，我们有：

$$\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 = \mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$

其中：

$$\mathbf{S}_1^2 = \mathbf{S}_2^2 = S_1(S_1+1) = \frac{3}{4}$$

因此：

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{S}^2 - \frac{3}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{4}, & 0^- \text{ 赝标介子} \\ +\frac{1}{4}, & 1^- \text{ 矢量介子} \end{cases}$$

于是介子质量公式为：

$$M_{q\overline{q}} = \begin{cases} m_1 + m_2 - \dfrac{3A}{4m_1 m_2}, & 0^- \text{ 赝标介子} \\ m_1 + m_2 + \dfrac{A}{4m_1 m_2}, & 1^- \text{ 矢量介子} \end{cases} \tag{3.8.10}$$

上式表明 0^- 赝标介子的质量比 1^- 矢量介子的质量轻，例如 $m_{\pi^+} < m_{\rho^+}$。这样我们可以通过选择夸克的不同质量，利用 (3.8.10) 式拟合实验测得的介子质量，从而得到参数 A。然后用选定的参数 A 代入 (3.8.10) 式预言其他介子质量。结果如表 3.3 所示，我们发现实验值和理论预言符合得很好。表中数据采用的参数为：

$$\begin{aligned} m_u &= m_d = 310\,\text{MeV} \\ m_s &= 483\,\text{MeV} \\ A &= 0.06\,\text{GeV}^3 \end{aligned}$$

表 3.3: 介子质量的理论预言和实验测量值。

介子	质量的理论值	质量的测量值
π	140	138
K	484	496
η	559	549
ρ	780	770
ω	780	782
K^*	896	894
ϕ	1032	1019

类似地有重子的质量公式：

$$M_{qqq} = m_1 + m_2 + m_3 + A'\left(\frac{\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2}{m_1m_2} + \frac{\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{S}_3}{m_2m_3} + \frac{\mathbf{S}_3\cdot\mathbf{S}_1}{m_3m_1}\right) \tag{3.8.11}$$

式中 A' 是个常数。

❍ 对于 N,Δ,Ω 等重子，它们的组份夸克质量一样 ($m_u \approx m_d$)，利用：

$$\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2\cdot\mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3\cdot\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{S}^2 - \mathbf{S}_1^2 - \mathbf{S}_2^2 - \mathbf{S}_3^2) = \begin{cases} +\frac{3}{4}, & \frac{3}{2}^+ \text{十重态重子} \\ -\frac{3}{4}, & \frac{1}{2}^+ \text{八重态重子} \end{cases}$$

得到 N,Δ,Ω 的质量：

$$\begin{aligned} M_N &= 3m_u - \frac{3A'}{4m_u^2} \\ M_\Delta &= 3m_u + \frac{3A'}{4m_u^2} \\ M_\Omega &= 3m_s + \frac{3A'}{4m_s^2} \end{aligned} \tag{3.8.12}$$

❍ 对于不同味组成的 $\frac{3}{2}^+$ 十重态重子 Σ^*,Ξ^*，它们的自旋波函数在任意交换两个夸克下对称，即：

$$(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_j)^2 = \mathbf{S}_i^2 + \mathbf{S}_j^2 + 2\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_j = 2$$

因此：

$$\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_2\cdot\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_3\cdot\mathbf{S}_1 = \frac{1}{4}$$

于是 Σ^*,Ξ^* 的质量为：

$$\begin{aligned} M_{\Sigma^*} &= 2m_u + m_s + \frac{A'}{4}\left(\frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_um_s}\right) \\ M_{\Xi^*} &= 2m_s + m_u + \frac{A'}{4}\left(\frac{1}{m_s^2} + \frac{2}{m_um_s}\right) \end{aligned} \tag{3.8.13}$$

❍ 对于 $\frac{1}{2}^+$ 八重态重子 Λ 和 Σ，它们由 u, d 两种夸克组成。前者 u, d 夸克组成同位旋为 1 的三重态 (即 u, d 味交换对称)。后者 u, d 夸克组成同位旋单态 (即 u, d 味交换反对称)。对于三个费米子组成的系统，色空间部分波函数在夸克交换下反对称，为了使得完整波函数反对称，其他部分的波函数 (即自旋空间波函数) 必须交换对称。所以 Λ 为自旋单态，即 $(\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_d)^2 = 0$，故 $\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d = -\frac{3}{4}$。于是得到 Λ 的质量公式：

$$M_\Lambda = 2m_u + m_s - \frac{3A'}{4m_u^2} \tag{3.8.14}$$

Σ 为自旋三重态，即 $(\mathbf{S}_u + \mathbf{S}_d)^2 = 2$，从而 $\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d = +\frac{1}{4}$。于是得到 Σ 的质量公式：

$$\begin{aligned} M_\Sigma &= 2m_u + m_s + A'\Big(\frac{\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d}{m_u^2} + \frac{(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_1) - \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_d}{m_u m_s}\Big) \\ &= 2m_u + m_s + \frac{A'}{4}\Big(\frac{1}{m_u^2} - \frac{4}{m_u m_s}\Big) \end{aligned} \tag{3.8.15}$$

❍ 对于 Ξ 八重态重子，它有两个 s 夸克，它们构成自旋三重态，只需在 Σ 公式中将 s 夸克和 u 夸克交换就可以得到 Ξ 的质量：

$$M - \Xi = 2m_s + m_u + \frac{A'}{4}\Big(\frac{1}{m_s^2} - \frac{4}{m_u m_s}\Big) \tag{3.8.16}$$

同样选择不同 $m_u/m_d, m_s$，拟合数据得到 A'，从而预言重子质量。结果如表 3.4 所示，我们再次发现实验值和理论预言符合得很好。表中数据采用的参数为：

$$\begin{aligned} m_u &= m_d = 363\,\text{MeV} \\ m_s &= 538\,\text{MeV} \\ A' &= 0.026\,\text{GeV}^3 \end{aligned}$$

表 3.4: 重子质量的理论预言和实验测量值。

重子	质量的理论值	质量的测量值
$N(p,n)$	939	939
Λ	1116	1114
Σ	1193	1179
Ξ	1318	1327
Δ	1232	1239
Σ^*	1384	1381
Ξ^*	1533	1529
Ω	1672	1682

3.9 味 SU(4) 多重态

在结束本章前我们把味 SU(3) 对称推广到味 SU(4)，此时味道空间需要加上粲数 C 维，因而是三维的。如果考虑 u, d, s, c 四种夸克和相应的四种反夸克，那么按照 SU(4) 群的

表示，介子的组成方式为：

$$4 \otimes 4 = 1 \oplus 15$$

即一个味 SU(4) 单态和一组 SU(4) 味十五重态。后者可以进一步分解为：

$$15 = 3 \oplus 8 \oplus 1 \oplus 3$$

它们可以在 Y, I_3, C 的三维空间中找到各自的位置，如图 3.20 所示，其中 $C = 0$ 的平面中的介子就是大家熟知的基态赝标介子和基态矢量介子。

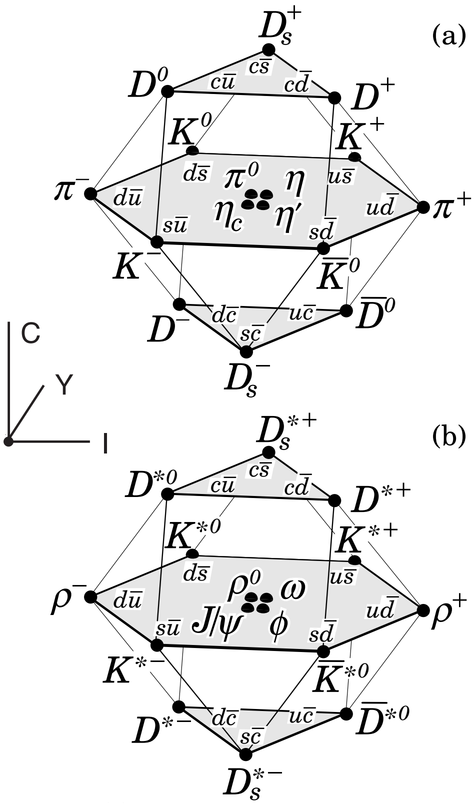


图 3.20: 味 SU(4) 介子。

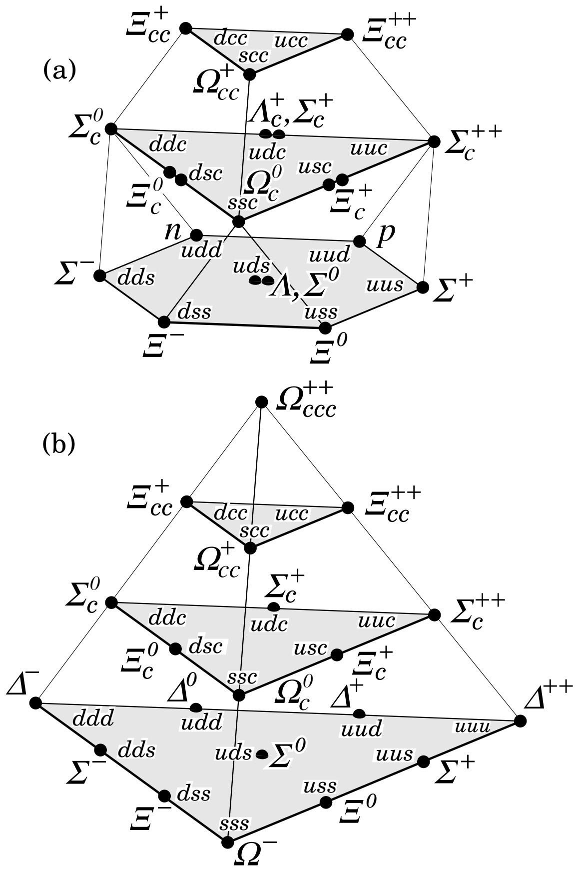


图 3.21: 味 SU(4) 重子。(a) 混合对称二十重态，(b) 完全对称二十重态。

类似地，重子超多重态的分解方式为：

$$4 \otimes 4 \otimes 4 = 4 \oplus 20' \oplus 20' \oplus 20$$

式中不带撇的不可约表示对于夸克味道交换是对称的，带撇的不可约表示对于味道交换是混合对称的。所有重子在 Y, I_3, C 的三维空间中都有各自相应的位置，如图 3.21 所示。关于 SU(4) 重子超多重态更多的讨论可参阅相关文献。由于 c 夸克质量远大于其他三种夸克的质量，因此 SU(4) 味对称性有很大破坏，对这些多重态质量分裂等不要过于较真。

第 4 章　粒子的相互作用

本章讨论粒子物理学中的电磁相互作用、强相互作用和弱相互作用，并浅显介绍有关这三种相互作用的 (非规范的) 理论。首先介绍自由粒子的 Dirac 方程及其平面波解。然后重点介绍电磁相互作用的量子电动力学，我们将关注三种具体反应过程：通过具体计算 $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ 湮灭过程的截面，了解利用 QED 费曼规则进行计算的基本方法；通过 e^-p 的弹性散射过程，研究核子的内部结构；通过 e^-p 的深度非弹性散射过程，讨论核子的部分子模型。接着讨论强相互作用的量子色动力学，了解它和 QED 的异同。最后讨论弱相互作用，它是自然界丰富多姿的根源。

4.1　Dirac 方程

我们首先简单介绍自由粒子的相对论 Klein-Gordon 方程，它是描写标量场的方程。然后重点讨论描述自由旋量场的 Dirac 方程及其平面波解，引入在今后的计算中很有用的螺旋度本征态的概念。我们不打算就场的量子化进行展开，这方面知识在各种量子场论书籍中有广泛讨论。

4.1.1　Klein-Gordon 方程

Klein-Gordon 方程是对时间和空间的二阶偏微分方程，可以通过对相对论质壳关系：

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \tag{4.1.1}$$

进行如下量子化：

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} \to -i\boldsymbol{\nabla}$$

得到。即质量为 m 的自由粒子的 Klein-Gordon 方程为：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (\boldsymbol{\nabla}^2 - m^2)\psi \tag{4.1.2}$$

利用四维偏微分矢量：

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right)$$

立即得到 Lorentz 协变的形式的 Klein-Gordon 方程：

$$\boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi = 0} \tag{4.1.3}$$

如果把确定能量 E 和动量 $\mathbf{p}$ 的平面波：

$$\psi = N e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)}$$

代入 Klein-Gordon 方程，得：

$$-E^2\psi = -\mathbf{p}^2\psi - m^2\psi$$

可见平面波是 Klein-Gordon 方程的一个解。上式表明：

$$E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

即自由粒子的 Klein-Gordon 方程有正能量解，也有负能量解。上式其实就是 (4.1.1) 式。我们可以用另外一种等价的方式来看上式。自由粒子的 Klein-Gordon 方程除了有如下形式的平面波解：

$$\psi = Ne^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}$$

也有如下形式的平面波解：

$$\psi = Ne^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}$$

现在上面两种形式的平面波中 $E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 恒为正。平面波解 $Ne^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}$ 是能量算符 $i\frac{\partial}{\partial t}$ 的本征值为 $-E$ 的本征态。这种解在非相对论 Schrödinger 方程中不存在，因为否则将产生非物理的解 $E = -\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$。

对 (4.1.2) 式取复共轭：

$$\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2} = (\nabla^2 - m^2)\psi^* \tag{4.1.4}$$

$\psi^* \times (4.1.2) - \psi \times (4.1.4)$，得到：

$$\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2} = \psi^*(\nabla^2 - m^2)\psi - \psi(\nabla^2 - m^2)\psi$$

或者：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) = \nabla\cdot(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

与连续性方程 (continuity equation) 比较：

$$\nabla\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

可得：

$$\rho = i\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$$

$$\mathbf{j} = i(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

其中虚数 i 的目的是保证概率密度是实数。把平面波解代入上式，得到：

$$\rho = 2|N|^2E, \qquad \mathbf{j} = 2|N|^2\mathbf{p} \tag{4.1.5}$$

粒子的概率密度与能量成正比，特别是能量为负时概率密度也为负[1]。Klein-Gordon 方程的负概率密度解促使 Dirac (1928 年) 去寻找另外一种相对论波动方程，结果就是 Dirac 方程。Dirac 方程不存在负概率密度问题，虽然也有负能量解，但是可以解释为带正能量的反粒子。后来 Pauli 和 Weisskopf (1934 年) 发现，如果把 Klein-Gordon 方程的波函数 ψ 理解为场算符，而不是自由粒子波函数，则量子化后的 Klein-Gordon 方程描述的是自旋为零的正反粒子。对 Dirac 方程作类似处理，发现它描述的是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的正反粒子。

式 (4.1.5) 中的概率密度 ρ 说明单位体积内有 $2E|N|^2$ 个粒子。其中的 $2E$ 正是我们在讨论 Lorentz 不变相空间时引入的因子。

[1] 自由粒子的非相对论 Schrödinger 方程的概率密度是 $|N|^2$ 恒为正。

4.1.2 Dirac 方程

为了避免自由粒子的 Klein-Gordon 方程出现负概率密度解的问题，Dirac 提出了自由粒子的 Dirac 方程，这是一个关于时间和空间的一阶偏微分方程：

$$\hat{H}\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \beta m)\psi \tag{4.1.6}$$

式中 $\hat{H}$ 是哈密顿算符，$\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ 是动量算符，m 是粒子质量，$\boldsymbol{\alpha}$ 和 β 是待定常数。把上式写成明显的分量形式：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + \beta m\right)\psi$$

进行平方运算：

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = \left(-i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + \beta m\right)\left(-i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + \beta m\right)\psi$$

展开后得到：

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = &-\alpha_x^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \alpha_y^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \alpha_z^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \beta^2 m^2\psi \\
&-(\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - (\alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_y)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} - (\alpha_x\alpha_z + \alpha_z\alpha_x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} \\
&-i(\alpha_x\beta + \beta\alpha_x)m\frac{\partial\psi}{\partial x} - i(\alpha_y\beta + \beta\alpha_y)m\frac{\partial\psi}{\partial y} - i(\alpha_z\beta + \beta\alpha_z)m\frac{\partial\psi}{\partial z}
\end{aligned}$$

由于自由粒子同时也必须满足 Klein-Gordon 方程：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - m^2\psi$$

为了使得上面两式一致，必须满足：

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1 \tag{4.1.7}$$

$$\alpha_j\beta + \beta\alpha_j = 0 \tag{4.1.8}$$

$$\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 0 \quad (j \neq k) \tag{4.1.9}$$

因此 α_j 和 β 不能是简单的数，它们相互反对易，且必须 (至少) 是 4×4 的矩阵。哈密顿算符 $\hat{H} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \beta m$ 是厄米的，这就要求 α_j 和 β 也必须厄米：

$$\boxed{\alpha_x^\dagger = \alpha_x, \qquad \alpha_y^\dagger = \alpha_y, \qquad \alpha_z^\dagger = \alpha_z, \qquad \beta^\dagger = \beta} \tag{4.1.10}$$

满足式 (4.1.7)－(4.1.10) 的 α_j 和 β 不是唯一的，一个方便的选择是：

$$\boxed{\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}} \tag{4.1.11}$$

式中 I 是 2×2 的单位矩阵，σ_j 是 2×2 的 Pauli 矩阵：

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.1.12}$$

可以证明所有物理量都和矩阵 α_j 和 β 的具体表示无关。既然 α_j 和 β 是 4×4 的矩阵，那么粒子的波函数 ψ 必须是四分量的，称为**双旋量 (bi-spinor)** 或者 **Dirac 旋量**：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

以后我们会看到 Dirac 旋量 ψ 不是一个四维矢量。它的四个分量中，两个分量对应自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子态，另外两个分量对应自旋为 $\frac{1}{2}$ 的反粒子态。为方便起见，我们把满足 Dirac 方程的自由粒子称为 Dirac 粒子。

4.1.3 概率密度和流

首先讨论 Dirac 方程所描述的概率密度和流。为此写出 Dirac 方程的分量形式：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\alpha_x\frac{\partial\psi}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial\psi}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial\psi}{\partial z} + \beta m\psi \tag{4.1.13}$$

取厄米共轭：

$$-i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t} = i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x}\alpha_x^\dagger + i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial y}\alpha_y^\dagger + i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial z}\alpha_z^\dagger + \psi^\dagger\beta^\dagger m \tag{4.1.14}$$

$\psi^\dagger\times(4.1.13)-(4.1.14)\times\psi$，并考虑到 α_j 和 β 均为厄米矩阵，可得：

$$\begin{aligned} i\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi =& \psi^\dagger\left(-i\alpha_x\frac{\partial\psi}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial\psi}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial\psi}{\partial z} + \beta m\psi\right) \\ & - \left(i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x}\alpha_x + i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial y}\alpha_y + i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial z}\alpha_z + \psi^\dagger\beta m\right)\psi \end{aligned}$$

上式左边为 $= i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi)$，右边利用如下关系式：

$$\begin{aligned} \psi^\dagger\alpha_x\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x}\alpha_x\psi &= \frac{\partial}{\partial x}(\psi^\dagger\alpha_x\psi) \\ \psi^\dagger\alpha_y\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial y}\alpha_y\psi &= \frac{\partial}{\partial y}(\psi^\dagger\alpha_y\psi) \\ \psi^\dagger\alpha_z\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial z}\alpha_z\psi &= \frac{\partial}{\partial z}(\psi^\dagger\alpha_z\psi) \end{aligned}$$

可以得到：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi) + \frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) = 0$$

定义概率密度 ρ 和流 $\mathbf{j}$：

$$\boxed{\rho \equiv \psi^\dagger\psi, \qquad \mathbf{j} \equiv \psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi} \tag{4.1.15}$$

得到连续性方程：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0$$

可见在 Dirac 方程中概率密度 $\rho = \psi^\dagger\psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$ 恒为正。

可以把 Dirac 方程写成更优美的形式。以 $-\beta$ 左乘 Dirac 方程 (4.1.13) 式：

$$-i\beta\frac{\partial\psi}{\partial t}=i\beta\alpha_x\frac{\partial\psi}{\partial x}+i\beta\alpha_y\frac{\partial\psi}{\partial y}+i\beta\alpha_z\frac{\partial\psi}{\partial z}-\beta^2 m\psi$$

引入 γ^μ 矩阵 (注意 γ^μ 是常数矩阵，不是矢量，因此无所谓写成上指标或下指标)：

$$\gamma^0\equiv\beta,\qquad \gamma^1\equiv\beta\alpha_x,\qquad \gamma^2\equiv\beta\alpha_y,\qquad \gamma^3\equiv\beta\alpha_z \tag{4.1.16}$$

利用 $\beta^2=1$，Dirac 方程可写为：

$$-i\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t}=i\gamma^1\frac{\partial\psi}{\partial x}+i\gamma^2\frac{\partial\psi}{\partial y}+i\gamma^3\frac{\partial\psi}{\partial z}-m\psi \tag{4.1.17}$$

由于

$$\gamma^\mu\partial_\mu=\gamma^0\partial_0+\gamma^1\partial_1+\gamma^2\partial_2+\gamma^3\partial_3=\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}+\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}+\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}+\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}$$

于是得到协变形式的 Dirac 方程:

$$\boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0} \tag{4.1.18}$$

根据 γ 矩阵定义，式 (4.1.7)、(4.1.8)、(4.1.9) 变为：

$$\begin{gathered}(\gamma^0)^2=1\\ (\gamma^1)^2=(\gamma^2)^2=(\gamma^3)^2=-1\\ \gamma^0\gamma^j+\gamma^j\gamma^0=0\\ \gamma^j\gamma^k+\gamma^k\gamma^j=0\ \ (j\neq k)\end{gathered}$$

上面这些关系式可以合并为一个反对易关系：

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\equiv\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu} \tag{4.1.19}$$

容易证明 γ^0 厄米，$\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3$ 反厄米：

$$\boxed{\gamma^{0\dagger}=\gamma^0,\qquad \gamma^{1\dagger}=-\gamma^1,\qquad \gamma^{2\dagger}=-\gamma^2,\qquad \gamma^{3\dagger}=-\gamma^3,} \tag{4.1.20}$$

γ 矩阵的具体形式也不是唯一的，通常选取 Pauli-Dirac 表示：

$$\boxed{\gamma^0=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix},\qquad \gamma^j=\begin{pmatrix}0&\sigma_j\\-\sigma_j&0\end{pmatrix}} \tag{4.1.21}$$

明显写出：

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\qquad \gamma^1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\gamma^2=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \gamma^3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

可以证明所有物理量都与 γ 矩阵的具体表示无关。

利用 γ 矩阵，概率密度 $\rho = \psi^\dagger \psi$ 和流 $\mathbf{j} = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi$ 可合写为四矢量流的形式：

$$j^\mu \equiv (\rho, \mathbf{j}) = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi$$

而连续性方程则为：

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

定义**伴随旋量 (adjoint spinnor)**：

$$\boxed{\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0} \tag{4.1.22}$$

写出其分量形式：

$$\overline{\psi} = (\psi^*)^T \gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

即 $\overline{\psi}$ 是一个 1×4 的行矩阵：

$$\boxed{\overline{\psi} = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*)}$$

利用伴随旋量 $\overline{\psi}$，四矢量流可写为：

$$\boxed{j^\mu = \overline{\psi} \gamma^\mu \psi}$$

注意 γ^μ 矩阵不是四矢量，它们只是 4×4 的常数矩阵，因而在 Lorentz 变换下不变。

4.1.4 Dirac 粒子的自旋

考虑系统哈密顿算符 $\hat{H}$ 和轨道角动量算符 $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$ 的对易关系：

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m, \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}] = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}] + [\beta m, \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}]$$

因为 βm 是常数矩阵，与 $\mathbf{r}$ 和 $\hat{\mathbf{p}}$ 无关，所以 $[\beta m, \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}] = 0$，于是：

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}]$$

考虑上式的 x 分量

$$[\hat{H}, \hat{L}_x] = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}, (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}})_x] = [\alpha_x \hat{p}_x + \alpha_y \hat{p}_y + \alpha_z \hat{p}_z, y p_z - z \hat{p}_y]$$

上式中除了 $[x, \hat{p}_x] = [y, \hat{p}_y] = [z, \hat{p}_z] = i$，其余算符均相互对易，因此有：

$$[\hat{H}, \hat{L}_x] = \alpha_y \hat{p}_z [\hat{p}_y, y] - \alpha_z \hat{p}_y [\hat{p}_z, z] = -i(\alpha_y \hat{p}_z - \alpha_z \hat{p}_y) = -i(\boldsymbol{\alpha} \times \hat{\mathbf{p}})_x$$

对 y, z 分量有相似的表达式，最后得到：

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = -i \boldsymbol{\alpha} \times \hat{\mathbf{p}} \tag{4.1.23}$$

所以轨道角动量算符 $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$ 与哈密顿算符 $\hat{H}$ 并不对易，表明它不是个运动常数。

引入如下 $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ 算符：

$$\hat{\mathbf{\Sigma}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} \tag{4.1.24}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 是 Pauli 算符。考虑系统哈密顿算符 $\hat{H}$ 和 $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ 算符的对易关系：

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{\Sigma}}] = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m, \hat{\mathbf{\Sigma}}] = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{\Sigma}}] + [\beta m, \hat{\mathbf{\Sigma}}]$$

由于

$$[\beta m, \hat{\mathbf{\Sigma}}] = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = 0$$

故有

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{\Sigma}}] = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{\Sigma}}]$$

同样计算上式的 x 分量：

$$[\hat{H}, \hat{\Sigma}_x] = [\alpha_x \hat{p}_x + \alpha_y \hat{p}_y + \alpha_x \hat{p}_z, \hat{\Sigma}_x] = \hat{p}_x [\alpha_x, \hat{\Sigma}_x] + \hat{p}_y [\alpha_y, \hat{\Sigma}_x] + \hat{p}_z [\alpha_z, \hat{\Sigma}_x]$$

利用 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\mathbf{\Sigma}$ 的表达式 (4.1.11)、(4.1.24) 式，计算可得：

$$\begin{aligned}
[\alpha_x, \hat{\Sigma}_x] &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_x & 0 \end{pmatrix} = 0 \\
[\alpha_y, \hat{\Sigma}_x] &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_y & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i\hat{\sigma}_z \\ -2i\hat{\sigma}_z & 0 \end{pmatrix} \\
&= -2i\alpha_z \\
[\alpha_z, \hat{\Sigma}_x] &= 2i\alpha_y
\end{aligned}$$

于是：

$$[\hat{H}, \hat{\Sigma}_x] = -2i\hat{p}_y \alpha_z + 2i\hat{p}_z \alpha_y = 2i(\boldsymbol{\alpha} \times \hat{\mathbf{p}})_x$$

对 y, z 分量有相似的表达式，最后得到：

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{\Sigma}}] = 2i\boldsymbol{\alpha} \times \hat{\mathbf{p}} \tag{4.1.25}$$

联立 (4.1.23) 式和 (4.1.25) 式，得到：

$$\left[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{\Sigma}}\right] = [\hat{H}, \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}] = [\hat{H}, \hat{\mathbf{J}}] = 0$$

其中：

$$\boxed{\hat{\mathbf{S}} \equiv \frac{1}{2}\hat{\mathbf{\Sigma}}, \qquad \hat{\mathbf{J}} \equiv \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}} \tag{4.1.26}$$

可见 $\hat{\mathbf{J}}$ 与哈密顿算符 $\hat{H}$ 对易，是个守恒量。算符 $\hat{\mathbf{S}}$ 满足角动量定义 $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hat{S}_z$ 等，是粒子的内禀角动量，即自旋。所以 $\hat{\mathbf{J}}$ 是粒子的总角动量。计算表明算符 $\hat{S}^2$ 和 $\hat{S}_z$ 都是对角化的：

$$\hat{S}^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

因此 $\hat{S}^2$ 和 $\hat{S}_z$ 对易，有本征值 $S(S+1) = \frac{3}{4}$ 和 $S_z = \pm\frac{1}{2}$。这表明 $\hat{\mathbf{S}}$ 描写自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子，如电子。可见 Dirac 方程自然地引入了粒子的自旋 $\frac{1}{2}$，是描写自旋为 $\frac{1}{2}$ 的自由粒子的相对论量子力学方程。

4.1.5　平面波解

现在求 Dirac 方程的平面波解，为此把波函数写成如下形式：

$$\boxed{\psi = u(E,\mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}} \tag{4.1.27}$$

式中 E、$\mathbf{p}$ 是常数参量，$u(E,\mathbf{p})$ 是满足 Dirac 方程的常数四分量旋量。对 ψ 求微分：

$$\partial_0\psi = -iE\psi, \qquad \partial_1\psi = ip_x\psi, \qquad \partial_2\psi = ip_y\psi, \qquad \partial_3\psi = ip_z\psi$$

代人 Dirac 方程 (4.1.17) 式，消去相位因子 $e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}$，得

$$(\gamma^0 E - \gamma^1 p_x - \gamma^2 p_y - \gamma^3 p_z - m)u = 0$$

或更紧凑的形式：

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0 \tag{4.1.28}$$

上式是用动量表示的 Dirac 方程，注意它不含微分。

首先考察静止的自由 Dirac 粒子，其波函数为：

$$\psi = u(E,0)e^{-iEt} \tag{4.1.29}$$

根据 (4.1.28) 式，当 $\mathbf{p}=0$ 时，有：

$$E\gamma^0 u - mu = 0$$

写出上式的明显形式：

$$E\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}$$

它有四个正交的解：

$$\underbrace{u_1(m,0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad u_2(m,0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{E=m}\qquad \underbrace{u_3(m,0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad u_4(m,0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{E=-m}$$

仍然存在负能量解，相应的波函数 (4.1.29) 式变为：

$$\underbrace{\psi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}e^{-imt},\quad \psi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}e^{-imt}}_{\text{两个 } E>0 \text{ 的自旋态}}\qquad \underbrace{\psi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}e^{+imt},\quad \psi_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}e^{+imt}}_{\text{两个 } E<0 \text{ 的自旋态}}$$

因为我们要求有完全的四个解，所以不能简单地认为 $E<0$ 的解是非物理的而丢弃。

现在求 Dirac 方程的一般解。注意到 (4.1.28) 式中括号里面的部分为：

$$\gamma^\mu p_\mu - m = \gamma^0 E - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} - m = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{p} - m\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E-m & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -E-m \end{pmatrix}$$

将之代入式 (4.1.28)，有：

$$\begin{pmatrix} E-m & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -E-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 u_A, u_B 均为二分量旋量，称为 **Weyl 旋量**。于是得到两个关于 u_A, u_B 的耦合方程：

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})u_B = (E-m)u_A \tag{4.1.30}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})u_A = (E+m)u_B \tag{4.1.31}$$

式中矩阵 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}$ 的具体形式为：

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} = \sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \tag{4.1.32}$$

若已求得一个独立的解 u_A，则 u_B 由方程 (4.1.31) 确定：

$$u_B = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}u_A = \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}u_A$$

而 u_A 可分别取为如下独立的解 (u_A 是任意的，不过总是可以选择简单的解)：

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 或 \quad u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是相应的 u_B 为：

$$u_B = \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \quad 或 \quad u_B = \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}$$

每组 $\binom{u_A}{u_B}$ 都是方程的解，这样得到两个独立解：

$$u_1(E,\mathbf{p}) = N_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, \qquad u_2(E,\mathbf{p}) = N_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \tag{4.1.33}$$

其中 N_1, N_2 是归一化因子。若 $\mathbf{p}=0$，则上式对应 $E>0$ 的粒子。

类似地，若已求得一个独立的解 u_B，则 u_A 由方程 (4.1.30) 确定：

$$u_A = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E-m}u_B = \frac{1}{E-m}\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}u_B$$

取 u_B 为如下独立的解：

$$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 或 \quad u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

相应的 u_A 为：

$$u_A = \frac{1}{E-m}\begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \quad 或 \quad u_A = \frac{1}{E-m}\begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}$$

于是又得到两个解：

$$u_3(E,\mathbf{p})=N_3\begin{pmatrix}\frac{p_z}{E-m}\\ \frac{p_x+ip_y}{E-m}\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\qquad u_4(E,\mathbf{p})=N_4\begin{pmatrix}\frac{p_x-ip_y}{E-m}\\ \frac{-p_z}{E-m}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\tag{4.1.34}$$

其中 N_3,N_4 是归一化因子。若 $\mathbf{p}=0$，则上式对应 $E<0$ 的粒子。

式 (4.1.34)、(4.1.34) 中的归一化因子 N 由 $\psi^\dagger\psi=u^\dagger u$ 确定，计算结果为：

$$u_1^\dagger u_1=u_2^\dagger u_2=|N_{1,2}|^2\frac{2E}{E+m},\qquad u_3^\dagger u_3=u_4^\dagger u_4=|N_{3,4}|^2\frac{2E}{E-m}$$

把上述 $u_i^\dagger u_i$ 归一化到 $2|E|$ 是方便的，即选择：

$$u_1^\dagger u_1=u_2^\dagger u_2=u_3^\dagger u_3=u_4^\dagger u_4=2|E|$$

对于 u_1 和 u_2，归一化因子为：

$$\begin{aligned}N_{1,2}&=\sqrt{E+m}\quad(E>0)\\ N_{1,2}&=\sqrt{-E-m}\quad(E<0)\end{aligned}\tag{4.1.35}$$

对于 u_3 和 u_4，归一化因子为：

$$\begin{aligned}N_{3,4}&=\sqrt{E-m}\quad(E>0)\\ N_{3,4}&=\sqrt{-E+m}\quad(E<0)\end{aligned}\tag{4.1.36}$$

因为参量 E 限于 $E>+m$ 或者 $E<-m$，所以归一化因子的平方根总是为实数。

至此，我们似乎得到了 Dirac 方程的四个独立的一般解。但是进一步分析发现，只有对 u_1、u_2 取 $E>0$ 的解，对 u_3、u_4 取 $E<0$ 的解，这四个解才确实是独立的。为了说明这一点，假设我们对所有 u_i 均取 $E=+\sqrt{p^2+m^2}>0$，这样对于 u_1、u_2，归一化因子取 $N=\sqrt{E+m}$，对于 u_3、u_4，归一化因子取 $N=\sqrt{E-m}$。球坐标系中动量为：

$$\mathbf{p}=(p_x,p_y,p_z)=(p\sin\theta\cos\phi,p\sin\theta\sin\phi,p\cos\theta)$$

利用 $p_x\pm ip_y=p\sin\theta e^{\pm i\phi}$，并注意 $p=\sqrt{E^2-m^2}=\sqrt{E+m}\sqrt{E-m}$，$u_i$ 可以写成：

$$u_1=\begin{pmatrix}\sqrt{E+m}\\ 0\\ \sqrt{E-m}\cos\theta\\ \sqrt{E-m}\sin\theta e^{i\phi}\end{pmatrix},\qquad u_2=\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{E+m}\\ \sqrt{E-m}\sin\theta e^{-i\phi}\\ -\sqrt{E-m}\cos\theta\end{pmatrix},$$

$$u_3=\begin{pmatrix}\sqrt{E+m}\cos\theta\\ \sqrt{E+m}\sin\theta e^{i\phi}\\ \sqrt{E-m}\\ 0\end{pmatrix},\qquad u_4=\begin{pmatrix}\sqrt{E+m}\sin\theta e^{-i\phi}\\ -\sqrt{E+m}\cos\theta\\ 0\\ \sqrt{E-m}\end{pmatrix}$$

从而发现 u_3 和 u_4 不是独立解，它们只是 u_1 和 u_2 的线性组合：

$$u_3=\cos\theta u_1+\sin\theta e^{i\phi}u_2,\qquad u_4=\sin\theta e^{-i\phi}u_1-\cos\theta u_2$$

所以，为了得到四个线性独立的解，必须同时考虑 $E>0$ 解和 $E<0$ 解。考虑到动量为零的 Dirac 粒子的解中 u_1,u_2 对应 $E=m>0$，u_3,u_4 对应 $E=-m<0$。因此传统的做法是对于 u_1 和 u_2 保留 $E=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}>0$ 解：

$$\boxed{\psi_1=u_1(E,\mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)},\qquad \psi_2=u_2(E,\mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}} \tag{4.1.37}$$

其中 $u_1(E,\mathbf{p})$ 和 $u_2(E,\mathbf{p})$ 由式 (4.1.33) 给出：

$$\boxed{u_1(E,\mathbf{p})=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{p_z}{E+m}\\\frac{p_x+ip_y}{E+m}\end{pmatrix},\qquad u_2(E,\mathbf{p})=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{p_x-ip_y}{E+m}\\\frac{-p_z}{E+m}\end{pmatrix}} \tag{4.1.38}$$

这时候 E 就是粒子能量。

对于 u_3 和 u_4 取 $E=-\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}<0$ 解。不过如果把 E 解释为能量，那么 $E<0$ 意味着粒子具有负能量。为此我们稍做变换。注意到 E、$\mathbf{p}$ 只是常数参数，如果我们改变它们的符号，则可以得到形式上 $E=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}>0$ 的平面波解。由式 (4.1.34) 得：

$$u_3(-E,-\mathbf{p})=N_3\begin{pmatrix}\frac{p_z}{E+m}\\\frac{p_x+ip_y}{E+m}\\1\\0\end{pmatrix},\qquad u_4(-E,-\mathbf{p})=N_4\begin{pmatrix}\frac{p_x-ip_y}{E+m}\\\frac{-p_z}{E+m}\\0\\1\end{pmatrix}$$

此时式中的归一化因子 $N_{3,4}=\sqrt{E+m}$。最后令：

$$v_1(E,\mathbf{p})=u_4(-E,-\mathbf{p}),\qquad v_2(E,\mathbf{p})=u_3(-E,-\mathbf{p})$$

于是得到另外两个线性独立解：

$$\boxed{\psi_3=v_1(E,\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)},\qquad \psi_4=v_2(E,\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)},} \tag{4.1.39}$$

其中 $v_1(E,\mathbf{p})$ 和 $v_2(E,\mathbf{p})$ 为：

$$\boxed{v_1(E,\mathbf{p})=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}\frac{p_x-ip_y}{E+m}\\\frac{-p_z}{E+m}\\0\\1\end{pmatrix},\qquad v_2(E,\mathbf{p})=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}\frac{p_z}{E+m}\\\frac{p_x+ip_y}{E+m}\\1\\0\end{pmatrix}} \tag{4.1.40}$$

注意此时的平面波解只是形式上有 $E>0$，实际上仍然是粒子的负能量 $(-E)$ 解，因为粒子能量算符 $i\frac{\partial}{\partial t}$ 的本征值为负值。

式 (4.1.39) 描述的是动量为 $-\mathbf{p}$、能量为 $-E=-\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}<0$、逆着时间方向自由运动 (因为指数因子 e^{iEt}) 的自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子，这种具有负能量的粒子在物理上是不可接受的。Stückelberg (1941年) 和 Feynman (1948年) 对它做了重新解释，认为它描述的是动量为 $\mathbf{p}$、能量为 $E=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}>0$、沿着时间方向运动的反粒子。

如果把 (4.1.39) 式表示的负能量的粒子解释为正能量的反粒子，则动量和能量须反号。而在变换 $(E,\mathbf{p})\to(-E,-\mathbf{p})$ 下，位置矢量 $\mathbf{r}$ 不变，轨道角动量 $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ 改变符号。为了保证总角动量 $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$ 守恒，即 $[H,\mathbf{L}+\mathbf{S}]=0$，自旋 $\mathbf{S}$ 必须改变符号。因此有：

$$E\to -E,\qquad \mathbf{p}\to-\mathbf{p},\qquad \mathbf{S}\to-\mathbf{S}$$

可见把式 (4.1.39) 表示的粒子解释为物理上的反粒子时，不仅需要对粒子的动量、能量反号，也需要对粒子的自旋 **S** 反号。这里我们讨论一个特例，假设粒子或反粒子沿着 z 向运动，于是其动量为 $\mathbf{p}=(0,0,p_z)$，旋量 u_1,u_2,v_1,v_2 为：

$$u_1=N\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{p_z}{E+m}\\0\end{pmatrix},\qquad u_2=N\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\frac{-p_z}{E+m}\end{pmatrix},\qquad v_1=N\begin{pmatrix}0\\\frac{-p_z}{E+m}\\0\\1\end{pmatrix},\qquad v_2=N\begin{pmatrix}\frac{p_z}{E+m}\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

其中 $N=\sqrt{E+m}$。计算表明上述旋量是 $S_z=\frac{1}{2}\Sigma_z$ 的本征值为 $\pm\frac{1}{2}$ 的本征态：

$$S_z u_1=+\frac{1}{2}u_1,\qquad S_z u_2=-\frac{1}{2}u_2 \tag{4.1.41}$$

$$S_z v_1=-\frac{1}{2}v_1,\qquad S_z v_2=+\frac{1}{2}v_2 \tag{4.1.42}$$

因此 u_1 和 u_2 分别描述自旋为 $S_z=+\frac{1}{2}$ 和 $S_z=-\frac{1}{2}$的正粒子。为了把 v_1 和 v_2 解释为描述反粒子的旋量，根据上面讨论，需要对粒子自旋反号 $\mathbf{S}\to-\mathbf{S}$，因此 v_1 和 v_2 分别表示自旋为 $S_z=+\frac{1}{2}$ 和 $S_z=-\frac{1}{2}$的反粒子。需要指出的是 (4.1.41)、(4.1.42) 式仅在粒子沿着 z 方向运动时才成立，一般情况下 u_1,u_2,v_1,v_2 并非自旋本征态。

第 4.1.1 节中我们提到 Klein-Gordon 方程的解是归一化到 $2E$ 的。本节中 Dirac 方程的解 u_1,u_2,v_1,v_2 也都是归一化到 $2E$ 的 (参阅 (4.1.35)、(4.1.36) 式)。这是因为 Dirac 粒子或反粒子的概率密度为：

$$\rho=\overline{\psi}(p)\gamma^0\psi(p)=2E$$

事实上，自由 Dirac 粒子或反粒子的流 j^μ 满足：

$$j^\mu=\overline{\psi}(p)\gamma^\mu\psi(p)=\overline{u}(p)\gamma^\mu u(p)=\overline{v}(p)\gamma^\mu v(p)=2p^\mu$$

注意概率密度具有能量的量纲。量子场论的拉格朗日密度中经常包含 $\overline{\psi}\psi$ 或 $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ 这些量，需考虑它们的量纲。

4.1.6 螺旋度本征态

一般情况下，Dirac 方程的解 u_1,u_2,v_1,v_2 不是自旋本征态，除非粒子沿着 z 方向运动。因此它们不是特别有用。我们需要用好量子数标记 Dirac 粒子的状态。回忆第 2.3.2 节中定义的螺旋度，即粒子或反粒子自旋在运动方向的投影：

$$h\equiv\frac{2\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}=\frac{\Sigma\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}=\begin{pmatrix}\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}&0\\0&\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\end{pmatrix}$$

无论是 Dirac 粒子还是 Dirac 反粒子都有两个螺旋度本征态。如果螺旋度为 $h=+1$，则称之为右手的，用 RH 表示。如果螺旋度 $h=-1$，则称之为左手的，用 LH 表示。

如果 Dirac 粒子或反粒子沿着 $\pm z$ 向运动，$p^\mu=(E,0,0,p_z)$，则 u_i、v_i 是螺旋度本征态。当运动沿着 $+z$ 方向 ($p_z>0$) 时，u_1,u_2,v_1,v_2 的螺旋度本征值分别是 $+1,-1,+1,-1$。当运动沿着 $-z$ 方向 ($p_z<0$) 时，u_1,u_2,v_1,v_2 的螺旋度本征值分别是 $-1,+1,-1,+1$。如图 4.1 所示。

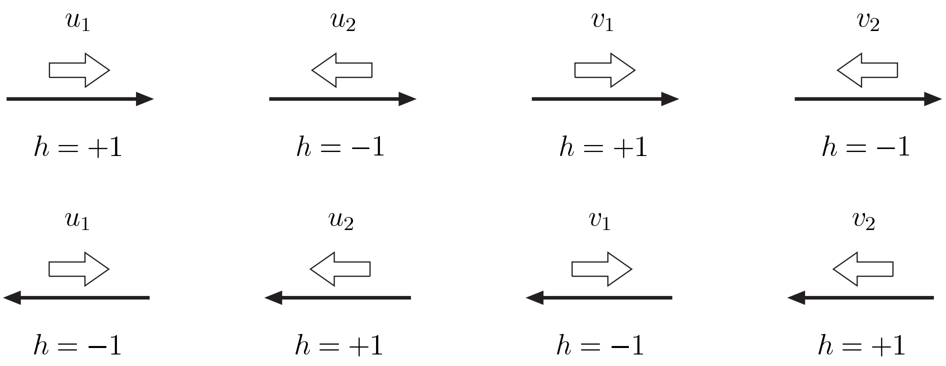


图 4.1: Dirac 粒子或反粒子沿着 $\pm z$ 运动时 u_1, u_2, v_1, v_2 的螺旋度本征值。

一般情况下 u_1, u_2, v_1, v_2 不是螺旋度本征态。设 Dirac 粒子或反粒子沿着任意方向 (θ,ϕ) 运动，如图 4.2 所示。则其四动量为 $p^\mu = (E, p\sin\theta\cos\theta, p\sin\theta\sin\phi, p\cos\theta)$。计算表明，对于粒子，其相应于 $h = +1$ 和 $h = -1$ 的螺旋度本征态为：

$$u_\uparrow(p) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\\ \frac{p}{E+m}\cos\frac{\theta}{2}\\ \frac{p}{E+m}e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},\qquad u_\downarrow(p) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\ e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\\ \frac{p}{E+m}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\frac{p}{E+m}e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \tag{4.1.43}$$

对于反粒子，其相应于 $h = +1$ 和 $h = -1$ 的螺旋度本征态为：

$$v_\uparrow(p) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix}\frac{p}{E+m}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\frac{p}{E+m}e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2}\\ e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},\qquad v_\downarrow(p) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix}\frac{p}{E+m}\cos\frac{\theta}{2}\\ \frac{p}{E+m}e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \tag{4.1.44}$$

显然：

$$u_\uparrow, u_\downarrow, v_\uparrow, v_\downarrow \xrightarrow{\theta=0} u_1, u_2, v_1, v_2$$
$$u_\uparrow, u_\downarrow, v_\uparrow, v_\downarrow \xrightarrow{\theta=\pi} u_2, -u_1, -v_2, v_1$$

在计算跃迁矩阵元时，使用旋量 u_1, u_2, v_1, v_2 或者螺旋度本征态旋量 $u_\uparrow, u_\downarrow, v_\uparrow, v_\downarrow$ 给出相同的结果。不过使用螺旋度本征态的优点在于它们明显给出了参与相互作用的粒子的自旋结构。

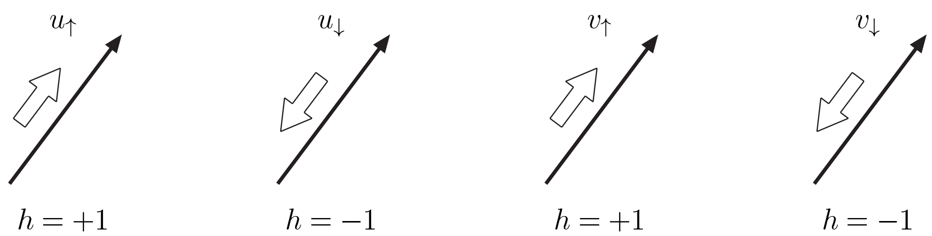


图 4.2: Dirac 粒子或反粒子沿着任意方向运动时 $u_\uparrow, u_\downarrow, v_\uparrow, v_\downarrow$ 的螺旋度本征值。

4.2 量子电动力学

量子电动力学是描写电子场和电磁场之间相互作用的量子场论。前面我们详细讨论了电子的 Dirac 旋量，发现 Dirac 方程可以自然地引入电子自旋。本节首先介绍电磁场的描述，了解电磁场量子 — 光子的极化。然后通过介绍最小电磁耦合原理，计算电子和电磁场作用的不变矩阵元，并引入量子电动力学的费曼规则。注意我们的讨论方法只关注量子电动力学的物理内容，没有具体涉及量子场论。

4.2.1 电磁场和规范不变

在 Heaviside-Lorentz 单位制中，$\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$，真空中的 Maxwell 方程组可写为：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \qquad & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \qquad & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \end{aligned}$$

电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 可以用标势 ϕ 和矢势 $\mathbf{A}$ 表示：

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

我们知道电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{j}$ 组成一个四维矢量流 $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$，$\phi$ 和 $\mathbf{A}$ 也组成一个四维势矢量 $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$。上式表明电场和磁场是势关于时空的微商。可以通过协变微分算符 ∂_μ 和四维势 A^μ，把电场和磁场统一写成一个 Lorentz 协变的量。这正是经典电动力学中的反对称电磁场强度张量 $F^{\mu\nu}$：

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2.1}$$

利用电磁场强，Maxwell 方程组可以写成如下协变形式：

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{4.2.2}$$

联立 (4.2.1)、(4.2.2) 两式，得到：

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = j^\nu \tag{4.2.3}$$

或者写为：

$$\Box^2 A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \tag{4.2.4}$$

式中 $\Box^2 = \partial_\mu \partial^\mu$ 是 d'Alembertian 算符。把 ∂_ν 作用在 (4.2.3) 式两边，得到：

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0$$

上式正是连续性方程，说明电荷守恒。

如果对电磁场作如下规范变换：

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\end{aligned}$$

或者写为四维形式：

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$$

其中 $\chi = \chi(t, \mathbf{x})$ 是时空的任意可微函数，那么在这种变换下，电磁场强不变：

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \chi) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \chi) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

容易证明 Maxwell 方程组 (4.2.3) 式也是不变的。这就是电磁场的规范不变性。电磁场的规范不变给我们以选择规范的自由。例如可以选择 Lorentz 规范：

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{4.2.5}$$

此时 Maxwell 方程组 (4.2.4) 式变为：

$$\boxed{\Box^2 A^\mu = j^\mu} \tag{4.2.6}$$

有了 Lorentz 规范后，还可以进一步作如下规范变换：

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \tag{4.2.7}$$

其中 $\Lambda(t, \mathbf{x})$ 是满足下列条件的任意函数：

$$\Box^2 \Lambda = 0 \tag{4.2.8}$$

显然 (4.2.6) 式保持不变，且 Lorentz 规范仍然成立：

$$\partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) = \partial^\mu A_\mu + \Box^2 \Lambda = \partial^\mu A_\mu = 0$$

4.2.2 光子的极化

对于自由光子，$j^\mu = 0$，关于势 A^μ 的方程 (4.2.6) 变为：

$$\boxed{\Box^2 A^\mu = 0} \tag{4.2.9}$$

注意上式采用了 Lorentz 条件。式 (4.2.9) 的解为：

$$A^\mu = \epsilon^\mu(q) e^{-iq\cdot x} \tag{4.2.10}$$

其中 ϵ^μ 是光子的四维**极化矢量 (polarization vector)**，q^μ 是它的四维动量。把 (4.2.10) 式代入 (4.2.9) 式，得到：

$$\begin{aligned}0 = \Box^2 A^\mu = \partial^\nu \partial_\nu \left(\epsilon^\mu e^{-iq\cdot x}\right) &= \epsilon^\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} e^{-iq_\lambda x^\lambda} \\ &= \epsilon^\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \cdot (-iq_\nu) e^{-iq_\lambda x^\lambda} = \epsilon^\mu \cdot (-iq^\nu) \cdot (-iq_\nu) e^{-iq_\lambda x^\lambda} \\ &= -q^2 \epsilon^\mu e^{-iq\cdot x}\end{aligned}$$

因此

$$q^2 = 0$$

上式表明自由 (实) 光子是没有质量的。

但是势方程的解 (4.2.10) 有四个分量，它如何描述自旋为 1 的矢量光子的三个极化方向？首先考虑到势方程 (4.2.9) 式满足 Lorentz 条件，即：

$$0 = \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu\left(\epsilon^\mu e^{-iq\cdot x}\right) = \epsilon^\mu \partial_\mu\left(e^{-iq\cdot x}\right) = \epsilon^\mu \cdot (-iq_\mu) e^{-iq\cdot x}$$

因此 Lorentz 条件给出如下约束：

$$q_\mu \epsilon^\mu = 0 \tag{4.2.11}$$

故 ϵ^μ 有三个独立分量。其次我们还有另一个规范变换 (4.2.7) 式 $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial\Lambda$，如果我们选择：

$$\Lambda = iae^{-iq\cdot x}$$

式中 a 是常数。容易证明 Λ 满足 (4.2.8) 式 $\Box^2\Lambda = 0$。于是规范变换 (4.2.7) 式为：

$$\begin{aligned} A'_\mu = A_\mu + \partial\Lambda &= \epsilon_\mu e^{-iq\cdot x} + ia\partial_\mu\left(e^{-iq\cdot x}\right) = \epsilon_\mu e^{-iq\cdot x} + ia\cdot(-iq_\mu)e^{-iq\cdot x} \\ &= (\epsilon_\mu + aq_\mu)e^{-iq\cdot x} \end{aligned}$$

即电磁场的势在如下变换下不变：

$$\epsilon_\mu \quad \to \quad \epsilon'_\mu = \epsilon_\mu + aq_\mu$$

这表明两个相差为 q_μ 倍数的极化矢量 ϵ_μ 和 ϵ'_μ 描写的是同一个光子。通常选择 a 使得光子的极化矢量的时间分量为零 (也就是取 Coulomb 规范)：

$$\epsilon^\mu = (0, \boldsymbol{\epsilon})$$

于是 (4.2.11) 式给出：

$$\boxed{\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{q} = 0}$$

即无质量的实光子只有两个独立的极化分量，两者均垂直光子运动方向。

如果光子沿着 z 方向运动，那么可以选择这两个极化态为：

$$\epsilon_1^\mu = (0,1,0,0), \qquad \epsilon_2^\mu = (0,0,1,0) \tag{4.2.12}$$

这称为**平面极化 (plane polarization)**。也可以取它们的线性组合：

$$\epsilon_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-i,0), \qquad \epsilon_+^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0) \tag{4.2.13}$$

称为**圆极化 (circular polarization)**。可以证明圆极化态 ϵ_- 对应光子自旋沿 $-z$ 的极化态 $S_z = -1$，ϵ_+ 对应光子自旋沿 $+z$ 的极化态 $S_z = +1$。特别是，当光子沿着 $+z$ 方向运动时，$\epsilon_-(\epsilon_+)$ 是螺旋度为 $h = -1$ ($h = +1$) 的左手 (右手) 光子。若光子沿着 $-z$ 方向运动，则螺旋度相反。

4.2.3 最小电磁耦合

在经典电动力学中，荷电量为 q 的带电粒子在电磁场中的运动方程可以通过最小电磁耦合得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A} \\ E &\rightarrow E - q\phi \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

例如质量为 m 的非相对论自由粒子的能动量关系为：

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

作 (4.2.14) 式所示的替换：

$$E - q\phi = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m}$$

于是哈密顿量为：

$$H = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\phi$$

根据该哈密顿量可以得到 Lorentz 力公式：

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

在量子力学中，最小电磁耦合仍然适用。此时 (4.2.14) 式可写为：

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu$$

或者考虑到 $p^\mu = i\partial^\mu$，把上式写为：

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + iqA^\mu$$

把上式代入自由粒子的 Dirac 方程 (4.1.18) 式：

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

得到：

$$\boxed{\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu)\psi - m\psi = 0} \tag{4.2.15}$$

这就是带电量为 q、自旋为 $\frac{1}{2}$ 的 Dirac 粒子，例如电子在电磁场中的运动方程。

我们把上式中的时间分量分离出来：

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi - q\gamma^\mu A_\mu \psi - m\psi = 0$$

或者

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = m\psi - i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla\psi + q\gamma^\mu A_\mu \psi$$

注意 $i\frac{\partial}{\partial t} = \hat{H}$，两边乘以 γ^0，得到：

$$\hat{H}\psi = \underbrace{(\gamma^0 m - i\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla})\psi}_{\text{质量和动能}} + \underbrace{q\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu \psi}_{\text{势能}}$$

上式中第二项就是电子在电磁场中的势能 (注意其中第零分量 $q\gamma^0\gamma^0 A_0 = q\phi$)：

$$\boxed{\hat{V}_D = q\gamma^0\gamma^\mu A_\mu} \tag{4.2.16}$$

其中 A_μ 是满足 Lorentz 条件的光子四维势，由 (4.2.10) 式确定：

$$A_\mu = \epsilon_\mu^{(\lambda)} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}$$

可见电子势能中必须计及光子极化，例如计及平面极化 (也可以是圆极化)：

$$\epsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

这使得问题变得复杂。

4.2.4 不变跃迁矩阵元

在第1.5.1 节中我们讨论过反应过程 $a+b \to c+d$，如图 4.3 (左) 所示，它的不变跃迁矩阵元为：

$$\mathcal{M} = g_a \frac{1}{q^2 - m_X^2} g_b = \langle \psi_c | V | \psi_a \rangle \frac{1}{q^2 - m_X^2} \langle \psi_d | V | \psi_b \rangle$$

可以把该处理方法应用到电磁相互作用过程，例如：

$$e^- \ + \ \tau^- \ \to \ e^- \ + \ \tau^-$$

如图 4.3 (右) 所示。

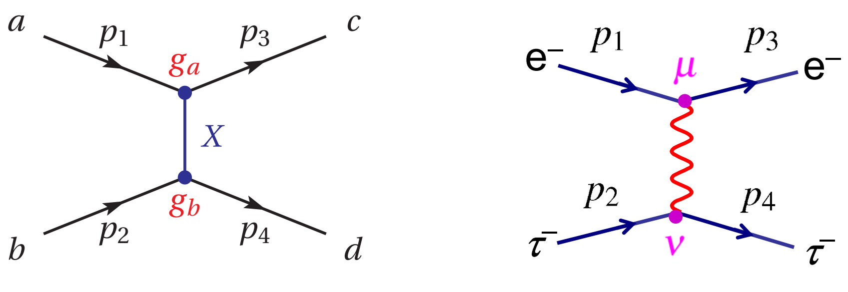


图 4.3: 反应过程 $a+b \to c+d$ (左)，和电磁相互作用过程 $e^- + \tau^- \to e^- + \tau^-$。

注意在计算 QED 不变跃迁矩阵元时同样要对所有时间顺序过程求和，e, τ 等自旋 $\frac{1}{2}$ 费米子和反费米子的波函数用 Dirac 旋量 u 和 v 等表示，它们在电磁场中的势能用 (4.2.16) 式所示的 $\hat{V}_D$，同时必须对电磁场传播子 — 光子的所有极化态求和。综合上述考虑后，不变跃迁矩阵元为：

$$\mathcal{M} = \underbrace{\left[u_e^\dagger(p_3) q_e \gamma^0 \gamma^\mu u_e(p_1)\right]}_{e^- \text{ 和 } \gamma \text{ 的相互作用}} \underbrace{\sum_\lambda \frac{\epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)*}}{q^2}}_{\gamma \text{ 传播子，极化态求和}} \underbrace{\left[u_\tau^\dagger(p_4) q_\tau \gamma^0 \gamma^\nu u_\tau(p_2)\right]}_{\tau^- \text{ 和 } \gamma \text{ 的相互作用}} \tag{4.2.17}$$

式中对虚光子的极化求和必须考虑所有分量，即：

$$\epsilon^{(0)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \epsilon^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

计算结果为 (不是很明显，参考 Griffiths 第 229 页)：

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} \epsilon_{\nu}^{(\lambda)*} = -g_{\mu\nu} \tag{4.2.18}$$

利用伴随旋量定义：

$$\overline{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{0}$$

把上述两式代入 (4.2.17) 式，得到：

$$\boxed{\mathscr{M} = [\overline{u}_e(p_3) q_e \gamma^{\mu} u_e(p_1)] \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} [\overline{u}_{\tau}(p_4) q_{\tau} \gamma^{\nu} u_{\tau}(p_2)]} \tag{4.2.19}$$

不变矩阵元 (4.2.19) 式是一个非常简洁的表达式。可以说量子电动力学的物理已基本包含在上式中！

考虑到 $\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi = \overline{u}\gamma^{\mu}u$ 是一个四维矢量流，我们可以定义两个四维矢量流：

$$j_e^{\mu} = \overline{u}_e(p_3)\gamma^{\mu} u_e(p_1), \qquad j_{\tau}^{\nu} = \overline{u}_{\tau}(p_4)\gamma^{\nu} u_{\tau}(p_2)$$

于是 (4.2.19) 式可以进一步写为：

$$\mathscr{M} = -q_e q_{\tau} \frac{j_e \cdot j_{\tau}}{q^2}$$

上式表明跃迁矩阵元 $\mathscr{M}$ 是Lorentz 不变的 (正如我们所预期的)，电磁相互作用过程的形式表现为一种**流流相互作用 (current-current interaction)**。

4.2.5 QED 费曼规则

上面得到的结果 (4.2.19) 式包含了不少复杂内容，例如对所有时序过程求和，对所有虚光子极化求和等。假设有一种新的电磁相互作用过程，我们不希望再次重复以上计算。幸运的是这确实是可以避免的，事实上量子场论中发展了一套简单的费曼规则，可以直接写出跃迁矩阵元。我们不加证明地列出 QED 的基本费曼规则，如图 4.4 所示。

不变矩阵元是所有基本费曼因子的乘积：

$$-i\mathscr{M} = \text{product of all factors} \tag{4.2.20}$$

在作乘积时，注意几点：

1. 对于每个电磁流必须先写入射反粒子或出射粒子的伴随旋量 ($\overline{v}$ 或 $\overline{u}$)，接着是顶点因子，最后写入射粒子或出射反粒子的旋量 (u 或 v)；
2. 不同顶点要用不同的指标，例如 μ, ν；
3. 传播子的 $g_{\mu\nu}$ 用来连接不同电磁流顶点。

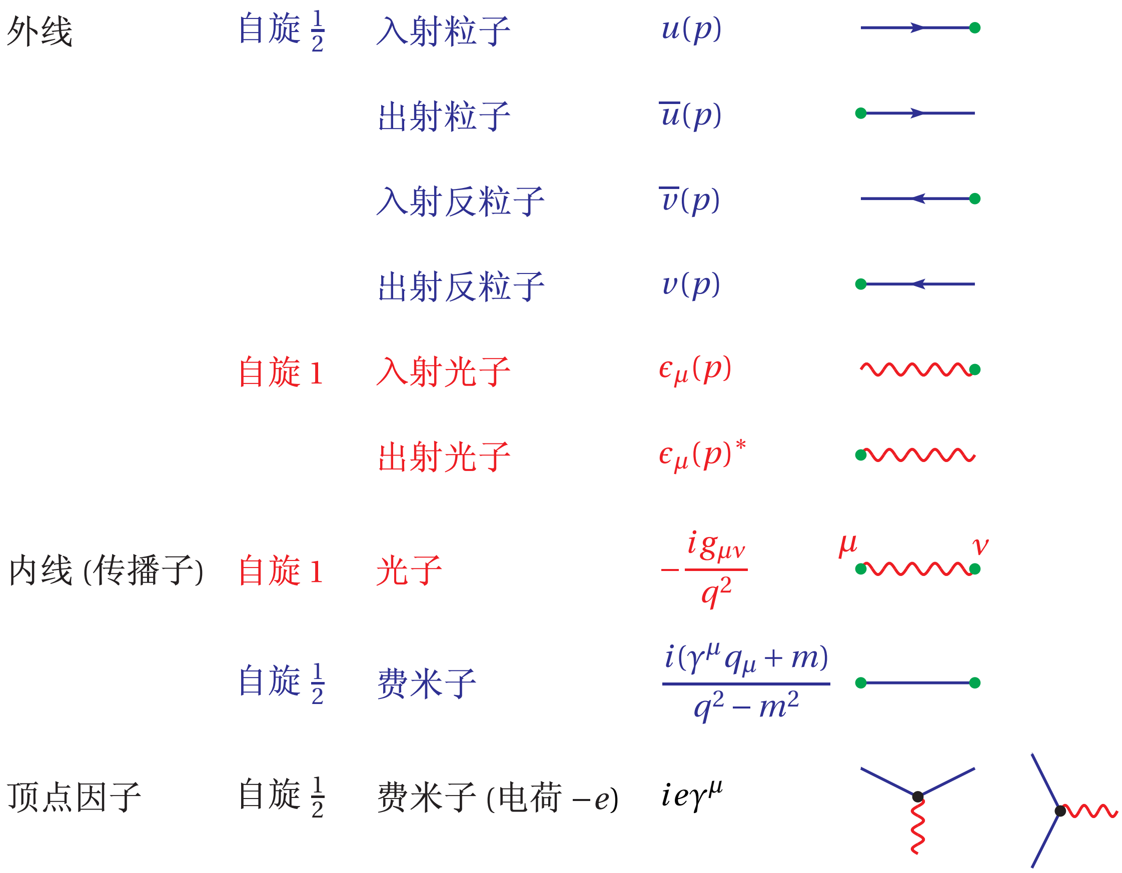
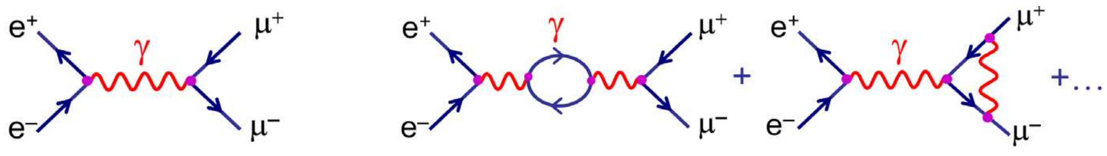

外线
自旋 $\frac{1}{2}$
入射粒子 $u(p)$
出射粒子 $\overline{u}(p)$
入射反粒子 $\overline{v}(p)$
出射反粒子 $v(p)$
自旋 1
入射光子 $\epsilon_\mu(p)$
出射光子 $\epsilon_\mu(p)^*$
内线 (传播子)
自旋 1
光子 $-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$
μ
ν
自旋 $\frac{1}{2}$
费米子 $\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}$
顶点因子
自旋 $\frac{1}{2}$
费米子 (电荷 $-e$) $ie\gamma^\mu$

图 4.4: QED 费曼规则。

4.3 $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ 湮灭过程

本节以 $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ 湮灭过程为例，讨论如何具体计算 QED 反应过程中的散射截面 (或衰变过程的衰变率)。我们首先给出计算的一般步骤：

1. 画出所有可能的费曼图。例如 $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ 湮灭过程只有一个最低阶或领头阶费曼图，但是有很多次领头阶费曼图：



$M \propto e^2 \propto \alpha_{em}$ $\qquad\qquad$ $M \propto e^4 \propto \alpha_{em}^2$

2. 对于每个费曼图，利用费曼规则写出跃迁矩阵元。

3. 对所有跃迁矩阵元 (即散射振幅) 求和，这意味着具有相同末态但是不同中间态的各种费曼图将发生干涉：

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 + \cdots$$

然后取模的平方：

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = (\mathcal{M}_1^* + \mathcal{M}_2^* + \mathcal{M}_3^* + \cdots)(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 + \cdots)$$

这相当于给出了全部微扰展开。由于 QED 过程中 $\alpha \sim \frac{1}{137}$，一般只需要考虑最低阶费曼图。

4. 利用第 2.2 节中得到的公式计算散射过程的截面或衰变过程的跃迁速率。如果是两体衰变过程 $a \to 1+2$，则衰变率为：

$$\Gamma = \frac{p^*}{32\pi^2 m_a^2}\int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \mathrm{d}\Omega \tag{4.3.1}$$

如果是两体反应过程 $1+2 \to 3+4$，则在质心系中和实验室系中的散射截面为：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega^*} = \frac{1}{64\pi^2 s}\frac{|\mathbf{p}_f^*|}{|\mathbf{p}_i^*|}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{4.3.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{64\pi^2}\left(\frac{1}{M + E_1 - E_1\cos\theta}\right)^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{64\pi^2}\left(\frac{E_3}{ME_1}\right)^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{4.3.3}$$

其中 (4.3.3) 式适用于高能量反应的情形，即忽略入射粒子质量。

5. 对于两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的 Dirac 粒子的散射，每个初态粒子均有两种自旋态，故初态共有 $2\times2=4$ 种可能的自旋态。同样地末态也有 4 种可能的自旋态。因此初末态总共有 $4\times4=16$ 种可能的自旋 (或螺旋态) 组合，意味着对于这 16 种螺旋态组合，都要计算跃迁矩阵元 $\mathcal{M}_{fi}$。如果初末态粒子都是非极化的，那么在计算散射截面时需要对末态的螺旋度态求和，对初态的螺旋度态求平均：

$$\boxed{\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{4}\left(|\mathcal{M}_{\text{LL}\to\text{LL}}|^2 + |\mathcal{M}_{\text{LL}\to\text{LR}}|^2 + \cdots\right)} \tag{4.3.4}$$

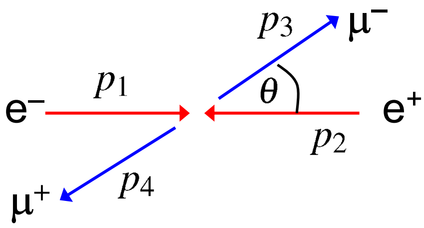
其中下标 L 和 R 等表示初、末态粒子所处的螺旋度本征态是左手和右手等。将上式代入 (4.3.2)、(4.3.3) 式得到对自旋平均后的微分截面。

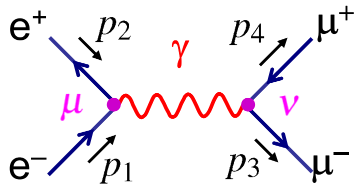
4.3.1　电子流和 μ 子流

在质心系中，我们假设初态 e^- 沿着 $+z$ 方向入射，末态 μ^- 沿着与 $+z$ 夹角为 θ 的方向出射，则 $e^-+e^+\to\mu^-+\mu^+$ 湮灭过程每个粒子的四动量为：

$$p_1=(E,0,0,p)\qquad p_2=(E,0,0,-p)$$
$$p_3=(E,\mathbf{p})\qquad p_4=(E,-\mathbf{p})$$

虚光子的四维动量是 $q=p_1+p_2=p_3+p_4$。





我们只考虑 QED 领头阶费曼图。把 QED 费曼规则直接应用到该过程：

入射 e^-：	$u(p_1)$	出射 μ^-：	$\overline{u}(p_3)$
入射 e^+：	$\overline{v}(p_2)$	出射 μ^+：	$v(p_4)$
光子传播子：	$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$		
$e^-e^+\gamma$ 顶点因子：	$ie\gamma^\mu$	$\mu^-\mu^+\gamma$ 顶点因子：	$ie\gamma^\nu$

这些因子按规则乘积就得到 Lorentz 不变的跃迁矩阵元 $\mathcal{M}_{fi}$:

$$-i\mathcal{M}_{fi}=[\overline{v}(p_2)ie\gamma^\mu u(p_1)]\cdot\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\cdot[\overline{u}(p_3)ie\gamma^\nu v(p_4)]$$

我们定义如下电子流 j_e 和 μ 子流 j_μ:

$$\begin{aligned}(j_e)^\mu&=\overline{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\\(j_\mu)^\nu&=\overline{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4)\end{aligned}\tag{4.3.5}$$

于是跃迁矩阵元正比于 j_e 和 j_μ 的标量积：

$$\mathcal{M}_{fi}=-\frac{e^2}{q^2}(j_e\cdot j_\mu)\tag{4.3.6}$$

显然 $\mathcal{M}_{fi}$ 是个数，一旦知道了初态粒子和末态粒子的自旋，就可以计算出来。如前面所述，通常需要计算 16 种螺旋态组合的跃迁矩阵元 (4.3.6) 式。不过在极端相对论情形下，只有 4 种螺旋态组合给出不为零的跃迁矩阵元 (参阅第 4.3.2 节)。此时 $E\gg m$，粒子质量可以忽略，螺旋度本征态 (4.1.43) 和 (4.1.44) 式变为：

$$\begin{aligned}u_\uparrow(p)&=\sqrt{E}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\\\cos\frac{\theta}{2}\\e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},\qquad u_\downarrow(p)=\sqrt{E}\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\\\sin\frac{\theta}{2}\\-e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\\v_\uparrow(p)&=\sqrt{E}\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\-e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\\-\sin\frac{\theta}{2}\\e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},\qquad v_\downarrow(p)=\sqrt{E}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\\\cos\frac{\theta}{2}\\e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

定义：

$$C = \cos\frac{\theta}{2}, \qquad S = \sin\frac{\theta}{2} \tag{4.3.8}$$

则 (4.3.7) 式变为：

$$\begin{aligned} u_\uparrow(p) &= \sqrt{E}\begin{pmatrix} C \\ e^{i\phi}S \\ C \\ e^{i\phi}S \end{pmatrix}, \qquad u_\downarrow(p) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} -S \\ e^{i\phi}C \\ S \\ -e^{i\phi}C \end{pmatrix} \\ v_\uparrow(p) &= \sqrt{E}\begin{pmatrix} S \\ -e^{i\phi}C \\ -S \\ e^{i\phi}C \end{pmatrix}, \qquad v_\downarrow(p) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} C \\ e^{i\phi}S \\ C \\ e^{i\phi}S \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

❍ 初态 e^- 的螺旋度态可以是左手或右手 $(\theta = 0)$：

$$u_\uparrow(p_1) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_\downarrow(p_1) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4.3.10}$$

❍ 初态 e^+ 的螺旋度态也可以是左手或右手 $(\theta = \pi)$：

$$v_\uparrow(p_2) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_\downarrow(p_2) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.3.11}$$

❍ 末态 μ^- 的两个螺旋度本征态由 (4.3.9) 式中令 $\phi = 0$ 得到 $(\theta, 0)$：

$$u_\uparrow(p_3) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} C \\ S \\ C \\ S \end{pmatrix}, \qquad u_\downarrow(p_3) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} -S \\ C \\ S \\ -C \end{pmatrix} \tag{4.3.12}$$

❍ 末态 μ^+ 的两个螺旋度本征态由 (4.3.9) 式中作替换 $\theta \to \pi - \theta$, $\phi \to \pi$ 得到 $(\pi - \theta, \pi)$：

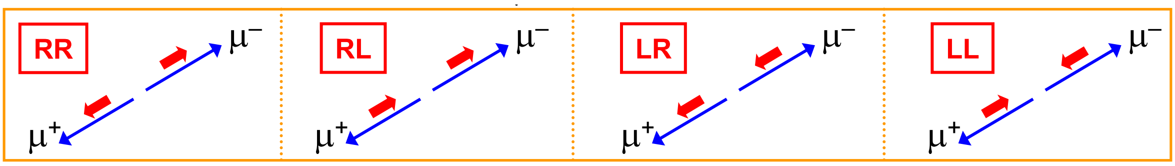
$$v_\uparrow(p_4) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} C \\ S \\ -C \\ -S \end{pmatrix}, \qquad v_\downarrow(p_4) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} S \\ -C \\ S \\ -C \end{pmatrix} \tag{4.3.13}$$

4.3.2 螺旋度守恒

现在我们具体计算 μ 子流 $(j_\mu)^\mu = \overline{u}(p_3)\gamma^\mu v(p_4)$。总有四种组合：

$$
\begin{aligned}
\mu_R^-\mu_R^+: &\quad \overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu v_\uparrow(p_4)\\
\mu_R^-\mu_L^+: &\quad \overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu v_\downarrow(p_4)\\
\mu_L^-\mu_R^+: &\quad \overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu v_\uparrow(p_4)\\
\mu_L^-\mu_L^+: &\quad \overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu v_\downarrow(p_4)
\end{aligned}
$$

其中下标 L、R 指的是 μ^- 或 μ^+ 的螺旋度。我们把 μ^- 的螺旋态放在前面，μ^+ 的螺旋态放在后面，则 $\mu^-\mu^+$ 螺旋态的四种组合 RR, RL, LR, LL 如下图所示。



对于任意两个旋量 ψ 和 ϕ，它们的分量为 ψ_i 和 ϕ_i，利用 γ^μ 矩阵的具体形式，可得矩阵相乘 $\overline{\psi}\gamma^\mu\phi$ 的各分量为：

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi}\gamma^0\phi &= \psi_1^*\phi_1+\psi_2^*\phi_2+\psi_3^*\phi_3+\psi_4^*\phi_4\\
\overline{\psi}\gamma^1\phi &= \psi_1^*\phi_4+\psi_2^*\phi_3+\psi_3^*\phi_2+\psi_4^*\phi_1\\
\overline{\psi}\gamma^2\phi &= -i(\psi_1^*\phi_4-\psi_2^*\phi_3+\psi_3^*\phi_2-\psi_4^*\phi_1)\\
\overline{\psi}\gamma^3\phi &= \psi_1^*\phi_3-\psi_2^*\phi_4+\psi_3^*\phi_1-\psi_4^*\phi_2
\end{aligned}
\tag{4.3.14}
$$

我们以 $\mu_L^-\mu_R^+$ 组合为例。此时 μ^- 为左手，$\psi = u_\downarrow(p_3)$，μ^+ 为右手，$\phi = v_\uparrow(p_4)$，代入 (4.3.14) 式，利用 (4.3.12)、(4.3.13) 式，可得：

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^0 v_\uparrow(p_4) &= E(-SC+CS-SC+CS)=0\\
\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^1 v_\uparrow(p_4) &= E(S^2-C^2+S^2-C^2) \quad = 2E(S^2-C^2) = -2E\cos\theta\\
\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^2 v_\uparrow(p_4) &= -iE(S^2+C^2+S^2+C^2) \quad = -2iE\\
\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^3 v_\uparrow(p_4) &= E(SC+CS+SC+CS) \quad = 4ESC \quad = 2E\sin\theta
\end{aligned}
$$

于是 μ 子流的 $\mu_L^-\mu_R^+$ 组合是：

$$
\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu v_\uparrow(p_4) = 2E(0,-\cos\theta,-i,\sin\theta)
$$

类似地可以得到 μ 子流的其他组合。在极端相对论情形下，四种可能的 μ 子流为：

$$
\begin{aligned}
\mu_R^-\mu_R^+: &\quad \overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu v_\uparrow(p_4) = (0,0,0,0)\\
\mu_R^-\mu_L^+: &\quad \overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu v_\downarrow(p_4) = 2E(0,-\cos\theta,i,\sin\theta)\\
\mu_L^-\mu_R^+: &\quad \overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu v_\uparrow(p_4) = 2E(0,-\cos\theta,-i,\sin\theta)\\
\mu_L^-\mu_L^+: &\quad \overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu v_\downarrow(p_4) = (0,0,0,0)
\end{aligned}
\tag{4.3.15}
$$

上式表明，对于 μ 子流，只有 $\mu_R^-\mu_L^+$ 和 $\mu_L^-\mu_R^+$ 这两个组合不为零。这个结果对于电子流也成立。事实上，在高能 (即极端相对论) 电磁相互作用过程中，虚光子产生的费

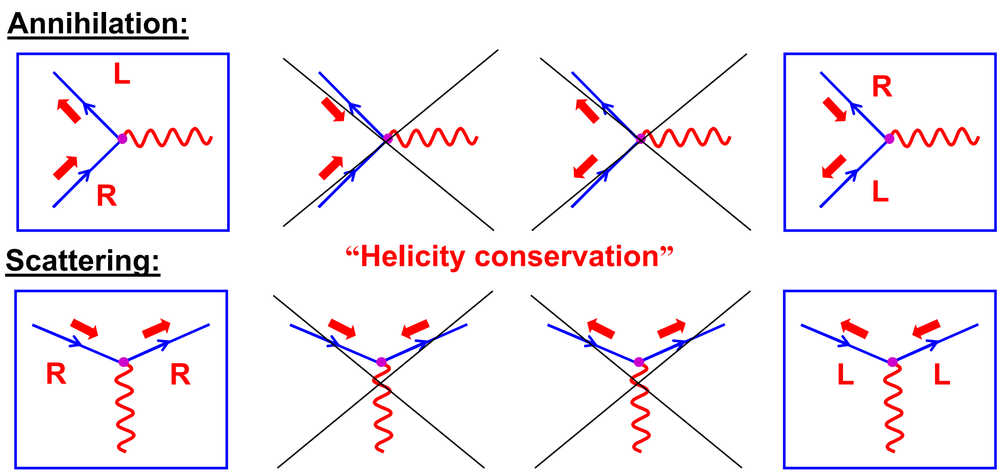


图 4.5: 高能反应过程中螺旋度守恒允许的顶点图。(上) 湮灭过程，(下) 散射过程。

米子对，或者湮灭到虚光子的费米子对，满足**螺旋度守恒 (helicity conservation)**，如图 4.5 (上) 所示。图 4.5 (下) 给出的则是高能费米子散射过程中允许的顶点图。极端相对论情形下的螺旋度守恒在弱相互作用和强相互作用过程中也同样适用，不过对于弱相互作用，有贡献的螺旋度组合更少 (参阅第 4.7.4 节)。

下面计算电子流 $(j_e)^\mu = \overline{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)$，计算方法和上面 $(j_\mu)^\mu$ 的完全一样。事实上电子流 $\overline{v}\gamma^\mu u$ 可以直接由 μ 子流 $\overline{u}\gamma^\mu v$ 的复共轭得到。这是因为：

$$
\begin{aligned}
[\overline{u}(p_a)\gamma^\mu v(p_b)]^* &= [\overline{u}(p_a)\gamma^\mu v(p_b)]^\dagger \\
&= [u^\dagger(p_a)\gamma^0\gamma^\mu v(p_b)]^\dagger && \text{因为 } \overline{u} \equiv u^\dagger\gamma^0 \\
&= v^\dagger(p_b)\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}u(p_a) && \text{因为 } (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \\
&= v^\dagger(p_b)\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 u(p_a) && \text{因为 } \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \\
&= v^\dagger(p_b)\gamma^0\gamma^\mu u(p_a) && \text{因为 } \gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\nu \\
&= \overline{v}(p_b)\gamma^\mu u(p_a) && \text{因为 } \overline{v} \equiv v^\dagger\gamma^0
\end{aligned}
$$

所以，取 (4.3.15) 式的复共轭：

$$
\begin{aligned}
\overline{v}_\uparrow(p_4)\gamma^\mu u_\uparrow(p_3) &= [\overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu v_\uparrow(p_4)]^* = (0,0,0,0) \\
\overline{v}_\downarrow(p_4)\gamma^\mu u_\uparrow(p_3) &= [\overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu v_\downarrow(p_4)]^* = 2E(0,-\cos\theta,-i,\sin\theta) \\
\overline{v}_\uparrow(p_4)\gamma^\mu u_\downarrow(p_3) &= [\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu v_\uparrow(p_4)]^* = 2E(0,-\cos\theta,i,\sin\theta) \\
\overline{v}_\downarrow(p_4)\gamma^\mu u_\downarrow(p_3) &= [\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu v_\downarrow(p_4)]^* = (0,0,0,0)
\end{aligned}
$$

对上式令 $\theta = 0$，作替换 $p_3 \to p_2$，$p_4 \to p_1$，得到四种可能的电子流：

$$
\begin{aligned}
e_R^+e_R^-: &\quad \overline{v}_\uparrow(p_2)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = (0,0,0,0) \\
e_L^+e_R^-: &\quad \overline{v}_\downarrow(p_2)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1) = 2E(0,-1,-i,0) \\
e_R^+e_L^-: &\quad \overline{v}_\uparrow(p_2)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = 2E(0,-1,i,0) \\
e_L^+e_L^-: &\quad \overline{v}_\downarrow(p_2)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = (0,0,0,0)
\end{aligned}
\tag{4.3.16}
$$

正如预期的，只有满足螺旋度守恒的两种电子流不为零。

4.3.3 手征和手征守恒

在具体计算 $e^- + e^+ \to \mu^-\mu^+$ 湮灭过程的截面之前，我们介绍一个与螺旋度有关的很重要的物理量。为此引入矩阵：

$$\boxed{\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}} \tag{4.3.17}$$

把 γ^5 矩阵的本征态定义为右手**手征本征态 (chiral eigenstates)** 和左手手征本征态：

$$u_R, \qquad u_L, \qquad v_R, \qquad v_L$$

即手征本征态满足：

$$\begin{aligned} \gamma^5 u_R &= +u_R, & \gamma^5 u_L &= -u_L \\ \gamma^5 v_R &= -v_R, & \gamma^5 v_L &= -v_L \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

定义右手**投影算符 (projection operator)** P_R 和左手投影算符 P_L：

$$\boxed{\begin{aligned} P_\mathrm{R} &\equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} \\ P_\mathrm{L} &\equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \end{aligned}} \tag{4.3.19}$$

则投影算符将投影出手征本征态：

$$\boxed{\begin{matrix} P_\mathrm{R}u_R = u_R, & P_\mathrm{R}u_L = 0, & P_\mathrm{R}v_R = 0, & P_\mathrm{R}v_L = v_L \\ P_\mathrm{L}u_R = 0, & P_\mathrm{L}u_L = u_L & P_\mathrm{L}v_R = v_R, & P_\mathrm{L}v_L = 0 \end{matrix}} \tag{4.3.20}$$

例如右手投影算符投影出粒子的右手手征态和反粒子的左手手征态。有了手征本征态和手征投影算符，任意旋量 ψ 总是可以分解为：

$$\psi = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi + \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi = P_\mathrm{R}\psi + P_\mathrm{L}\psi \equiv \psi_\mathrm{R} + \psi_\mathrm{L}$$

其中 ψ_R 和 ψ_L 称为旋量 ψ 的右手手征分量和左手手征分量：

$$\begin{aligned} \psi_\mathrm{R} &\equiv P_\mathrm{R}\psi = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi \\ \psi_\mathrm{L} &\equiv P_\mathrm{L}\psi = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi \end{aligned}$$

下面讨论电磁相互作用中的手征。我们知道 QED 中的费米子流为：

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\phi$$

把旋量分解为右手和左手手征分量：

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\phi = (\overline{\psi}_\mathrm{R} + \overline{\psi}_\mathrm{L})\gamma^\mu(\phi_\mathrm{R} + \phi_\mathrm{L}) = \overline{\psi}_\mathrm{R}\gamma^\mu\phi_\mathrm{R} + \overline{\psi}_\mathrm{R}\gamma^\mu\phi_\mathrm{L} + \overline{\psi}_\mathrm{L}\gamma^\mu\phi_\mathrm{R} + \overline{\psi}_\mathrm{L}\gamma^\mu\phi_\mathrm{L}$$

利用 γ^5 矩阵的性质：

$$\left(\gamma^5\right)^2 = 1, \qquad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5, \qquad \gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5 \tag{4.3.21}$$

容易得到：

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}_{\rm R}\gamma^\mu\phi_{\rm L} &= \frac{1}{4}\overline{\psi}(1-\gamma^5)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\phi = 0\\
\overline{\psi}_{\rm L}\gamma^\mu\phi_{\rm R} &= \frac{1}{4}\overline{\psi}(1+\gamma^5)\gamma^\mu(1+\gamma^5)\phi = 0
\end{aligned}$$

因此 QED 费米子流为：

$$\boxed{\overline{\psi}\gamma^\mu\phi = \overline{\psi}_{\rm R}\gamma^\mu\phi_{\rm R} + \overline{\psi}_{\rm L}\gamma^\mu\phi_{\rm L}} \tag{4.3.22}$$

上式表明在 QED 中，费米子的右手手征分量 $\psi_{\rm R}$ 只与费米子的右手手征分量 $\phi_{\rm R}$ 耦合，费米子的左手征分量 $\psi_{\rm L}$ 也只与费米子的左手手征分量 $\phi_{\rm L}$ 耦合，或者说电磁相互作用过程中费米子的**手征守恒 (chirality conservation)**。注意这个结论是普遍成立的。

最后讨论极端相对论 ($E \gg m$ 或者粒子质量为零) 情形。容易验证，此时 (4.3.9) 式给出的螺旋度本征态 $u_\uparrow, u_\downarrow, v_\uparrow, v_\downarrow$ 也是算符 γ^5 的本征态：

$$\begin{aligned}
\gamma^5 u_\uparrow &= +u_\uparrow, \qquad \gamma^5 u_\downarrow = -u_\downarrow\\
\gamma^5 v_\uparrow &= -v_\uparrow, \qquad \gamma^5 v_\downarrow = +v_\downarrow
\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

因此在极端相对论情形下：

$$u_R \equiv u_\uparrow, \qquad u_L \equiv u_\downarrow, \qquad v_R \equiv v_\uparrow, \qquad v_L \equiv v_\downarrow \tag{4.3.24}$$

即手征本征态等于螺旋度本征态。正因如此，手征守恒才等价于螺旋度守恒，并导致 μ 子流 (和电子流) 中的四种螺旋态组合中只有两种不为零。注意在一般情况下，手征本征态和螺旋度本征态并不相等。费米子的手征守恒是普遍的结果，而螺旋度守恒只适用于极端相对论情形。

4.3.4　截面计算结果

根据上一节中的讨论结果，极端相对论情形下 μ 子流和电子流各有两种不为零的螺旋态组合，因此只需要计算四种跃迁矩阵元。把 μ 子流 (4.3.15) 式和电子流 (4.3.16) 式代入跃迁矩阵元表达式 (4.3.6) 式：

$$\mathscr{M}_{fi}=-\frac{e^2}{q^2}(j_e\cdot j_\mu)$$

注意湮灭过程中：

$$s=(p_1+p_2)^2=q^2$$

得到四种允许的跃迁矩阵元：

$$\begin{aligned}
e_{\rm L}^+e_{\rm R}^-\to\mu_{\rm R}^-\mu_{\rm L}^+: &\qquad \mathscr{M}_{\rm RR}=-\frac{e^2}{s}\cdot 2E(0,-1,-i,0)\cdot 2E(0,-\cos\theta,+i,\sin\theta)\\
e_{\rm L}^+e_{\rm R}^-\to\mu_{\rm L}^-\mu_{\rm R}^+: &\qquad \mathscr{M}_{\rm RL}=-\frac{e^2}{s}\cdot 2E(0,-1,-i,0)\cdot 2E(0,-\cos\theta,-i,\sin\theta)\\
e_{\rm R}^+e_{\rm L}^-\to\mu_{\rm R}^-\mu_{\rm L}^+: &\qquad \mathscr{M}_{\rm LR}=-\frac{e^2}{s}\cdot 2E(0,-1,+i,0)\cdot 2E(0,-\cos\theta,+i,\sin\theta)\\
e_{\rm R}^+e_{\rm L}^-\to\mu_{\rm L}^-\mu_{\rm R}^+: &\qquad \mathscr{M}_{\rm LL}=-\frac{e^2}{s}\cdot 2E(0,-1,+i,0)\cdot 2E(0,-\cos\theta,-i,\sin\theta)
\end{aligned}\tag{4.3.25}$$

式中跃迁矩阵元 $\mathscr{M}_{\rm X_1X_2}$ 的下标 $\rm X_1,X_2$ 分别代表初态 e^- 和末态 μ^- 的螺旋度。这四种允许的跃迁矩阵元如图 4.6 所示。

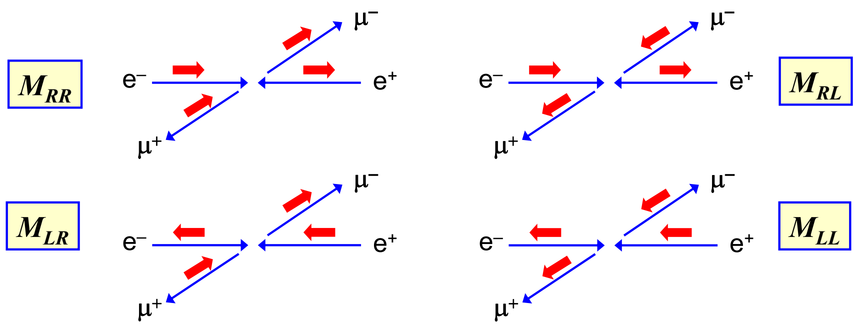


图 4.6: $e^-+e^+\to\mu^-+\mu^+$ 湮灭过程中允许的四种矩阵元。

我们以 (4.3.25) 式中的最后一个矩阵元 $\mathscr{M}_{\rm LL}$ 为例进行计算。在极端相对论情形下，初态和末态粒子的四动量是：

$$\begin{aligned}
p_1&=(E,0,0,E) & p_2&=(E,0,0,-E)\\
p_3&=(E,E\sin\theta,0,E\cos\theta) & p_4&=(E,-E\sin\theta,0,-E\cos\theta)
\end{aligned}\tag{4.3.26}$$

由于 $p_1+p_2=(2E,0,0,0)$，因此 $s=(p_1+p_2)^2=4E^2$。于是：

$$\mathscr{M}_{\rm LL}=-\frac{e^2}{s}\cdot 4E^2(\cos\theta+1)=-4\pi\alpha(1+\cos\theta)$$

式中 $\alpha=\frac{e^2}{4\pi}$ 为精细结构常数。上式模的平方为：

$$|\mathscr{M}_{\rm LL}|^2=(4\pi\alpha)^2(1+\cos\theta)^2$$

其他矩阵元的模方同样可得，结果是：

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{\mathrm{RR}}|^2 = |\mathcal{M}_{\mathrm{LL}}|^2 = (4\pi\alpha)^2(1+\cos\theta)^2 \\
|\mathcal{M}_{\mathrm{RL}}|^2 = |\mathcal{M}_{\mathrm{LR}}|^2 = (4\pi\alpha)^2(1-\cos\theta)^2
\end{aligned}
\tag{4.3.27}
$$

这些不为零的矩阵元的模方如图 4.7 所示。

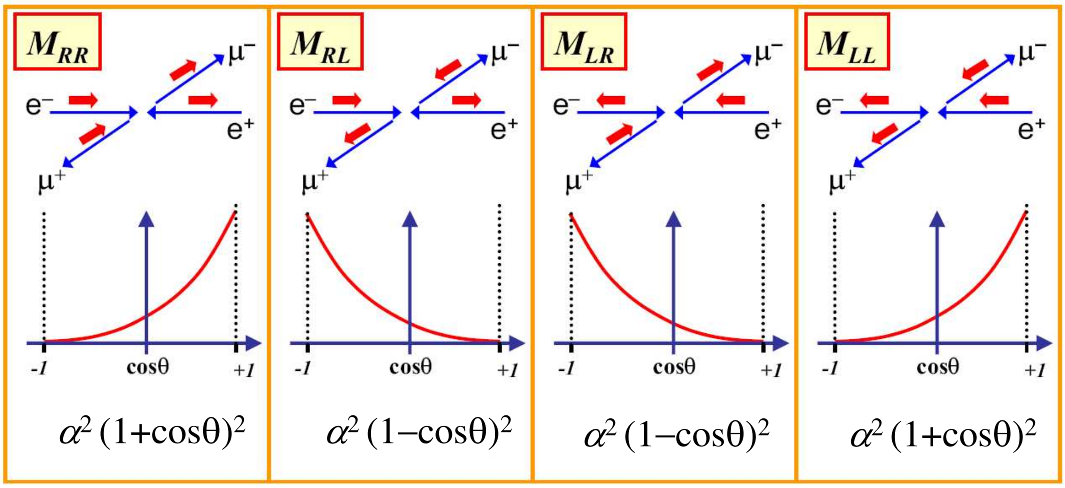


图 4.7: $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ 湮灭过程中的四种矩阵元计算结果。

把 (4.3.27) 式代入 (4.3.4) 式，得到跃迁矩阵元模方的自旋平均值 (即对末态的自旋态求和，对初态的自旋态求平均)：

$$
\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\mathrm{spin}}|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{4}\left(|\mathcal{M}_{\mathrm{LL}\to\mathrm{LL}}|^2 + |\mathcal{M}_{\mathrm{LL}\to\mathrm{LR}}|^2 + \cdots\right)
$$

再代入质心系的散射截面公式 (4.3.2) 式，得到微分截面：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{64\pi^2 s}\left(|\mathcal{M}_{\mathrm{RR}}|^2 + |\mathcal{M}_{\mathrm{RL}}|^2 + |\mathcal{M}_{\mathrm{LR}}|^2 + |\mathcal{M}_{\mathrm{LL}}|^2\right) \\
&= \frac{(4\pi\alpha)^2}{256\pi^2}\left[2(1+\cos\theta)^2 + 2(1-\cos\theta^2)\right]
\end{aligned}
$$

即高能情形下 $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ 湮灭过程的微分截面为：

$$
\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos\theta)^2}
\tag{4.3.28}
$$

如果想得到总截面，还需对角度积分。结果是：

$$
\boxed{\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}}
\tag{4.3.29}
$$

微分散射截面的实验结果和理论计算的比较如图 4.8 所示。

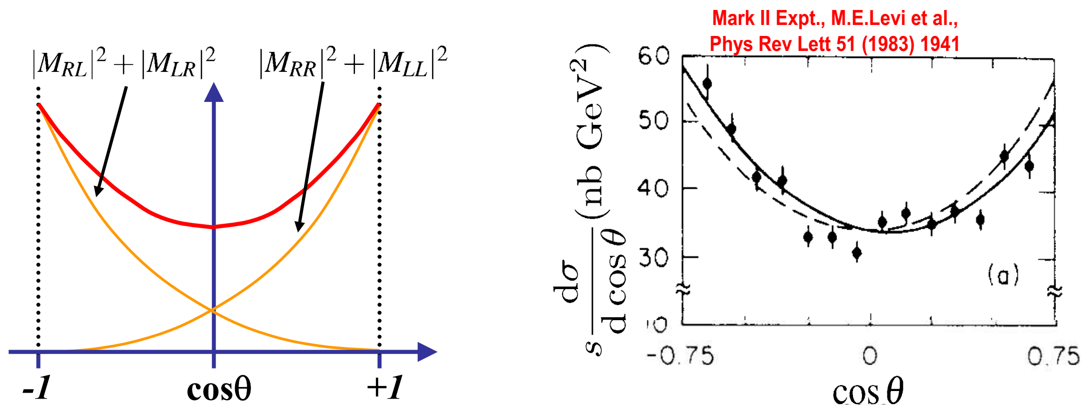


图 4.8: $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ 湮灭过程的微分散射截面。(左) 对末态的自旋态求和，初态的自旋态求平均的效果，(右) 数据点是 Mark II 组的实验结果，虚线为纯 QED 计算结果 (到次领头阶 $O(\alpha^3)$，实线为考虑 QED 和 Z^0 贡献后的微分截面。

讨论：

- 微分散射截面是 Lorentz 不变的。但是 (4.3.28) 式是根据质心系中的角度给出的。我们希望把 $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ 写成参考系无关的形式，即用 Lorentz 不变的四矢量的标量积来明确表示。根据 (4.3.26) 式，可得：

$$
\begin{aligned}
p_1 \cdot p_2 &= 2E^2 \\
p_1 \cdot p_3 &= E^2(1-\cos\theta) \\
p_1 \cdot p_4 &= E^2(1+\cos\theta)
\end{aligned}
$$

于是矩阵元模方的自旋平均可写为：

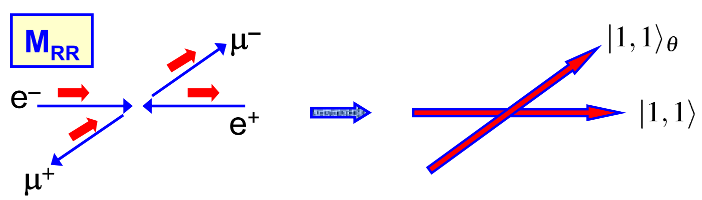
$$
\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = 2e^4 \frac{(p_1\cdot p_3)^2 + (p_1\cdot p_4)^2}{(p_1\cdot p_2)^2} \tag{4.3.30}
$$

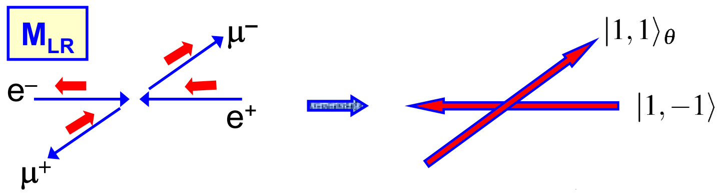
- 跃迁矩阵元模方的角度依赖关系 (4.3.27) 式可以用量子力学中的自旋波函数来理解。对于由两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子组成的系统，总自旋为 $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$，它有四个可能的自旋本征态 s_z，即三个是自旋三重态，一个是自旋单态。由于极端相对论情形下螺旋度守恒，要求 e^- 和 e^+ 的相互作用发生在系统 $s_z = \pm 1$ 的自旋态，即总自旋沿着 z 轴，为 $|1,+1\rangle$ 和 $|1,-1\rangle$。类似地，产生的 μ 子对的总自旋也为 1，沿着出射粒子 μ^- 的运动方向 θ。例如：

  对于 $\mathcal{M}_{\rm RR}$，e^-e^+ 处在自旋 $|1,+1\rangle$ 态，$\mu^-\mu^+$ 处在自旋 $|\psi\rangle = |1,1\rangle_\theta$ 态
  对于 $\mathcal{M}_{\rm LR}$，e^-e^+ 处在自旋 $|1,-1\rangle$ 态，$\mu^-\mu^+$ 处在自旋 $|\psi\rangle = |1,1\rangle_\theta$ 态

  因此：

$$
\mathcal{M}_{\rm RR} \propto \langle\psi|1,+1\rangle, \qquad \mathcal{M}_{\rm LR} \propto \langle\psi|1,-1\rangle
$$





为了求解 $\mathscr{M}_{\rm RR}$ 和 $\mathscr{M}_{\rm LR}$，把 $|\psi\rangle = |1,1\rangle_\theta$ 按照 $\hat{S}_z$ 的本征态展开：

$$
\begin{aligned}
|1,1\rangle_\theta &= \alpha|1,-1\rangle + \beta|1,0\rangle + \gamma|1,+1\rangle \\
&= \frac{1}{2}(1-\cos\theta)|1,-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta|1,0\rangle + \frac{1}{2}(1+\cos\theta)|1,+1\rangle
\end{aligned}
$$

于是：

$$
|\mathscr{M}_{\rm RR}|^2 \propto |\langle\psi|1,+1\rangle|^2 = \frac{1}{4}(1+\cos\theta)^2 \tag{4.3.31}
$$

$$
|\mathscr{M}_{\rm LR}|^2 \propto |\langle\psi|1,-1\rangle|^2 = \frac{1}{4}(1-\cos\theta)^2 \tag{4.3.32}
$$

今后还会遇到 $W^\pm$ 矢量玻色子的衰变。由于 $W^\pm$ 质量不为零，故存在纵向极化态 (参阅第 5.1 节)，于是存在 $|1,0\rangle$ 初态跃迁到 $|\psi\rangle = |1,1\rangle_\theta$ 末态的概率：

$$
|\langle\psi|1,0\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2\theta \tag{4.3.33}
$$

4.3.5 Casimir 技巧

上面在处理 $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ 湮灭问题时，我们分别考虑了各种自旋态 (或螺旋度本征态) 的组合，并计算了不变矩阵元模方的自旋平均值，从而得到微分散射截面。这样的处理方式物理意义明显，例如可以得到如图 4.7 所示的四种矩阵元。今后我们仍将继续使用这种计算方法。

量子场论中需要经常求解不变矩阵元模方的自旋平均值，即对末态粒子的自旋态求和以及对初态粒子的自旋态求平均。人们发现，对旋量粒子的自旋求和问题可以转化为矩阵求迹问题。这是由 H. Casimir 首先使用的，有人称为 Casimir 技巧，参阅 Griffiths 第 237-238 页。我们以下述散射过程为例对此加以说明：

$$
\begin{array}{ccccccc}
e^- & + & \mu^- & \to & e^- & + & \mu^- \\
(p_1, s_1) & & (p_2, s_2) & & (p_3, s_3) & & (p_4, s_4)
\end{array}
$$

其中 p, s 是粒子的四动量和自旋。不变矩阵元模方的自旋平均值为：

$$
\begin{aligned}
\langle|\mathscr{M}_{fi}|^2\rangle &= \frac{1}{4}\sum_{s_1,s_2}\sum_{s_3,s_4}|\mathscr{M}_{fi}(s_1,s_2;s_3,s_4)|^2 \\
&= \frac{e^4}{q^4}\frac{1}{4}\sum_{s_1,s_2}\sum_{s_3,s_4}\Big|\big[\overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\big]\big[\overline{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2)\big]\Big|^2 \\
&= \frac{e^4}{q^4}\frac{1}{4}\sum_{s_1,s_2}\sum_{s_3,s_4}\big[\overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\big]^\dagger\big[\overline{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2)\big]^\dagger\big[\overline{u}(p_3)\gamma^\nu u(p_1)\big]\big[\overline{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)\big] \\
&= \frac{e^4}{q^4}\frac{1}{2}\sum_{s_1,s_3}\big[\overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\big]^\dagger\big[\overline{u}(p_3)\gamma^\nu u(p_1)\big]\frac{1}{2}\sum_{s_2,s_4}\big[\overline{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2)\big]^\dagger\big[\overline{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)\big] \\
&= \frac{e^4}{q^4}L^{\mu\nu}W_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

式中两个张量定义为：

$$L^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\sum_{s_1,s_3}\left[\overline{u}(p_3)\gamma^{\mu}u(p_1)\right]^{\dagger}\left[\overline{u}(p_3)\gamma^{\nu}u(p_1)\right]$$
$$W_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\sum_{s_2,s_4}\left[\overline{u}(p_4)\gamma_{\mu}u(p_2)\right]^{\dagger}\left[\overline{u}(p_4)\gamma_{\nu}u(p_2)\right]$$

它们分别是粒子 13 形成的电子流和粒子 24 形成的 μ 子流。

我们考虑其中的 $L^{\mu\nu}$。利用 (请证明)：

$$\left[\overline{u}(p_3)\gamma^{\mu}u(p_1)\right]^{\dagger} = \overline{u}(p_1)\gamma^{\mu}u(p_3)$$

可以得到：

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{s_1,s_3}\left[\overline{u}(p_1)\gamma^{\mu}u(p_3)\right]\left[\overline{u}(p_3)\gamma^{\nu}u(p_1)\right]$$

把上式写成分量形式，则各分量的位置可以自由放置：

$$\begin{aligned}L^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\sum_{s_1,s_3}\left[\overline{u}(p_1)\right]_{\alpha}\left(\gamma^{\mu}\right)_{\alpha\beta}\left[u(p_3)\right]_{\beta}\left[\overline{u}(p_3)\right]_{\rho}\left(\gamma^{\nu}\right)_{\rho\sigma}\left[u(p_1)\right]_{\sigma}\\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}\right)_{\alpha\beta}\left\{\sum_{s_1}\left[u(p_1)\right]_{\sigma}\left[\overline{u}(p_1)\right]_{\alpha}\right\}\left(\gamma^{\nu}\right)_{\rho\sigma}\left\{\sum_{s_3}\left[u(p_3)\right]_{\beta}\left[\overline{u}(p_3)\right]_{\rho}\right\}\end{aligned}$$

利用 (请证明)：

$$\sum_{i=1,2} u_i\overline{u}_i = \gamma^{\mu}p_{\mu} + m, \qquad \sum_{i=1,2} v_i\overline{v}_i = \gamma^{\mu}p_{\mu} - m$$

上式 $i = 1,2$ 意味着对自旋求和。定义常用的 slash 动量：

$$\boxed{\not{p} = \gamma^{\mu}p_{\mu}} \tag{4.3.34}$$

于是 $L^{\mu\nu}$ 变为：

$$\begin{aligned}L^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}\right)_{\alpha\beta}\left(\not{p}_1 + m_1\right)_{\sigma\alpha}\left(\gamma^{\nu}\right)_{\rho\sigma}\left(\not{p}_3 + m_3\right)_{\beta\rho}\\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}\right)_{\alpha\beta}\left(\not{p}_3 + m_3\right)_{\beta\rho}\left(\gamma^{\nu}\right)_{\rho\sigma}\left(\not{p}_1 + m_1\right)_{\sigma\alpha}\end{aligned}$$

上式即为对矩阵求迹 (即矩阵对角元素之和)：

$$\boxed{L^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{s_1,s_3}\left[\overline{u}(p_3)\gamma^{\mu}u(p_1)\right]^{\dagger}\left[\overline{u}(p_3)\gamma^{\nu}u(p_1)\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu}(\not{p}_3 + m_3)\gamma^{\nu}(\not{p}_1 + m_1)\right]} \tag{4.3.35}$$

对 $W_{\mu\nu}$ 有类似的结论。式 (4.3.35) 就是 Casimir 技巧，注意其中的 γ^{μ} 矩阵可以用更一般的任意 4×4 矩阵 Γ^{μ} 代替。Casimir 技巧表明对自旋求和最终转化为对 γ 矩阵等的求迹。Griffiths 第 238-239 页列出了矩阵求迹公式。我们总结如下：

1. 若 A、B 是任意矩阵，α 是任意数，则：

$$\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \tag{4.3.36}$$
$$\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha\mathrm{Tr}(A) \tag{4.3.37}$$
$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \tag{4.3.38}$$

因此有

$$\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(CAB)$$

但是它们一般不等于：

$$\mathrm{Tr}(ACB) = \mathrm{Tr}(BAC) = \mathrm{Tr}(CBA)$$

2. 对于度规张量，易证：

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4 \tag{4.3.39}$$

3. 回忆 γ 矩阵 (及其相应的 slash 量的推广) 的反对易关系：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} I \qquad \Rightarrow \qquad \not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2a \cdot bI$$

有如下收缩定理：

$$\begin{aligned}
&\gamma_\mu \gamma^\mu = g_{\mu\nu} \tfrac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} I = 4I \\
&\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = \gamma_\mu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) = -2\gamma^\nu && \Rightarrow \quad \gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a} \\
&\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu = 4g^{\nu\rho} I && \Rightarrow \quad \gamma_\mu \not{a}\not{b} \gamma^\mu = 4a^\mu b_\mu = 4a \cdot bI \\
&\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu && \Rightarrow \quad \gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c} \gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}
\end{aligned}$$

于是有如下求迹定理：

奇数个 γ 矩阵乘积的迹为零 (4.3.40)

$$\mathrm{Tr}(I) = 4 \tag{4.3.41}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b \tag{4.3.42}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) \tag{4.3.43}$$

$$- g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \qquad\qquad - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)] \tag{4.3.44}$$

由于 $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 是偶数个 γ 矩阵的乘积，因此根据 (4.3.40) 式立即可知 γ^5 和奇数个 γ 乘积的迹为零：

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu) = \mathrm{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) = \cdots = 0$$

至于 γ^5 和偶数个 γ 乘积的迹，则为：

$$\mathrm{Tr}(\Gamma^5) = 0 \tag{4.3.45}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Tr}(\gamma^5 \not{a}\not{b}) = 0 \tag{4.3.46}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Tr}(\gamma^5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma \tag{4.3.47}$$

其中：

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \text{对于 } \mu\nu\rho\sigma \text{ 为 0123 的偶数置换} \\ -1, & \text{对于 } \mu\nu\rho\sigma \text{ 为 0123 的奇数置换} \\ 0, & \text{如果 } \mu\nu\rho\sigma \text{ 中任意两个指标相同} \end{cases}$$

4. 其他几个求迹结果：

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \not{a} \gamma_\nu \not{b}\right] \times \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \not{c} \gamma^\nu \not{d}\right] = 32\left[(a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)\right] \tag{4.3.48}$$

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \not{a} \gamma_\nu \not{b} \gamma_5\right] \times \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \not{c} \gamma^\nu \not{d} \gamma_5\right] = 32\left[(a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)\right] \tag{4.3.49}$$

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu \not{a} \gamma_\nu \not{b} \gamma_5\right] \times \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \not{c} \gamma^\nu \not{d}\right] = 0 \tag{4.3.50}$$

利用以上求迹公式，可以求得 $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$ 散射过程中 $L^{\mu\nu}$ 的具体形式：

$$
\begin{aligned}
L^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu}(\not{p}_3 + m_3)\gamma^{\nu}(\not{p}_1 + m_1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu}\not{p}_3\gamma^{\nu}\not{p}_1) + \mathrm{Tr}(m_1\gamma^{\mu}\not{p}_3\gamma^{\nu}) + \mathrm{Tr}(m_3\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\not{p}_1) + \mathrm{Tr}(m_3 m_1\gamma^{\mu}\gamma^{n}u)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[4(p_3^{\mu}p_1^{\nu} + p_1^{\mu}p_3^{\nu} - g^{\mu\nu}p_3\cdot p_1) + 0 + 0 + 4m_3 m_1 g^{\mu\nu}\right] \\
&= 2p_3^{\mu}p_1^{\nu} + 2p_1^{\mu}p_3^{\nu} + g^{\mu\nu}[q^2 + (m_1 - m_3)^2]
\end{aligned}
$$

注意到 $m_1 = m_3 = m_e$，于是：

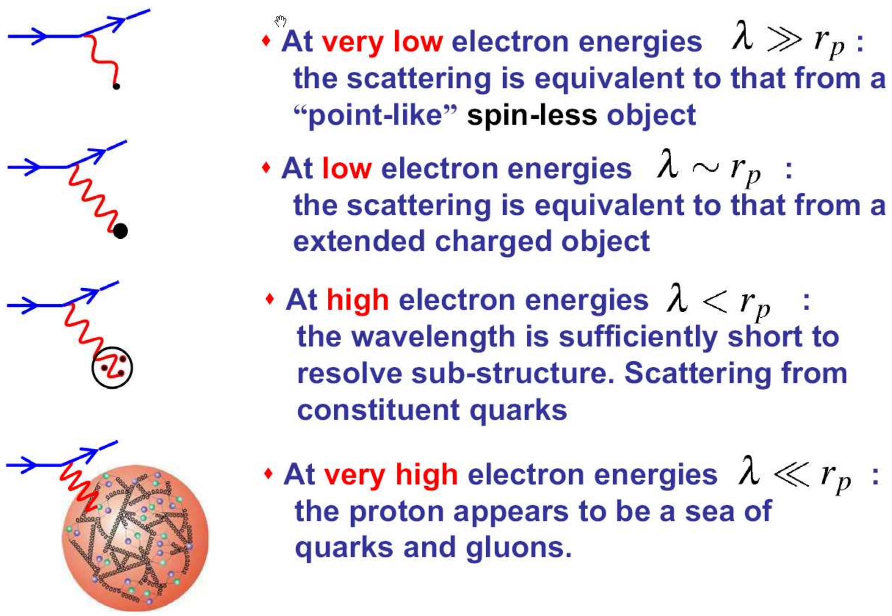
$$
L^{\mu\nu} = 2p_3^{\mu}p_1^{\nu} + 2p_1^{\mu}p_3^{\nu} + g^{\mu\nu}q^2 \tag{4.3.51}
$$

类似可得 $W_{\mu\nu}$，从而得到不变矩阵元模方的自旋平均值：

$$
\begin{aligned}
\langle|\mathscr{M}_{fi}|^2\rangle &= \frac{e^4}{q^4}L^{\mu\nu}W_{\mu\nu} \\
&= \frac{e^4}{q^4}(2p_3^{\mu}p_1^{\nu} + 2p_1^{\mu}p_3^{\nu} + g^{\mu\nu}q^2)(2p_{4\mu}p_{2\nu} + 2p_{2\mu}p_{4\nu} + g_{\mu\nu}q^2) \\
&= \frac{e^4}{q^4}\left[8(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + 8(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) + 4(p_1\cdot p_3)q^2 + 4(p_2\cdot p_4)q^2 + 4q^4\right] \\
&= \frac{2e^4}{q^4}\left[(2p_1\cdot p_2)(2p_3\cdot p_4) + (2p_1\cdot p_4)(2p_2\cdot p_3) + 2(m_1^2 + m_2^2)q^2\right] \\
&= \frac{2e^4}{t^2}\left[\left(s - (m_1^2 + m_2^2)\right)^2 + \left(u - (m_1^2 + m_2^2)\right)^2 + 2(m_1^2 + m_2^2)t\right]
\end{aligned}
$$

4.4 $e^- p$ 弹性散射

点状轻子 (电子、中微子等) 和质子的散射是探索质子结构的利器。散射中的相互作用和入射电子的能量 (确切地说是虚光子的能量或波长 λ) 有很大关系：



电子和质子都是 Dirac 正粒子，它们的一般螺旋度本征态由 (4.1.43) 式表示：

$$u_\uparrow(p)=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\\ \frac{p}{E+m}\cos\frac{\theta}{2}\\ \frac{p}{E+m}e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},\qquad u_\downarrow(p)=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\ e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\\ \frac{p}{E+m}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\frac{p}{E+m}e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

定义：

$$C\equiv\cos\frac{\theta}{2},\qquad S\equiv\sin\frac{\theta}{2},\qquad \xi=\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}$$

则螺旋度本征态写为：

$$u_\uparrow(p)=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}C\\ e^{i\phi}S\\ \xi C\\ \xi e^{i\phi}S\end{pmatrix},\qquad u_\downarrow(p)=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}-S\\ e^{i\phi}C\\ \xi S\\ -\xi e^{i\phi}C\end{pmatrix}$$

当入射粒子的 $\xi\to 0$ 时为非相对论极限，当 $\xi\to 1$ 时则为相对论极限。

4.4.1 e^- 和点状静止 p 的弹性散射

本节讨论点状 e^- 和点状 p 的弹性散射，其中 p 是静止的，如图 4.10 所示。

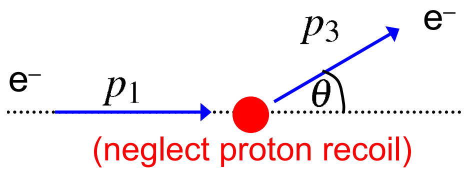


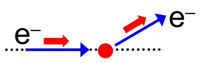
图 4.9: 点状电子和点状静止质子的 Coulomb 散射。

首先讨论电子流 j_e。初态和末态电子的螺旋度本征态为：

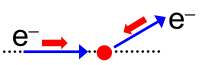
$$u_\uparrow(p_1)=\sqrt{E_1+m}\begin{pmatrix}1\\0\\ \xi\\0\end{pmatrix},\qquad u_\downarrow(p_1)=\sqrt{E_1+m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-\xi\end{pmatrix}$$

$$u_\uparrow(p_3)=\sqrt{E_1+m}\begin{pmatrix}C\\S\\ \xi C\\ \xi S\end{pmatrix},\qquad u_\downarrow(p_3)=\sqrt{E_1+m}\begin{pmatrix}-S\\C\\ \xi S\\-\xi C\end{pmatrix}$$

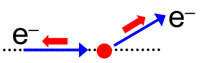
式中 E_1 是电子能量，m 是电子质量，$\xi=\frac{|\mathbf{p}|}{E_1+m}$，其中 $|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_3|$，则电子流 j_e 共有四种可能的螺旋度组合 RR, RL, LR, LL (利用 (4.3.14) 式)：



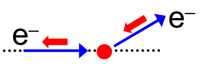
$$\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1)=(E_1+m)\left[(\xi^2+1)C,2\xi S,-2i\xi S,2\xi C\right]$$



$$\bar{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1)=(E_1+m)\left[(\xi^2-1)S,0,0,0\right]\tag{4.4.1}$$



$$\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1)=(E_1+m)\left[-(\xi^2-1)S,0,0,0\right]$$



$$\bar{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1)=(E_1+m)\left[(\xi^2+1)C,2\xi S,-2i\xi S,2\xi C\right]$$

下面讨论质子流 j_p。注意到质子静止，故初态和末态质子的螺旋度本征态为：

$$u_\uparrow(0) = \sqrt{2M}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad u_\downarrow(0) = \sqrt{2M}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

其中 M 是质子质量。于是质子流 j_p 为：

$$\begin{aligned}
&\text{RR:} && \overline{u}_\uparrow(0)\gamma^\mu u_\uparrow(0) = 2M[1,\,0,\,0,\,0]\\
&\text{RL:} && \overline{u}_\downarrow(0)\gamma^\mu u_\uparrow(0) = 2M[0,\,0,\,0,\,0]\\
&\text{LR:} && \overline{u}_\uparrow(0)\gamma^\mu u_\downarrow(0) = 2M[0,\,0,\,0,\,0]\\
&\text{LL:} && \overline{u}_\downarrow(0)\gamma^\mu u_\downarrow(0) = 2M[1,\,0,\,0,\,0]
\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

即质子流的四种可能螺旋态组合中只有两种有贡献。

一、很低能电子的 Rutherford 散射

在入射电子能量很低的情形下，$|\mathbf{p}| \ll E_1$，$\xi \to 0$，因此 (4.4.1) 式所示的电子流为：

$$\begin{aligned}
\overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1) &= 2m[C,\,0,\,0,\,0]\\
\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1) &= 2m[-S,\,0,\,0,\,0]\\
\overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1) &= 2m[S,\,0,\,0,\,0]\\
\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1) &= 2m[C,\,0,\,0,\,0]
\end{aligned}$$

上式表明电子流的四种螺旋度组合均不为零 (故螺旋度本征态不等于手征本征态)。把这四种不为零的电子流 j_e，以及两种不为零的质子流 j_p，代入 (4.3.6) 式：

$$\mathcal{M}_{fi} = -\frac{e^2}{q^2}(j_e \cdot j_p)$$

得到八种不为零的跃迁矩阵元。再利用 (4.3.4) 式：

$$\langle|\mathcal{M}_{fi}|\rangle^2 = \frac{1}{4}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{4}\left(|\mathcal{M}_{\text{LL}\to\text{LL}}|^2 + |\mathcal{M}_{\text{LL}\to\text{LR}}|^2 + \cdots\right)$$

得到跃迁矩阵元模方的自旋平均值：

$$\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = \frac{1}{4}\frac{e^4}{q^4}(16M^2m^2)(4C^2 + 4S^2)$$

对于散射过程，上式中的 q^2 为：

$$q^2 = (p_1 - p_3)^2 = (0, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 = -4|\mathbf{p}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

于是跃迁矩阵元模方的自旋平均值是：

$$\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = \frac{M^2m^2e^4}{|\mathbf{p}|^4\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

代入 (4.3.3) 式，得到微分散射截面：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{64\pi^2}\Big(\frac{1}{M+E_1-E_1\cos\theta}\Big)^2\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle$$

由于 $E_1\sim m\ll M$，故可以忽略分母中的 E_1，于是：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{64\pi^2M^2}\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle=\frac{m^2e^4}{64\pi^2|\mathbf{p}|^4\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

考虑到电子动能为：

$$E_K=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

以及

$$e^2=4\pi\alpha$$

微分散射截面可写为：

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_{\text{Rutherford}}=\frac{\alpha^2}{16E_k^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\tag{4.4.3}$$

上式就是很低能量的点状电子 e^- 和点状固定质子 p 发生弹性散射的 Rutherford 公式。由于 Rutherford 公式也可以在不考虑电子和质子的自旋自旋相互作用下，通过非相对论的电子被静态质子的Coulomb 势 $V(\mathbf{r})$ 散射得到，因此我们得出结论，在非相对论极限下粒子之间的相互作用只是电荷之间的Coulomb 力。

二、相对论电子的 Mott 散射

在入射电子是相对论电子，但是电子能量还是很低的情形下，我们忽略而且只忽略电子质量，$m\to 0$，$\xi\to 1$，因此 (4.4.1) 式所示的电子流为：

$$\begin{aligned}
&\overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1)=2E_1[C,\,S,\,-iS,\,C]\\
&\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1)=0\\
&\overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1)=0\\
&\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1)=2E_1[C,\,S,\,-iS,\,C]
\end{aligned}$$

上式表明，在相对论电子的螺旋度组合中只有 $\uparrow\uparrow$ 和 $\downarrow\downarrow$ 两种不为零，即电子的螺旋度守恒。此时质子流仍然如 (4.4.2) 式所示。很容易得到：

$$\boxed{\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_{\text{Mott}}=\underbrace{\frac{\alpha^2}{4E_1^2\sin^4\frac{\theta}{2}}}_{\text{Rutherford 公式}}\quad\underbrace{\cos^2\frac{\theta}{2}}_{\text{电子螺旋度守恒}}}\tag{4.4.4}$$

上式就是相对论的点状电子和点状静止质子的弹性散射公式，称为Mott 公式。由于电子质量可忽略，$E_1\gg m$，故 $E_k=E_1$，式中的第一个因子即为 Rutherford 公式。式中的第二个因子体现了 QED 在电子质量可忽略时的螺旋度守恒，初态电子和末态电子波函数的叠加给出了 $\cos^2\frac{\theta}{2}$ 因子 (参阅前一节中的讨论)。如果考虑一个相对论电子被一个固定在空间某处的 Coulomb 势 $V(\mathbf{r})$ 散射，也可以得到 Mott 公式。因此发生 Mott 散射的作用力仍然是电荷之间的 Coulomb 力。

4.4.2 e^- 和点状反冲 p 的弹性散射

在上一节讨论 Rutherford 散射和 Mott 散射时，我们假设质子是静止的。但实际情形是质子会发生反冲，如图 4.10 所示。此时入射电子能量一般足够大，即 $E_1 \gg m$。注意总体情形仍然是很低能量的入射电子，不考虑质子结构。

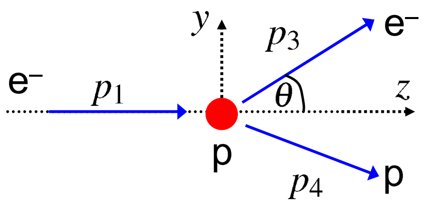


图 4.10: 点状电子和点状质子的弹性散射，考虑质子反冲运动。

初态电子和质子以及末态电子和质子的四动量分别为：

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1, 0, 0, E_1) \\ p_2 &= (M, 0, 0, 0) \\ p_3 &= (E_3, 0, E_3 \sin\theta, E_3 \cos\theta) \\ p_4 &= (E_4, \mathbf{p}_4) \end{aligned}$$

根据习题 (三) 中的第 (15) 式：

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{8e^4}{(p_1 - p_3)^4} \big[&(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \\ &- (p_1 \cdot p_3) M^2 - (p_2 \cdot p_4) m^2 + 2m^2 M^2 \big] \end{aligned}$$

因为 $E_1 \gg m$，所以忽略电子质量 $m \approx 0$，上式变为：

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{8e^4}{(p_1 - p_3)^4} \big[(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - (p_1 \cdot p_3) M^2 \big] \tag{4.4.5}$$

由于实验观测的是电子，因此我们设法消去上式中的 p_4。为此，我们利用四动量守恒条件 $p_4 = p_1 + p_2 - p_3$，得到：

$$\begin{aligned} p_3 \cdot p_4 &= p_3 \cdot p_1 + p_3 \cdot p_2 - p_3 \cdot p_3 = E_1 E_3 (1 - \cos\theta) + E_3 M \\ p_1 \cdot p_4 &= p_1 \cdot p_1 + p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3 = E_1 M - E_1 E_3 (1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

式中已利用 $p_3 \cdot p_3 = p_1 \cdot p_1 = m^2 \approx 0$。式 (4.4.5) 中其他几个不含 p_4 的四动量标积为：

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= E_1 M \\ p_1 \cdot p_3 &= E_1 E_3 (1 - \cos\theta) \\ p_2 \cdot p_3 &= E_3 M \end{aligned}$$

把上面这些四动量标积代入 (4.4.5) 式，得到跃迁矩阵元模方的自旋平均：

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle &= \frac{8e^4}{(p_1 - p_3)^4} M E_1 E_3 \big[(E_1 - E_3)(1 - \cos\theta) + M(1 + \cos\theta) \big] \\ &= \frac{8e^4}{(p_1 - p_3)^4} 2 M E_1 E_3 \left[(E_1 - E_3) \sin^2 \frac{\theta}{2} + M \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

我们需要计算 $q^4 = (p_1 - p_3)^4$ 和 $E_1 - E_3$。具体如下：

❍ $q^4=(p_1-p_3)^4$ 可以直接计算得到。事实上 q^2 为：

$$q^2=(p_1-p_3)^2=p_1^2+p_3^2-2p_1\cdot p_3=-2E_1E_3(1-\cos\theta) \tag{4.4.7}$$

或者写为：

$$q^2=-4E_1E_3\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{4.4.8}$$

❍ E_1-E_3 的计算较为曲折。我们利用四动量守恒：

$$p_4=p_1+p_2-p_3=q+p_2$$

对上式两边平方：

$$p_4^2=q^2+p_2^2+2q\cdot p_2$$

由于

$$p_2^2=p_4^2=M^2$$

因此得到：

$$q\cdot p_2=-\frac{q^2}{2}$$

式中 $q\cdot p_2$ 为：

$$q\cdot p_2=(p_1-p_3)\cdot p_2=p_1\cdot p_2-p_3\cdot p_2=M(E_1-E_3)$$

根据上面两式，可得：

$$E_1-E_3=-\frac{q^2}{2M} \tag{4.4.9}$$

把 (4.4.8)、(4.4.9) 式代入 (4.4.6) 式，得到跃迁矩阵元模方的自旋平均：

$$\begin{aligned}\langle|\mathscr{M}_{fi}|^2\rangle&=\frac{8e^4}{16E_1^2E_3^2\sin^4\frac{\theta}{2}}2ME_1E_2\left[M\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\\&=\frac{M^2e^4}{E_1E_3\sin^4\frac{\theta}{2}}\left[\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\end{aligned}$$

将之带入 (4.3.3) 式：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{64\pi^2}\left(\frac{E_3}{ME_1}\right)^2\langle|\mathscr{M}_{fi}|^2\rangle$$

得到点状 e^- 和点状反冲 p 的弹性散射微分截面：

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{4E_1^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\underbrace{\frac{E_3}{E_1}}_{\text{质子反冲}}\left(\underbrace{\cos^2\frac{\theta}{2}}_{\text{电作用}}-\underbrace{\frac{q^2}{2M^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}_{\text{磁作用}}\right)} \tag{4.4.10}$$

❍ 式 (4.4.10) 中的 $\frac{E_3}{E_1}$ 来自质子反冲。根据 (4.4.7)、(4.4.9) 式，消去 q^2 可得：

$$\frac{E_3}{E_1}=\frac{M}{M+E_1(1-\cos\theta)} \tag{4.4.11}$$

上式表明，当散射角 $\theta\to 0$ 时，$\frac{E_3}{E_1}\to 1$，即靶粒子反冲很小。随着 θ 增加，$\frac{E_3}{E_1}$ 减小，即靶粒子反冲增大。当 $\theta=\pi$ 时，$\frac{E_3}{E_1}\approx\frac{M}{M+2E_1}$，靶粒子的反冲达到最大。

❍ 微分散射截面 (4.4.10) 式描述的是电子被自旋 $\frac{1}{2}$ 点状 Dirac 质子散射。点状质子的磁矩为 $\frac{e}{2M}$。如果自旋 $\frac{1}{2}$ 的靶质子用无自旋靶粒子替换，可以证明微分截面 (4.4.10) 式中的 $\sin^2\frac{\theta}{2}$ 相关项将消失。这表明 $\sin^2\frac{\theta}{2}$ 项来自电子被自旋 $\frac{1}{2}$ 质子的内禀磁矩散射，体现的是入射粒子和靶粒子之间自旋自旋耦合的磁相互作用。

❍ 值得指出的是对于给定的入射电子能量 E_1，式 (4.4.10) 所示的微分散射截面仅依赖于一个参数，即散射角 θ。一旦参数 θ 给定，则 E_3 和 q^2 也都固定。事实上 E_3 由 (4.4.11) 式确定，把 (4.4.11) 式代入 (4.4.7) 式，得到：

$$q^2 = -\frac{2ME_1^2(1-\cos\theta)}{M+E_1(1-\cos\theta)}$$

例如，考虑能量为 529.5 MeV 的入射电子和点状质子的散射过程 $e^- + p \to e^- + p$。在 $\theta = 75°$ 处散射电子能量为：

$$E_3 = \frac{ME_1}{M+E_1(1-\cos\theta)} = \frac{938\times 529}{938+529(1-\cos 75°)} = 373\,\text{MeV}$$

四动量转移的平方则为：

$$q^2 = \frac{2\times 938\times 529^2(1-\cos 75°)}{938+529(1-\cos 75°)} = 294\,\text{MeV}^2$$

两者都是常数。其中电子能量如图 4.11 所示，很明显在 373 MeV 处有一个峰值。

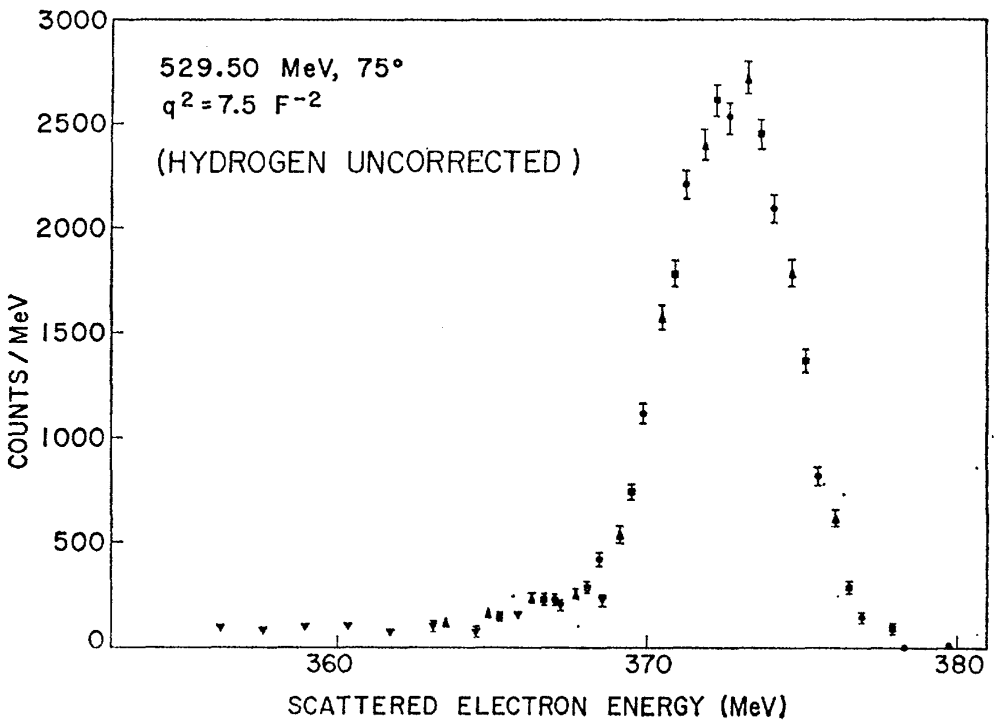


图 4.11: $e^- + p \to e^- + p$ 弹性散射过程中，在 $\theta = 75°$ 处测得的散射电子的能量。入射电子能量为 529.5 MeV。实验数据取自 E.B. Hughes *et al, Phys. Rev.* **139** (1965) B458。

4.4.3 e^- 和有结构核子的弹性散射

考虑到质子有一定的空间分布，应该把前面得到的截面结果 (4.4.10) 式推广到电子和有结构质子的弹性散射过程。我们引入两个结构因子，其中一个和质子的电荷分布有关，记作 $G_E(q^2)$，另外一个和质子的磁矩分布有关，记作 $G_M(q^2)$。可以证明此时的微分散射截面为：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\alpha^2}{4E_1^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E_3}{E_1}\left(\frac{G_E^2+\tau G_M^2}{1+\tau}\cos^2\frac{\theta}{2}+2\tau G_M^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)} \tag{4.4.12}$$

式中：

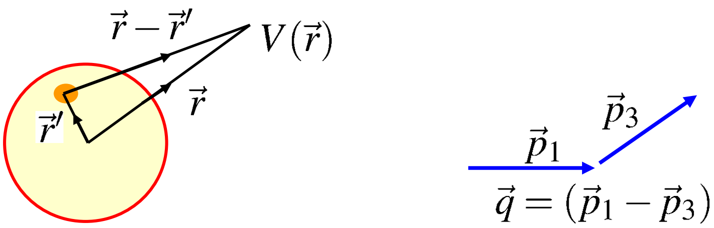
$$\tau=-\frac{q^2}{4M^2}>0$$

是个 Lorentz 不变量。

式 (4.4.12) 称为 Rosenbluth 公式。注意 Rosenbluth 公式不仅适用于质子，也适用于中子。通常把 $G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$ 称为核子的电**形状因子 (form factor)** 和磁形状因子，它们是四动量转移的平方 q^2 的函数。有时候在 $G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$ 上标记 p 或 n，用以区分质子和中子的电磁形状因子。电磁形状因子还不能从理论上推得，必须通过实验手段测量得到。核子的电磁结构因子提供了核子的空间电荷分布和磁矩分布的信息。

一、形状因子

一般的量子力学课程都会介绍形状因子的概念，这里对此作一简单回顾。考虑一个电子被位置空间某处一个具有一定电荷分布 $\rho(\mathbf{r}')$ 的静态 Coulomb 势的散射。



该电荷分布满足：

$$\int\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}\mathbf{r}'=1$$

在位置 $\mathbf{r}$ 处的势为：

$$V(\mathbf{r})=\int\frac{Q\rho(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}\mathbf{r}'$$

其中 Q 是该分布电荷的总电荷。在微扰论中一阶微扰的跃迁矩阵元是：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{fi}&=\langle\psi_f|V(\mathbf{r})|\psi_i\rangle=\int e^{-i\mathbf{p}_3\cdot\mathbf{r}}V(\mathbf{r})e^{i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{r}}\mathrm{d}\mathbf{r}\\&=\int\int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\frac{Q\rho(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}\mathbf{r}'\mathrm{d}\mathbf{r}=\int\int e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'}\frac{Q\rho(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}\mathbf{r}'\mathrm{d}\mathbf{r}\end{aligned}$$

固定 $\mathbf{r}'$，令 $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$，并对 $\mathrm{d}\mathbf{r}$ 积分：

$$\mathcal{M}_{fi}=\int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}}\frac{Q}{4\pi|\mathbf{R}|}\mathrm{d}\mathbf{R}\int\rho(\mathbf{r}')e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'}\mathrm{d}\mathbf{r}'=(\mathcal{M}_{fi})_{\text{point}}F(\mathbf{q}^2)$$

可见靶粒子具有一定电荷分布时的跃迁矩阵元 $\mathcal{M}_{fi}$ 是靶粒子为点电荷时的跃迁矩阵元 $(\mathcal{M}_{fi})_{\text{point}}$ 和形状因子 $F(\mathbf{q}^2)$ 的乘积。其中形状因子为：

$$F(\mathbf{q}^2) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{r}$$

它只不过是电荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ 的 Fourier 变换。

形状因子的概念并没有任何神奇之处。有些类似光学中平面波的衍射。由于散射中心大一定大小，导致入射平面波在散射心不同位置有不同的相位移动。如果入射波长很长，则相当于散射中心的电荷分布 ρ 可以看成是 δ 函数，此时形状因子 $F(\mathbf{q}^2) = 1$。不同电荷分布对应不同的电荷形状因子，如图 4.12 所示。

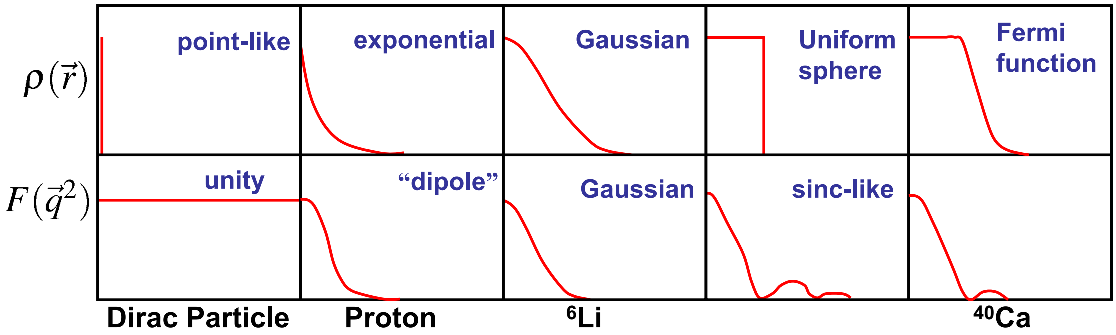


图 4.12: 各种不同的电荷分布和相应的形状因子。

二、电磁形状因子 $G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$

上面讲的形状因子是 $\mathbf{q}^2$ 的函数。但是核子的电形状因子 $G_E(q^2)$ 和磁形状因子 $G_M(q^2)$ 是四动量转移的平方 q^2 的函数，因此不能想当然地认定它们就是电荷分布和磁矩分布的 Fourier 变换。

注意到四维动量转移 $q = (E_1 - E_3, \mathbf{q})$ 分为能量转移 $E_1 - E_3$ 和三维动量转移 $\mathbf{q}$ 两部分，故：

$$q^2 = (E_1 - E_3)^2 - \mathbf{q}^2$$

利用 (4.4.9) 式：

$$E_1 - E_3 = -\frac{q^2}{2M}$$

容易得到：

$$q^2\left[1 + \left(-\frac{q^2}{4M^2}\right)\right] = -\mathbf{q}^2$$

当 $\tau = -\frac{q^2}{4M^2} \ll 1$ 时，我们有：

$$q^2 \approx -\mathbf{q}^2$$

这种情形下电磁形状因子只依赖于三维动量的平方，我们可以把电磁形状因子解释成为电荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ 和磁距分布 $\mu(\mathbf{r})$ 的 Fourier 变换：

$$G_E(q^2) \approx G_E(\mathbf{q}^2) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{4.4.13}$$

$$G_M(q^2) \approx G_M(\mathbf{q}^2) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \mu(\mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{4.4.14}$$

当 $\tau \ll 1$ 时，Rosenbluth 公式 (4.4.12) 变为：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4\frac{\theta}{2}} \frac{E_3}{E_1} \left(G_E^2 \cos^2\frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2\frac{\theta}{2} \right)$$

上式与点状电子和点状反冲核子的弹性散射公式 (4.4.10) 相比，在低动量转移时，与电荷散射相关的 $\cos^2\frac{\theta}{2}$ 项多了一个电形状因子 $G_E^2(\mathbf{q}^2)$，与磁距散射相关的 $2\tau\sin^2\frac{\theta}{2}$ 项多了一个磁形状因子 $G_M^2(\mathbf{q}^2)$。

如果四动量转移的平方 $q^2 = 0$，则 $\mathbf{q}^2 = 0$，代入 (4.4.13)、(4.4.14) 式，得到：

$$G_E(0) = \int \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}, \qquad G_M(0) = \int \mu(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$$

上式表明在 $q^2 = 0$ 极限下核子的电形状因子和磁形状因子正好是它们的总电荷和总磁矩。如果电荷单位是 e，磁矩单位是核子磁矩 $\mu_N \equiv \frac{e\hbar}{2M}$，则对于质子和中子靶：

$$\begin{aligned} G_E^p(0) &= 1, \qquad G_M^p(0) = \mu_p = +2.79 \\ G_E^n(0) &= 0, \qquad G_M^n(0) = \mu_n = -1.91 \end{aligned}$$

上式右边的磁矩是实验测量值。核子磁矩的测量值不为零说明核子确实有结构。

三、$G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$ 的测量

我们把 Rosenbluth 公式 (4.4.12) 改写为：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_0 \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1+\tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2\frac{\theta}{2} \right)} \tag{4.4.15}$$

其中 $\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_0$ 包含 Mott 散射和质子反冲部分，相当于电子和无自旋质子的散射：

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_0 = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4\frac{\theta}{2}} \frac{E_3}{E_1} \cos^2\frac{\theta}{2}$$

在低 q^2 情形下，$\tau = -\frac{q^2}{4M^2} \approx 0$，此时主要是电形状因子的贡献：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \Big/ \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_0 \approx G_E^2(q^2)$$

在高 q^2 情形下，$\tau \gg 1$，此时主要是磁形状因子的贡献，电形状因子很小，测不到：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \Big/ \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_0 \approx \tau \left(\frac{1}{\tau} + 2\tan^2\frac{\theta}{2} \right) G_M^2(q^2)$$

一般情况下，我们可以根据 (4.4.15) 式，通过测量给定 q^2 条件下 $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}/\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_0$ 和 $\tan^2\frac{\theta}{2}$ 的函数关系确定 $G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$：

$$\begin{aligned} \text{slope} \quad &= 2\tau G_M^2(q^2) \\ \text{intercept} &= \frac{G_E^2(q^2) + \tau G_M^2(q^2)}{1+\tau} \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

这里给定 q^2 这一条件，意味着 $\tau = -\frac{q^2}{4M^2}$ 具有确定的值，因而由上式可以提取电磁形状因子 $G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$。

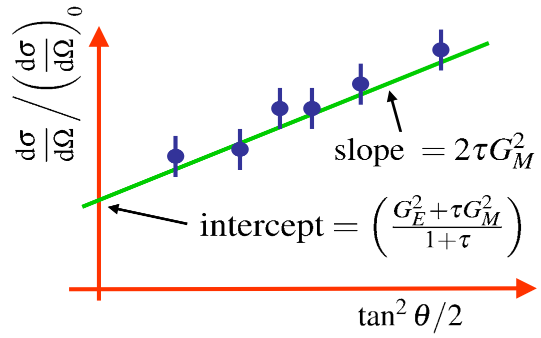


图 4.13 给出了实验测量 $G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$ 的具体步骤。这是电子和质子发生弹性散射 $e^-+p\to e^-+p$ 的实验。弹性散射的微分散射截面依赖于入射电子能量 E_1 和散射角 θ。在某一特定散射角，不同的入射电子能量 E_1 对应不同的 q^2。实验中通过调节 E_1，可以测得某散射角处的微分散射截面和 q^2 的依赖关系，如图 4.13 (左) 中的某一条实验曲线所示。把探测仪器置于不同散射角，重复以上实验过程，得到一系列实验曲线。在数据处理中，把所有 q^2 相同的实验点取出来，作 $\frac{d\sigma}{d\Omega}/(\frac{d\sigma}{d\Omega})_0$ 和 $\tan^2\frac{\theta}{2}$ 的函数关系，如图 4.13 (右上) 所示。利用 (4.4.16) 式，即可求得特定 q^2 下的 $G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$。把所有不同 q^2 下的 $G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$ 放在一张图中，就可以得到如图 4.13 (右下) 所示质子的电磁形状因子和 q^2 的依赖关系。实验结果表明：

$$G_M^p(q^2)=2.79G_E^p(q^2)$$

质子的电形状因子和磁形状因子有相同的分布形式。

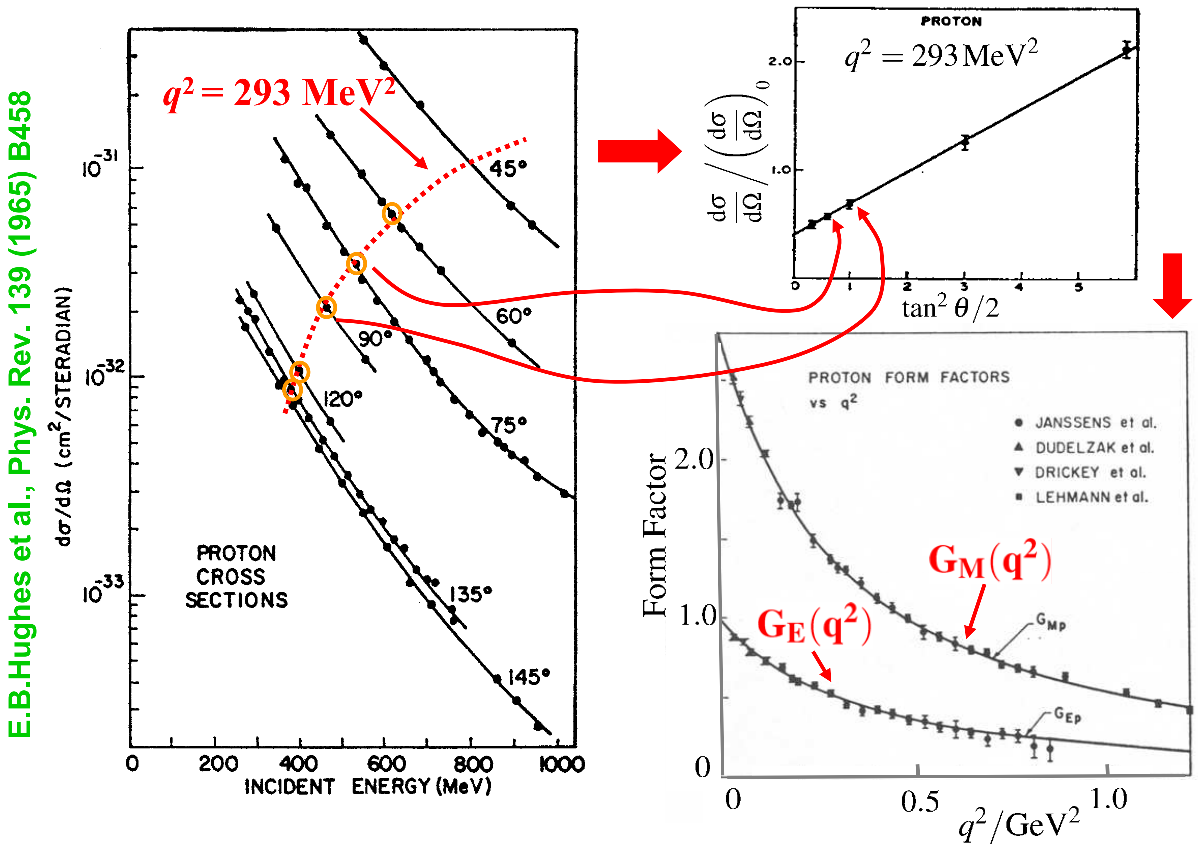


图 4.13: 质子的电磁形状因子。实验数据取自 Hughes *et al*, *Phys. Rev.* **139** (1965) B458。

核子电磁形状因子的测量一直是粒子物理实验中的一个重要研究课题。例如七十年代，人们利用 SLAC 的电子直线加速器 LINAC 测量了核子的电磁形状因子。LINAC 的电子能量高达 5 – 20 GeV，主要是磁形状因子的贡献。图 4.14 所示为 R.C. Walker *et al.* 发表在 *Phys, Rev.*, **D49** (1994) 5671 的质子磁形状因子的实验结果。对于中子有类似结果。

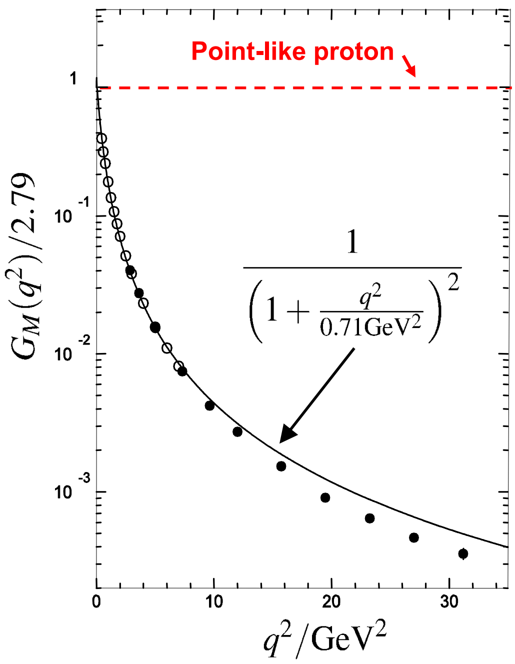


图 4.14: 质子的磁形状因子。实验数据取自 Walker *et al*, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 5671。

核子的电磁形状因子可以比较好地用偶极型的函数进行拟合：

$$G_E^p(q^2) \approx \frac{G_M^p(q^2)}{2.79} \approx \frac{G_M^n(q^2)}{-1.91} \approx \frac{1}{(1+q^2/q_0^2)^2} \tag{4.4.17}$$

其中 $q_0^2 \approx 0.71\,\text{GeV}^2$。实验还发现中子的电形状因子如预期那样为零：

$$G_E^n(q^2) = 0$$

在高 q^2 情形时，只有磁形状因子的贡献。根据 (4.4.17) 式，我们有：

$$G_M(q^2) \propto q^{-4}$$

即核子的磁形状因子以 q^{-4} 迅速减小，说明核子是非点状粒子。

如果对实验测得的核子的偶极型的电磁形状因子 (4.4.17) 式作逆 Fourier 变换，可知核子内部的电荷或磁矩分布具有如下指数形式：

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-r/a}$$

其中 $a = 0.24\,\text{fm}$。与之相应的电荷或磁矩分布的均方根为：

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 0.8\,\text{fm}$$

如果核子是点状无结构的，那么 $G_E(q^2)$ 和 $G_M(q^2)$ 与 q^2 无关。特别是对于点状无结构的质子，比较 (4.4.10)、(4.4.12) 两式，理论预期 $G_E^p(q^2) = G_M^p(q^2) = 1$。这与实验结果明显不符。

4.5 $e^- p$ 深度非弹性散射

4.5.1 从弹性散射到非弹性散射

考虑 e^- 和有结构 p 的弹性散射。当入射电子的能量增加时，四动量转移的平方 q^2 的平均值也随之增加。在高 q^2 情形下，$\tau = -\frac{q^2}{4M^2} \gg 1$，弹性散射的 Rosenbluth 公式变为：

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{elastic}} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4\frac{\theta}{2}} \frac{E_3}{E_1} \left(\frac{q^2}{2M^2} G_M^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

由于在高 q^2 情形时，质子的磁形状因子以 q^{-4} 迅速减小，因此：

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{elastic}} \propto q^{-6}$$

即弹性散射截面以 q^{-6} 迅速减少，如图 4.15 中点划线所示。这说明在高 q^2 时发生弹性散射的可能性很小。

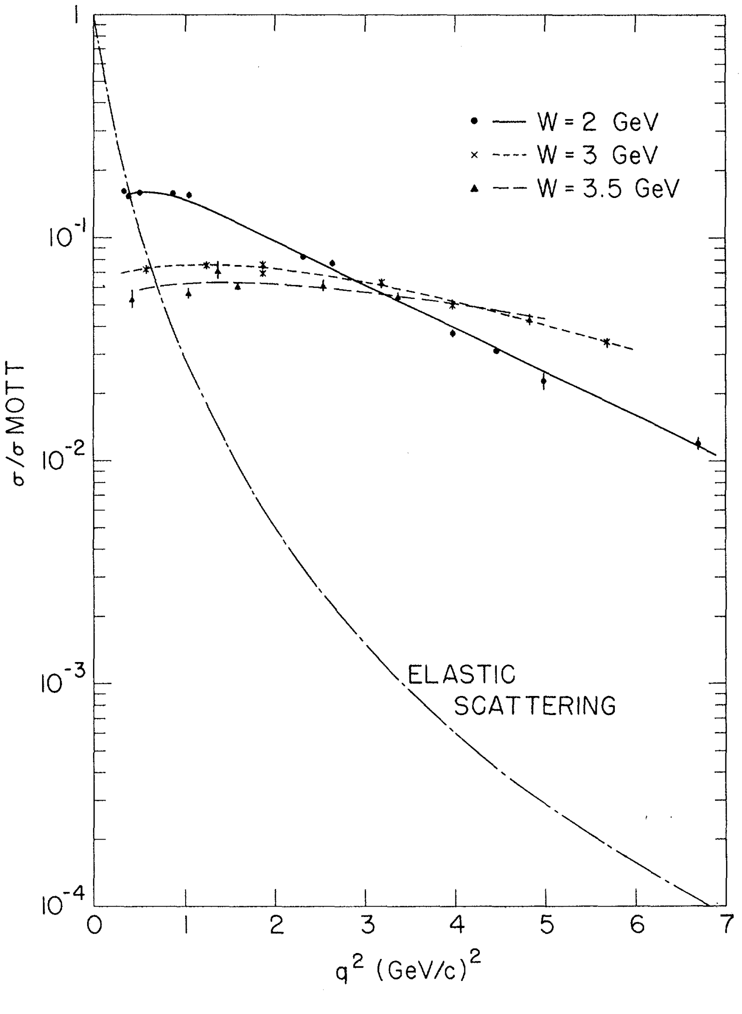


图 4.15: 弹性和非弹性散射的截面随 q^2 的变化。点划线为弹性散射的 Rosenbluth 公式预言，数据点为实验测量值，取自 M. Breidenbach *et al.*, *Phys. Rev. Lett* **23** (1969) 935。图中 W 是非弹性散射时末态强子系统的不变质量，我们用 M_X 表示。

事实上，随着 q^2 增高，e^-p 弹性散射逐渐变为非弹性散射：

$$e^- \ + \ p \ \rightarrow \ e^- \ + \ X$$

此时靶质子碎裂为强子系统 X (例如一个质子和一个或几个 π 介子)，如图 4.16 所示。特别是当 q^2 很大时的非弹性散射称为**深度非弹性散射 (deep inelastic scattering, DIS)**。对于非弹性散射过程，末态强子系统 X 的不变质量 M_X 或者 W 为 [2]：

$$M_X^2 = W^2 \equiv p_4^2 = (q + p_2)^2 \tag{4.5.1}$$

显然 M_X 不等于质子的质量 M。由于 X 必须包含至少一个重子，而质子是质量最轻的重子，因此 M_X 必定大于 M，$M_X > M$。

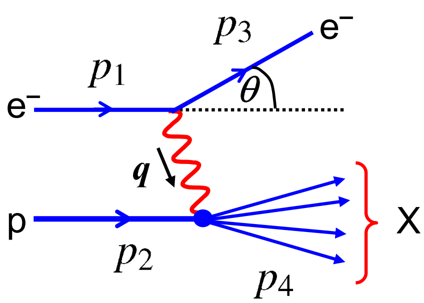


图 4.16: $e^- + p \rightarrow e^- + X$ 深度非弹性散射。

图 4.17 所示是 $E_1 = 4.879\,\text{GeV}$ 的电子和质子靶散射的微分散射截面测量结果。在散射角 $\theta = 10°$ 处放置探测器，测量散射电子的能量 E_3，从而得到微分散射截面。系统运动学完全由 E_3 和 θ 决定。例如，在给定 θ 和 E_3 下，末态强子系统的不变质量是：

$$M_X^2 = 10.06 - 2.03E_3$$

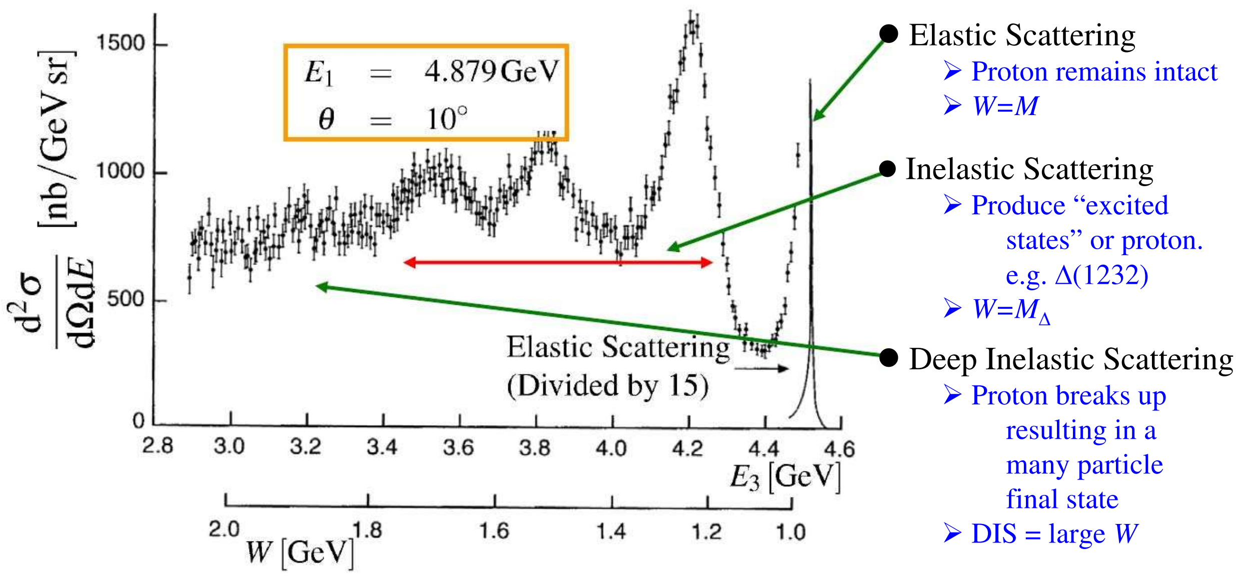


图 4.17: 弹性和非弹性散射的截面随 E_3 和 W 的变化。

[2] 许多文献中末态强子系统的不变质量 M_X 用 W 表示，例如图 4.15 中所示。

注意图 4.17 中的弹性散射、非弹性散射和 DIS 等三个区域及其与 E_3 和 M_X 之间的大致对应关系。在弹性散射区域，质子结构保持不变，$M_X = M$；在非弹性散射区域，将产生新粒子，例如 Δ^+ 粒子 (从核物理的角度可以视之为质子的激发态)，此时 $M_X > M$；在 DIS 区域，质子破碎，产生许多终态粒子，此时有大的不变质量 M_X。

利用不同入射电子能量 E_1，在不同散射角 θ，重复以上实验测量，可以得到散射截面和 q^2 的依赖关系，结果如图 4.15 所示。实验发现，弹性散射的截面随着 q^{-6} 降低，说明核子不是点状的；非弹性散射的截面和 q^2 有轻微的依赖关系；DIS 的截面基本上和 q^2 无关，说明形状因子为 1，核子内部存在点状结构。

4.5.2 非弹性散射的运动学

为了定量描述非弹性散射过程，人们引入四个新的运动学变量 x, y, ν, Q^2。

- 定义恒正的 Lorentz 不变量 Q^2：

$$\boxed{Q^2 \equiv -q^2} \tag{4.5.2}$$

- 定义无量纲的 Lorentz 不变量 x：

$$\boxed{x \equiv \frac{Q^2}{2p_2 \cdot q}} \tag{4.5.3}$$

x 称为 Bjorken 标度变量 (Bjorken scaling variable)。根据 (4.5.1)、(4.5.2) 式可得：

$$Q^2 = 2p_2 \cdot q + M^2 - M_X^2$$

对于非弹性散射，$M_X > M$，故 $Q^2 < 2p_2 \cdot q$，于是：

$$\boxed{0 < x < 1 \qquad \text{(inelastic)}}$$

对于弹性散射，$M_X = M$，故 $Q^2 = 2p_2 \cdot q$，于是：

$$\boxed{x = 1 \qquad \text{(elastic)}}$$

- 定义无量纲 Lorentz 不变量 y：

$$\boxed{y \equiv \frac{p_2 \cdot q}{p_2 \cdot p_1}} \tag{4.5.4}$$

在质心系中，如果忽略电子和质子质量，则：

$$\begin{aligned} p_1 &= (E, 0, 0, E) \\ p_2 &= (E, 0, 0, -E) \\ p_3 &= (E, E\sin\theta^*, 0, E\cos\theta^*) \end{aligned}$$

式 (4.5.4) 中的分母为：

$$p_2 \cdot p_1 = 2E^2$$

式 (4.5.4) 中的分子为：

$$p_2 \cdot q = p_2 \cdot p_1 - p_2 \cdot p_3 = 2E^2 - (E^2 + E^2 \cos\theta^*) = E^2(1 - \cos\theta^*)$$

于是质心系中变量 y 为：

$$y = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta^*) \tag{4.5.5}$$

显然：

$$\boxed{0 < y < 1}$$

在实验室系中：

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1, 0, 0, E_1) \\ p_2 &= (M, 0, 0, 0) \\ q &= (E_1 - E_3, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) \end{aligned}$$

式 (4.5.4) 中的分母为：

$$p_2 \cdot p_1 = ME_1$$

式 (4.5.4) 中的分子为：

$$p_2 \cdot q = M(E_1 - E_3)$$

于是实验室系中 y 为：

$$y = 1 - \frac{E_3}{E_1} \tag{4.5.6}$$

即 y 是入射电子能量丢失的比例。因为 $0 < E_3 < E_1$，故仍然有 $0 < y < 1$。

❍ 定义 Lorentz 不变量 ν：

$$\boxed{\nu \equiv \frac{p_2 \cdot q}{M}} \tag{4.5.7}$$

在实验室系中 $p_2 \cdot q = M(E_1 - E_3)$，因此：

$$\nu = E_1 - E_3 \tag{4.5.8}$$

即 ν 是入射电子的能量丢失。

说明：

上面定义的四个运动学变量 x, y, ν, Q^2 并不是独立的。利用质心系总能量：

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1 \cdot p_2 + M^2 + m^2$$

略去电子质量，得到：

$$2p_1 \cdot p_2 = s - M^2 \tag{4.5.9}$$

于是：

$$xy = \frac{Q^2}{2p_2 \cdot q} \frac{p_2 \cdot q}{p_2 \cdot p_1} = \frac{Q^2}{2p_2 \cdot p_1} = \frac{Q^2}{s - M^2}$$

故 Q^2,x,y 满足关系：

$$Q^2=(s-M^2)xy \tag{4.5.10}$$

利用变量 ν 的定义 (4.5.7) 式以及(4.5.9) 式，可以把 x,y 表示为：

$$x=\frac{Q^2}{2p_2\cdot q}=\frac{Q^2}{2M\nu} \tag{4.5.11}$$

$$y=\frac{p_2\cdot q}{p_2\cdot p_1}=\frac{2M}{s-M^2}\nu \tag{4.5.12}$$

注意 y 和 ν 之间只相差一个常数因子 $\frac{2M}{s-M^2}$，因此它们实质上是一个变量。

4.5.3　非弹性散射的截面

为了得到 DIS 的截面公式，我们首先回顾 $e^-+p\to e^-+p$ 弹性散射。前面已经提到，对于弹性散射 $(x=1)$，只有一个独立的运动学变量，例如可以选用散射角作为参数。在实验室系中 $e^-+p\to e^-+p$ 弹性散射的微分截面由 Rosenbluth 公式表述：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\alpha^2}{4E_1^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E_3}{E_1}\left(\frac{G_E^2+\tau G_M^2}{1+\tau}\cos^2\frac{\theta}{2}+2\tau G_M^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

其中：

$$\tau=\frac{Q^2}{4M^2}$$

利用上一节介绍的 Lorentz 不变的运动学变量，可以把 Rosenbluth 公式写成 Lorentz 不变的形式 (请证明)：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}Q^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[\frac{G_E^2+\tau G_M^2}{1+\tau}\left(1-y-\frac{M^2y^2}{Q^2}\right)+\frac{1}{2}y^2G_M^2\right]$$

上式可进一步写为：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}Q^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[\left(1-y-\frac{M^2y^2}{Q^2}\right)f_2(Q^2)+\frac{1}{2}y^2f_1(Q^2)\right]$$

接着讨论 $e^-+p\to e^-+X$ 非弹性散射。在给定质心系总能量下，非弹性散射的运动学需要两个变量才能完全确定，故非弹性散射的微分散射截面依赖于两个变量，我们选择 x 和 Q^2。可以证明 Lorentz 不变的非弹性散射的 (通过单光子交换) 微分散射截面为：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}Q^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[\left(1-y-\frac{M^2y^2}{Q^2}\right)\frac{F_2(x,Q^2)}{x}+y^2F_1(x,Q^2)\right]} \tag{4.5.13}$$

式中 $F_1(x,Q^2)$ 和 $F_2(x,Q^2)$ 称为**结构函数 (structure function)**，它们是 x 和 Q^2 的函数，故不能解释为电荷分布和磁矩分布的 Fourier 变换 (即电磁形状因子)。

最后，在高能情形下 $(Q^2\gg M^2y^2)$，发生的是 DIS，此时 (4.5.13) 式变为：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}Q^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[(1-y)\frac{F_2(x,Q^2)}{x}+y^2F_1(x,Q^2)\right]} \tag{4.5.14}$$

注意上式对于 ep 非弹性散射和 en 非弹性散射同样适用。为了区分这些非弹性散射，可以在 σ, F_1, F_2 上标记 ep, en 等字样。我们将说明上式是如何与质子的部分子模型联系的 (参考 (4.5.30) 式)。我们还将看到 $F_1(x,Q^2)$ 和 $F_2(x,Q^2)$ 描述了核子中夸克 (和胶子) 的动量分布 (参考 (4.5.31) 式)。

核子的结构函数 $F_1(x,Q^2)$、$F_2(x,Q^2)$ 还不能通过理论推导得到，它们必须由实验测得。在实验室系中，对于给定的入射电子能量 E_1，四个运动学变量都可以用散射电子的散射角 θ 和能量 E_3 表示：

$$
\begin{aligned}
Q^2 &= 4E_1E_3\sin^2\frac{\theta}{2}\\
x &= \frac{Q^2}{2M(E_1-E_3)}\\
y &= 1-\frac{E_3}{E_1}\\
\nu &= E_1-E_3
\end{aligned}
$$

于是 DIS 的微分散射截面 (4.5.14) 式变为：

$$
\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}E_3\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left[\frac{1}{\nu}\underbrace{F_2(x,Q^2)}_{\text{电磁结构函数}}\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{2}{M}\underbrace{F_1(x,Q^2)}_{\text{纯磁结构函数}}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]} \tag{4.5.15}
$$

上式和弹性散射情形下的 Rosenbluth 公式很相似，因此 $F_2(x,Q^2)$ 和 $F_1(x,Q^2)$ 可以类比弹性散射时的 $f_2(q^2)$ 和 $f_1(q^2)$，分别是电磁结构函数和纯磁结构函数。

4.5.4 Bjorken 标度和 Callan-Gross 关系

世界上第一个关于 DIS 的系列实验是于 1960 年代在 SLAC 进行的。实验通过测量不同入射电子能量 E_1 和不同散射角 θ 处，因而不同 x 和 Q^2 下的微分散射截面，确定结构函数 $F_1(x,Q^2)$ 和 $F_2(x,Q^2)$。

SLAC 的系列实验给出一个很令人惊奇的结果，即对于某一个固定的 x 值，结构函数 $F_1(x,Q^2)$ 和 $F_2(x,Q^2)$ 几乎与 Q^2 无关：

$$
\boxed{\begin{aligned}
F_1(x,Q^2) &\rightarrow F_1(x)\\
F_2(x,Q^2) &\rightarrow F_2(x)
\end{aligned}} \tag{4.5.16}
$$

这种特性称为 **Bjorken 标度 (Bjorken scaling)**。图 4.18 所示是在某特定 $x=0.25$ 情形下实验测得的质子的电磁结构函数 $F_2\,(x,Q^2)$ 和 Q^2 的依赖关系。如果核子有结构，且其内部结构成份是点状的，则非弹性散射的结构函数将表现为 Q^2 无关，这可以类比电子和类点质子发生弹性散射时的常数形状因子。Bjorken 标度强烈地暗示着电子和核子的 DIS 发生在电子和核子内部的某些点状成份之间。

DIS 实验中还发现一个重要现象，即结构函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 并不是独立的，它们满足 **Callan-Gross 关系**：

$$
\boxed{F_2(x) = 2xF_1(x)} \tag{4.5.17}
$$

如图 4.19 所示。我们将会看到如果质子中的点状成份是自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子，那么可以自然得到 Callan-Gross 关系。如果点状成份自旋为零，那么纯磁结构函数 $F_1(x)=0$。

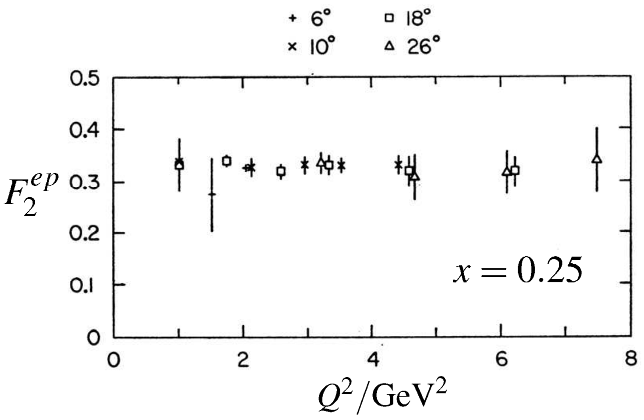


图 4.18: DIS 中的 Bjorken 标度。

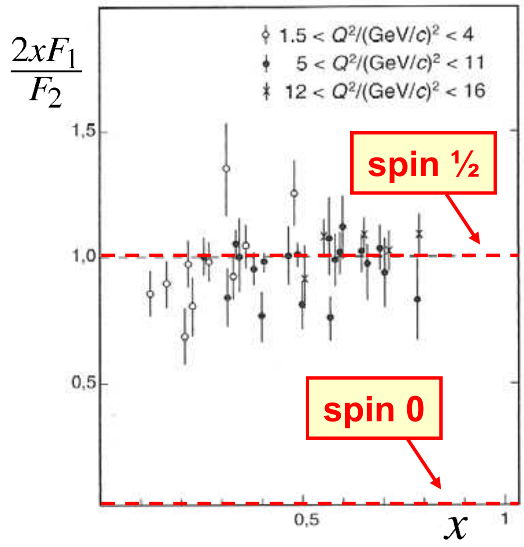


图 4.19: DIS 中的 Callan-Gross 关系。

4.5.5 部分子模型

在夸克和胶子被普遍认同之前，Feynman 就提出了核子的**部分子模型 (parton model)**。下面我们以质子为例展开讨论，这种讨论也适用于中子。

根据部分子模型，质子由一些称为部分子的点状成份组成，电子和质子的 DIS 实际上是电子和质子内部自旋为 $\frac{1}{2}$ 的准自由的 (quasi-free) 点状部分子之间通过单个虚光子传递相互作用的弹性散射 $e^- + q \to e^- + q$，如图 4.20 所示。现在普遍认为质子内的点状部分子就是夸克 (和胶子)。部分子模型可以很好地解释 e^-p DIS 中的 Bjorken 标度和 Callan Gross 关系。

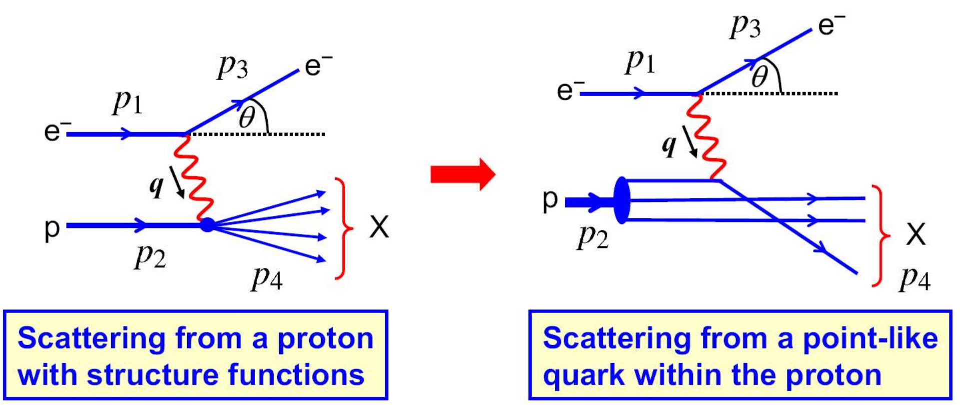


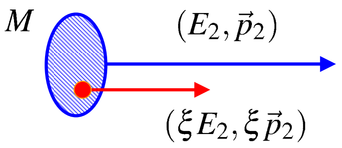
图 4.20: $e^- + p \to e^- + X$ 深度非弹性散射的部分子模型图象。

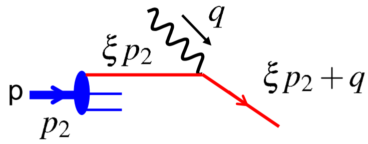
一、e^-q 弹性散射的运动学

在质子动量为无限的参考系 (infinite momentum frame) 中利用部分子模型讨论 e^-q 弹性散射是方便的。在这种参考系中，相对论时间延缓减慢了夸克之间的相对作用率。在虚光子和夸克相互作用的短暂时间内，夸克基本上表现为自由粒子，不与质子内其他夸克发生相互作用。这类似核物理中的脉冲近似。

在质子的无限动量参考系中，质子能量很大 ($E_2 \gg M$)，因此 $p_2 = (E_2, 0, 0, E_2)$，而且可以忽略夸克的质量及其垂直质子运动方向的横动量。于是可以认为夸克沿着质子方向运动，它携带的四动量是质子四动量的份额，记作：

$$\boxed{\tilde{p}_2 = \xi p_2} \tag{4.5.18}$$





在夸克和虚光子发生相互作用后，被散射的夸克的四动量为：

$$\boxed{\tilde{p}_4 = \xi p_2 + q} \tag{4.5.19}$$

由于在部分子模型中夸克质量可以忽略：

$$\tilde{p}_4^2 = m_q^2 \approx 0$$

因此 (4.5.19) 式的平方为零：

$$\xi^2 p_2^2 + q^2 + 2\xi p_2 \cdot q = 0$$

对于散射夸克有：

$$\xi^2 p_2^2 = \tilde{p}_2^2 = m_q^2 \approx 0$$

根据上面两式，注意 $q^2 = -Q^2$，可得：

$$\boxed{\xi = \frac{Q^2}{2p_2 \cdot q} = x} \tag{4.5.20}$$

这正是 Bjorken 标度变量 x 的定义式。因此在部分子模型中，Bjorken 标度变量 x 是散射夸克所携带的质子动量的份额。

我们在讨论 $e^- p$ DIS 时，$e^- p$ 质心系中的总能量 s，以及 DIS 运动学参数 y 和 x 可以用电子和质子的四动量 p_1、p_2 以及四动量转移 q 表示：

$$s = (p_1 + p_2) \simeq 2p_1 \cdot p_2$$
$$y = \frac{p_2 \cdot q}{p_2 \cdot p_1}$$
$$x = \frac{Q^2}{2p_2 \cdot q}$$

现在讨论 $e^- q$ 的弹性散射，相应地，$e^- q$ 质心系中的总能量 $\tilde{s}$，夸克层次的运动学参数 $\tilde{y}$ 和 $\tilde{x}$ 也可以用电子和夸克的四动量 p_1、$\tilde{p}_2$ 以及四动量转移 q 表示：

$$\tilde{s} = (p_1 + \tilde{p}_2)^2 = (p_1 + xp_2)^2 = 2xp_1 \cdot p_2 = xs \tag{4.5.21}$$

$$\tilde{y} = \frac{\tilde{p}_2 \cdot q}{\tilde{p}_2 \cdot p_1} = \frac{xp_2 \cdot q}{xp_2 \cdot p_1} = y \tag{4.5.22}$$

$$\tilde{x} = 1 \quad \text{(弹性散射，即假设夸克不破碎)} \tag{4.5.23}$$

式 (4.5.22) 表明 $e^- q$ 散射中电子的能量丢失的 $\tilde{y}$ 等于 $e^- p$ 散射中的 y 值。

二、微分散射截面

习题三中计算了 $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$ 弹性散射过程的不变矩阵元：

$$\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = \frac{8e^4}{(p_1 - p_3)^4}\left[(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)\right]$$

容易证明 Lorentz 不变的微分散射截面是 (请证明)：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{q^4}\left[1 + \left(1 + \frac{q^2}{s}\right)^2\right] \tag{4.5.24}$$

其中 $q = p_1 - p_3$ 是能量转移。将上式应用到 $e^- + q \to e^- + q$ 散射中：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q^2} = \frac{2\pi\alpha^2 e_q^2}{q^4}\left[1 + \left(1 + \frac{q^2}{\tilde{s}}\right)^2\right]} \tag{4.5.25}$$

式中 e_q 是夸克的电荷因子。再把 e^-p 的 DIS 中运动学变量之间的关系 (4.5.10) 式：

$$Q^2 = (s - M^2)xy$$

应用到 e^-q 弹性散射，此时上式需作如下替换：

$$\begin{aligned} M &\to m_q \approx 0 \\ s &\to \tilde{s} \\ x &\to \tilde{x} = 1 \end{aligned}$$

不过 $y = \tilde{y}$ 不变。于是：

$$Q^2 = \tilde{s}y \tag{4.5.26}$$

或者

$$\frac{q^2}{\tilde{s}} = -y \tag{4.5.27}$$

把 (4.5.27) 式代入 (4.5.25) 式，得到 e^-q 弹性散射的截面：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{q^4}e_q^2\left[1 + (1-y)^2\right]\tilde{s} \tag{4.5.28}$$

或者利用 (4.5.26) 式写为：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}Q^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}e_q^2\left[(1-y) + \frac{y^2}{2}\right]} \tag{4.5.29}$$

上式是 $e^- + q \to e^- + q$ 弹性散射的微分截面。由于夸克携带的质子动量的份额为 x，因此在具体应用 (4.5.29) 式前有必要对夸克的动量分布进行讨论。

三、部分子分布函数

在部分子模型中，一个特定的夸克 (例如质子中的 u 或 d 夸克) 所携带的质子动量的份额 x 是不确定的，当夸克之间交换动量时这个份额是变化的，具有一定的分布。根据 QCD，这种份额的变化源自夸克之间的胶子交换。为了定量考虑夸克的动量分布，人们引入夸克**部分子分布函数 (parton distribution function, PDF)** $q^p(x)$：

$$q^p(x)\mathrm{d}x \quad : \quad \text{质子 } p \text{ 中动量在 } x \to x+\mathrm{d}x \text{ 之间的 } q \text{ 夸克的数目}$$

我们可以根据 PDF 的连续性要求，对质子的夸克 PDF 作一个合理的定性推测。如果质子是由一个夸克组成的，那么该夸克携带质子的全部动量，其 PDF $q^p(x)=1$，如图 4.21 (左一) 所示。如果质子由三个静态夸克组成，那么每个夸克携带 $\frac{1}{3}$ 的质子动量，夸克 PDF 为 $q^p(x)=\frac{1}{3}$。质子的这种组份夸克决定了它的量子数，所以我们也常常把组份夸克称为**价夸克 (valence quark)**。如果进一步假设夸克之间存在相互作用，那么这些夸克就要重新分配它们的动量，$q^p(x)=\frac{1}{3}$ 处的分界就会模糊，确定的动量值将变为一个分布，如图 4.21 (右二) 所示。如果质子中还包含更高阶的相互作用，那么质子内部将存在更多的成份，例如存在一些慢动量的胶子碎片 $g\to q\overline{q}$，于是夸克 PDF $q^p(x)$ 将进一步畸变，如图 4.21 (右一) 所示。质子内部这种由胶子产生的 $q\overline{q}$ 称为**海夸克 (sea quark)**，它们是虚粒子，时刻产生复湮灭。

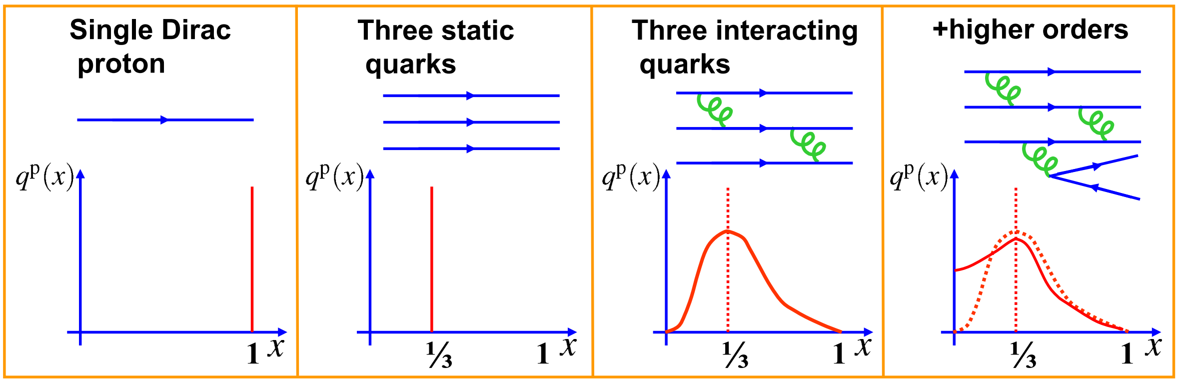


图 4.21: 部分子分布函数的可能形式。

四、e^-p DIS的部分子模型解释

有了夸克 PDF，电子和质子中动量在 $x\to x+\mathrm{d}x$ 之间的 q 夸克的微分散射截面为：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{ep}}{\mathrm{d}Q^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[(1-y)+\frac{y^2}{2}\right]\cdot e_q^2 q^p(x)\mathrm{d}x$$

对质子中所有夸克类型求和，得到 e^-p DIS 的微分散射截面：

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{ep}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}Q^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[(1-y)+\frac{y^2}{2}\right]\cdot\sum_q e_q^2 q^p(x) \tag{4.5.30}$$

把上式与用结构函数表示的 e^-p DIS 公式 (4.5.14) 比较：

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}Q^2}=\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[(1-y)\frac{F_2(x,Q^2)}{x}+y^2F_1(x,Q^2)\right]$$

立即得到：

$$\boxed{F_2^{ep}(x,Q^2)=2xF_1^{ep}(x,Q^2)=x\sum_q e_q^2 q^p(x)} \tag{4.5.31}$$

上式表明：

- 结构函数和 Q^2 无关，因此部分子模型自然地预言了 e^-p DIS 的 Bjorken 标度：

  $$F_1(x,Q^2)\to F_1(x),\qquad F_2(x,Q^2)\to F_2(x)$$

  这种 Bjorken 标度的原因在于电子和质子内部点状粒子的散射。

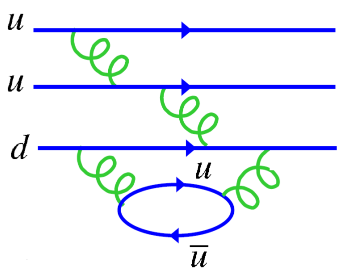
- 部分子模型可以自然地给出 Callan-Gross 关系：

  $$F_2(x)=2xF_1(x)$$

  这种 Callan-Gross 关系成立的原因在于夸克是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的点状 Dirac 粒子，其电荷和磁矩有确定的关系，因此电磁结构函数和纯磁结构函数之间也是确定的。如果夸克自旋为零，那么它将没有内禀磁矩，于是磁散射项 $\sin^2\frac{\theta}{2}$ 消失，从而导致 $F_1=0$，这与实验事实不符。

4.5.6 部分子分布函数

由于强作用的 α_s 很大，微扰理论不适用，因此目前夸克 PDF 还不能从 QCD 理论计算得到。注意 (4.5.31) 式给出了实验测量的结构函数和部分子模型中夸克 PDF $q^p(x)$ 之间的关系，故可以由结构函数确定夸克 PDF。由于高阶项的存在，质子中不仅有 u,d 夸克，还有 $\overline{u},\overline{d}$ 等反夸克 (我们忽略 s,c,b,t 等重夸克的微小贡献)。其中 u,d 来自价夸克和海夸克，$\overline{u},\overline{d}$ 完全来自海夸克。



对于 e^-p 和 e^-n 散射，我们有：

$$F_2^{ep}(x)=x\sum_q e_q^2 q^p(x)=x\left[\frac{4}{9}u^p(x)+\frac{1}{9}d^p(x)+\frac{4}{9}\overline{u}^p(x)+\frac{1}{9}\overline{d}^p(x)\right]$$
$$F_2^{en}(x)=x\sum_q e_q^2 q^n(x)=x\left[\frac{4}{9}u^n(x)+\frac{1}{9}d^n(x)+\frac{4}{9}\overline{u}^n(x)+\frac{1}{9}\overline{d}^n(x)\right]$$

考虑到核子的同位旋对称性，即中子 (udd) 和质子 (uud) 在交换 u,d 夸克时等同，则：

$$d^n(x)=u^p(x),\qquad u^n(x)=d^p(x)$$

因此中子的夸克 PDF 和质子的夸克 PDF 可以统一用质子的夸克 PDF 来定义：

$$u(x) \equiv u^p(x) = d^n(x)$$
$$d(x) \equiv d^p(x) = u^n(x)$$

类似地，对于反夸克有：

$$\overline{u}(x) \equiv \overline{u}^p(x) = \overline{d}^n(x)$$
$$\overline{d}(x) \equiv \overline{d}^p(x) = \overline{u}^n(x)$$

于是结构函数和夸克 PDF 的关系为：

$$\boxed{\begin{aligned} F_2^{ep}(x) = 2xF_1^{ep}(x) = x\left[\frac{4}{9}u(x) + \frac{1}{9}d(x) + \frac{4}{9}\overline{u}(x) + \frac{1}{9}\overline{d}(x)\right] \\ F_2^{en}(x) = 2xF_1^{en}(x) = x\left[\frac{4}{9}d(x) + \frac{1}{9}u(x) + \frac{4}{9}\overline{d}(x) + \frac{1}{9}\overline{u}(x)\right] \end{aligned}} \tag{4.5.32}$$

上式对 x 积分，得到：

$$\int_0^1 F_2^{ep}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left[\frac{4}{9}\big(u(x)+\overline{u}(x)\big) + \frac{1}{9}\big(d(x)+\overline{d}(x)\big)\right]\mathrm{d}x = \frac{4}{9}f_u + \frac{1}{9}f_d$$
$$\int_0^1 F_2^{en}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left[\frac{4}{9}\big(d(x)+\overline{d}(x)\big) + \frac{1}{9}\big(u(x)+\overline{u}(x)\big)\right]\mathrm{d}x = \frac{4}{9}f_d + \frac{1}{9}f_u$$

式中：

$$\begin{aligned} f_u \equiv \int_0^1 x\big[u(x)+\overline{u}(x)\big]\mathrm{d}x \\ f_d \equiv \int_0^1 x\big[d(x)+\overline{d}(x)\big]\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.5.33}$$

因为 $u(x)\mathrm{d}x$ 是质子中动量为 $x \to x+\mathrm{d}x$ 的 u 夸克的数目 (对于 $\overline{u}$ 夸克类似)，所以 f_u 是质子中 u 夸克和 $\overline{u}$ 反夸克所携带的质子动量的总份额，f_d 则是 d 和 $\overline{d}$ 所携带的质子动量的总份额。

实验测量结果表明 (其中 e^-p 散射的结果如图 4.22 所示)：

$$\int F_2^{ep}(x)\mathrm{d}x = 0.18$$
$$\int F_2^{en}(x)\mathrm{d}x = 0.12$$

根据 (4.5.33) 式得到：

$$\boxed{f_u \approx 0.36, \qquad f_d \approx 0.18} \tag{4.5.34}$$

式 (4.5.34) 说明了两个重要实验事实：

- 质子 (uud) 中 u 夸克携带的动量是 d 夸克携带动量的两倍，正如我们所预期的；
- 质子中夸克所携带的动量只占质子动量的一半，质子的其余动量由胶子携带。

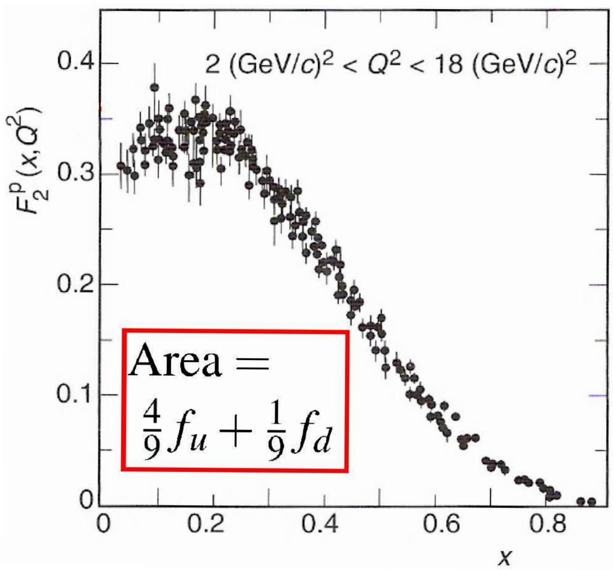


图 4.22: 结构函数 F_2^{ep} 和 x 的函数关系，面积为结构函数的积分。

现在我们已逐渐认识到核子是相当复杂的，其 PDF 不仅包含价夸克的贡献，也包括海夸克和胶子的贡献。这里只考虑核子的夸克 PDF。我们把核子中 u 夸克的分布函数 $u(x)$ 和 d 夸克的分布函数 $d(x)$，以及 $\overline{u}$ 夸克的分布函数 $\overline{u}(x)$ 和 $\overline{d}$ 夸克的分布函数 $\overline{d}(x)$，分解为价夸克成份和海夸克成份的贡献：

$$\begin{aligned} u(x) &= u_V(x) + u_S(x), & d(x) &= d_V(x) + d_S(x) \\ \overline{u}(x) &= \overline{u}_S(x) & \overline{d}(x) &= \overline{d}_S(x) \end{aligned} \tag{4.5.35}$$

如前所述，价夸克是夸克模型中的组份夸克，海夸克是高阶 QCD 过程中产生的夸克反夸克对，例如 $g \to u\overline{u}, d\overline{d}$。

质子包含两个价夸克 u 和一个价夸克 d，因此：

$$\int_0^1 u_V(x)\mathrm{d}x = 2, \qquad \int_0^1 d_V(x)\mathrm{d}x = 1$$

或者

$$u_V(x) \approx 2d_V(x)$$

但是我们无法先验地确定海夸克的数目，也就不可能对 $u_S(x), d_S(x), \overline{u}(x), \overline{d}(x)$ 的积分作出约束。不过考虑到海夸克来自胶子的对产生，且 $m_u \approx m_d$，我们可以合理地认为：

$$u_S(x) = d_S(x) = \overline{u}_S(x) = \overline{d}_S(x) = S(x) \tag{4.5.36}$$

把 (4.5.35) 式、(4.5.36) 式代入结构函数和夸克 PDF 的关系式 (4.5.32) 式，得到：

$$F_2^{ep} = x\left[\frac{4}{9}u_V(x) + \frac{1}{9}d_V(x) + \frac{10}{9}S(x)\right]$$

对于中子可类似处理，得到：

$$F_2^{en} = x\left[\frac{4}{9}d_V(x) + \frac{1}{9}u_V(x) + \frac{10}{9}S(x)\right]$$

两者之比为：

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} = \frac{4d_V(x) + u_V(x) + 10S(x)}{4u_V(x) + d_V(x) + 10S(x)} \tag{4.5.37}$$

因为胶子传播子为 $\frac{1}{q^2}$，所以高阶 QCD 过程中主要产生的是低能胶子。既然质子中的海夸克来自胶子对的产生，海夸克自然也以低能夸克对为主。因此我们预期在 x 较小时，质子中的夸克成份以海夸克为主：

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \xrightarrow{x\to 0} 1$$

在 x 较大时，则有：

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \xrightarrow{x\to 1} \frac{4d_V(x) + u_V(x)}{4u_V(x) + d_V(x)}$$

注意到 $u_V(x) \approx 2d_V(x)$，上式给出：

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \xrightarrow{x\to 1} \frac{2}{3} \qquad \text{(parton model)}$$

实验结果如图 4.23 所示。当 $x \to 0$ 时理论和实验符合很好。但是当 $x \to 1$ 时，实验结果为：

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \xrightarrow{x\to 1} \frac{1}{4} \qquad \text{(experiment)}$$

理论预期与实验结果明显不符。上式的实验结果表明：当 $x \to 1$ 时，$d_V(x) \ll u_V(x)$，说明此时理论预期 $u_V(x) \approx 2d_V(x)$ 只是近似成立。对于这种实验结果目前还不能作出合理的理论解释。

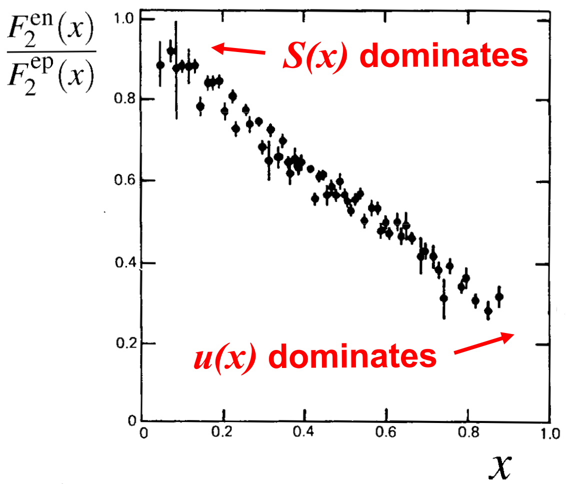


图 4.23: $\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)}$ 和 x 的依赖关系的实验结果。

拟合所有 DIS 实验数据，可以得到各种 PDF，最新的拟合结果如图 4.24 所示。实验数据包含中微子和核子的散射结果，拟合时假设 $u_S(x) = \overline{u}(x)$。图中胶子 PDF $g(x)$ 由强子强子对撞实验给出。我们发现：

- 除 x 很大的情形外，$u_V(x) \approx 2d_V(x)$；
- 当 $x < 0.2$ 时，胶子占主导地位；
- $\overline{d}(x) > \overline{u}(x)$ (对此结果还没有令人满意的解释)；
- 存在较小的奇异夸克的 $s(x)$ 成份 (注意和前面的海夸克分布函数 $S(x)$ 区分)。

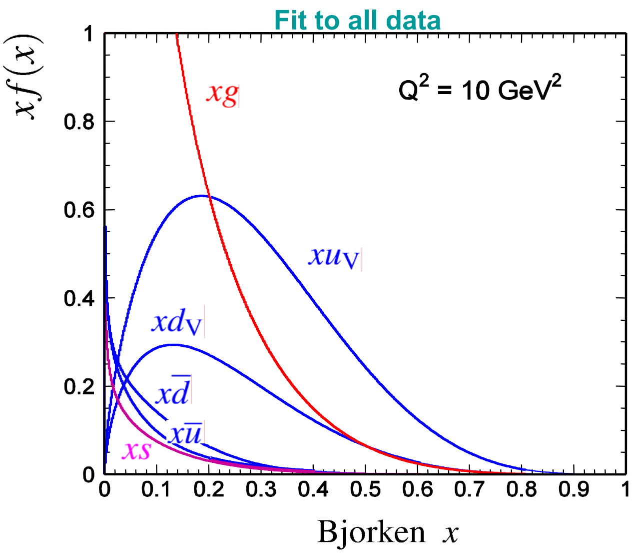


图 4.24: 拟合所有实验数据后得到的部分子分布函数。

对质子的结构常数进行实验测量不仅可以检验 QCD 理论，而且可以给出质子的部分子分布函数。在欧洲核子研究中心 (CERN) 的大型强子对撞机 (LHC) 上，7 TeV 的质子和 7 TeV 的质子对撞，其基本的相互作用是质子中部分子之间的相互作用。例如在 LHC，标准模型 Higgs 粒子主要通过胶子胶子融合 (gluon-gluon fusion) 产生，如图 4.25 所示。Higgs 粒子的产生截面依赖于胶子 PDF：

$$\sigma(pp \to H^0 X) \sim \int_0^1 \int_0^1 g(x_1) g(x_2) \sigma(gg \to H^0) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

根据实验测得的散射截面，可以给出胶子 PDF 的可能形式。

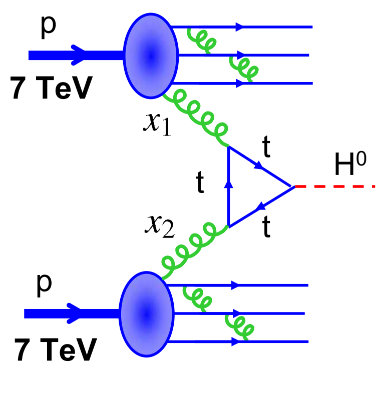
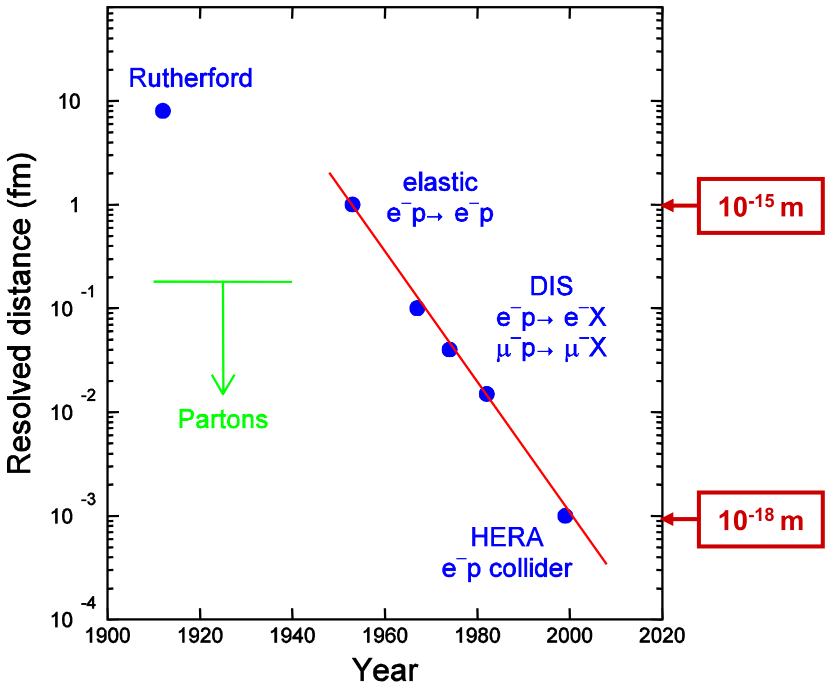


图 4.25: LHC 实验中通过胶子胶子融合产生 Higgs 粒子。

4.5.7 标度破坏

最近几十年中，粒子加速器的能量越来越高。其中的一个典型代表是 1991-2007 年期间在德国 Hamberg DESY 运行的 $e^{\pm}p$ 对撞机 Hera，其电子能量为 27.5 GeV，质子能量为 820 GeV，质心系能量为 $\sqrt{s} = 300$ GeV。加速器能量越高，e^-p DIS 中虚光子的能量也越高，相应的虚光子的波长越短：

$$\lambda_\gamma = \frac{h}{|\mathbf{q}|} \sim \frac{1\,\text{GeV fm}}{|\mathbf{q}|\,\text{GeV}}$$



在 Hera 对撞机中虚光子的波长达到 10^{-18} m，可以在极高的 Q^2 和很低的 x 下研究质子的结构。特别是，当 λ_γ 和夸克尺度相当时，就可以研究夸克的结构问题。例如，若夸克不是点状的，则会观测到 e^-q 弹性散射截面随 Q^2 增加迅速减小的现象。Hera 对撞机上有两个探测器 (H1 和 ZEUS)，它们的实验结果如图 4.26 所示。实验表明：

- 在虚光子可达的波长内，没有发现散射截面随 Q^2 增加而迅速增加的现象，因此在 10^{-18} m 的精度内夸克无结构。Hera 的能量不足以研究夸克结构，研究的仍然是质子的结构。
- 当 $x > 0.05$ 时，F_2 仅轻微依赖于 Q^2，与质子的部分子模型的预期一致。
- 但是当 x 很小时，实验发现了明显的标度破坏现象，即当 x 很小时，Q^2 越高观测到的低 x 夸克成份越多 (如图 4.26 中向右上方向倾斜的实验点所示)：

$$F_2(x, Q^2) \neq F_2(x)$$

  前面 (第 263 页) 已经指出，QCD 可以预言 $F_2(x, Q^2)$ 中的 Q^2 依赖关系，但是不能预言 x 依赖关系，故 QCD 不能解释这种现象。对标度破坏的一个可能的定性解释是：在高 Q^2 时，虚光子波长更短，能“看到”更多的与胶子作用的夸克，这些夸克与胶子分享动量，因而动量更低。于是在高 Q^2 时能“看到”更多的低 x 夸克，如图 4.27 所示。

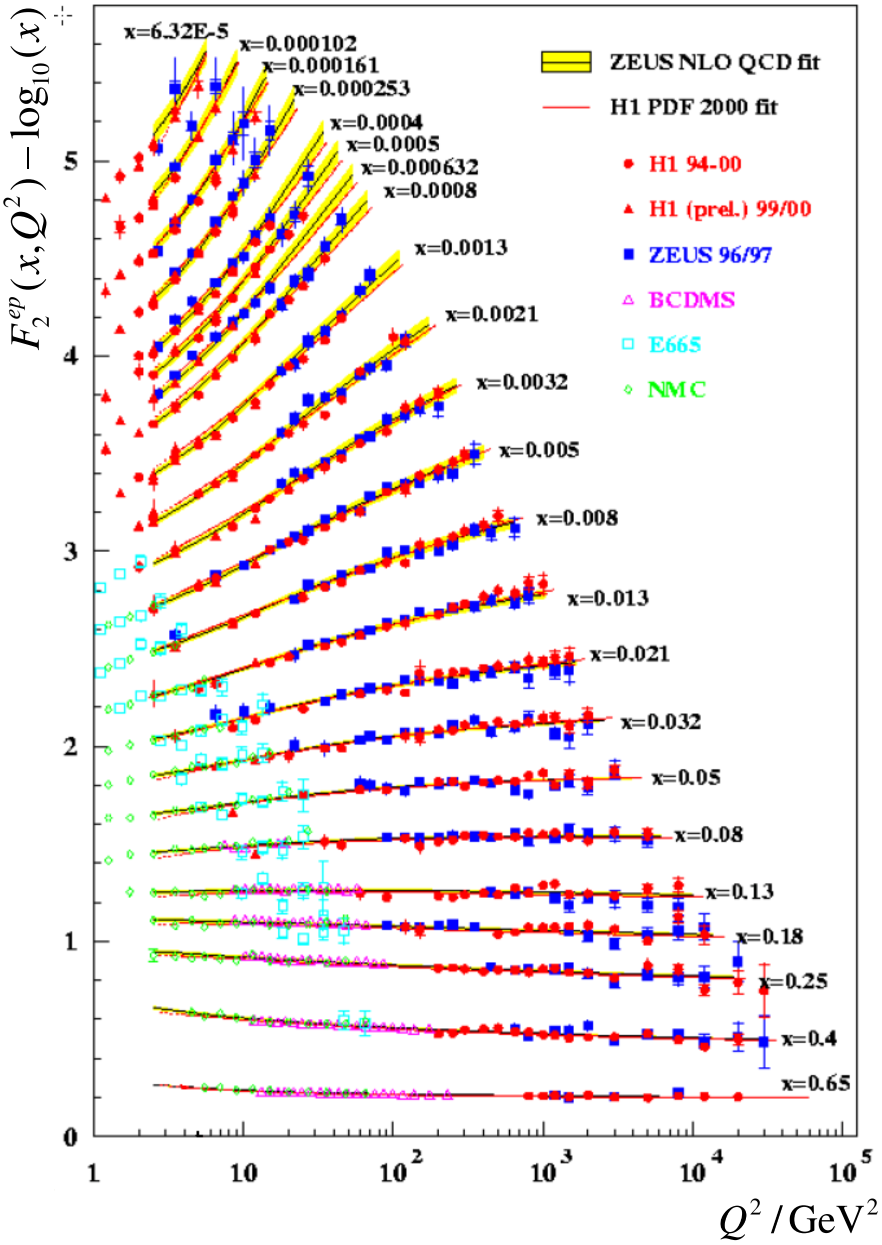


图 4.26: Hera 实验中结构函数 $F_2(x,Q^2)$ 和 Q^2 以及 x 的关系。

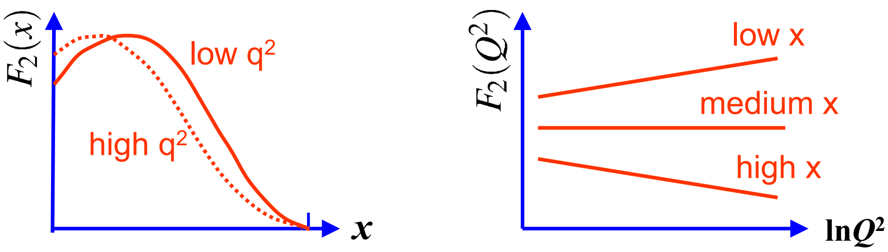


图 4.27: Bjorken 标度破坏的一种可能解释。

4.6 量子色动力学

本节简单介绍强相互作用的量子色动力学。首先通过胶子胶子的相互作用，引入色反屏蔽效应，定性解释强作用中跑动的耦合常数、渐近自由和色囚禁等特性，以及夸克的强子化。接着讨论 QCD 费曼规则，介绍色因子概念及其计算。最后是 QCD 的实例和应用。

4.6.1 胶子自相互作用

第 1.5.4 节中已经提到，在很多方面强相互作用和电磁相互作用很相似，它们都有八种基本作用顶点，都是通过无质量的传播子传递相互作用。因此描写强作用的 QCD 理论和描写电磁作用的 QED 理论也很不少相似之处，例如两者可以共享可重整化的规范理论的特性。但是 QCD 和 QED 又有很大不同，最主要的差异就是 QED 中的场量子光子不带电，QED 是 Abelian 的规范理论，而 QCD 的场量子胶子带色，自然界中存在八种双色态胶子，故胶子之间有自相互作用，QCD 是一种 non-Abelian 规范理论。胶子场比电磁场复杂，出现了许多不同寻常的现象和性质，其中最重要的性质是渐近自由和夸克囚禁。

一、色反屏蔽效应

胶子的自相互作用存在深刻的物理内涵，它使得 QCD 具有异于 QED 电荷屏蔽效应的色反屏蔽效应。

在 QED 中，由于量子涨落，一个真空中的电子能够突然发出一个虚光子，而发出的虚光子又可能转化为一对正负电子，正负电子对随即又湮灭为虚光子，再被电子吸收，如图 4.28 所示。注意类似图 4.28 这样的过程有无穷多个。于是真空中的原始电子实际上被非常多的 e^-e^+ 对 (电荷云) 包围着。

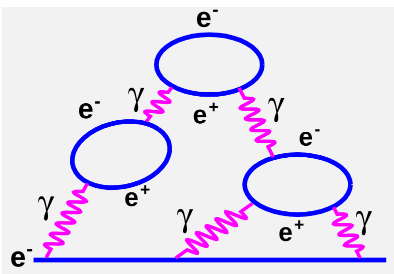


图 4.28: 真空中的自由电子被正反虚电子对包围。

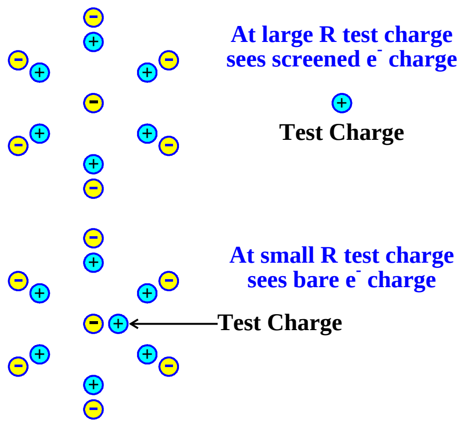


图 4.29: 不同距离的测试电荷测得不同的电子电荷。

由于异性电荷相互吸引，正电子比较偏向原始电子，如图 4.29 所示。如果我们想通过测量检验电荷所受的 Coulomb 力来确定原始电子的电荷，测量的结果将依赖于检验电荷所处位置。如果检验电荷距离原始电荷较远，它将看到原始电子被负的电荷所屏蔽。如果把检验电荷移向原始电荷，它会穿越屏蔽电子的电荷云。当检验电荷距离

原始电荷很近，它将看到裸的原始电子。检验电荷离原始电子越近，测得的电子电荷就越大。上面这种效应称为**电荷屏蔽 (charge screening)**。

类似地考虑真空中的夸克 (它携带某种特定色荷)。如果不考虑胶子的自相互作用，那么 QCD 色屏蔽效应和 QED 电荷屏蔽效应非常相似，QCD 真空涨落将导致该色荷周围围绕着虚的正反夸克云 (因而正反色荷云)，呈现出正常的色屏蔽现象。但是 QCD 中的胶子携带色荷，它还可以在原始色荷周围形成虚的胶子云 (因而色荷云)。如图 4.30 所示。

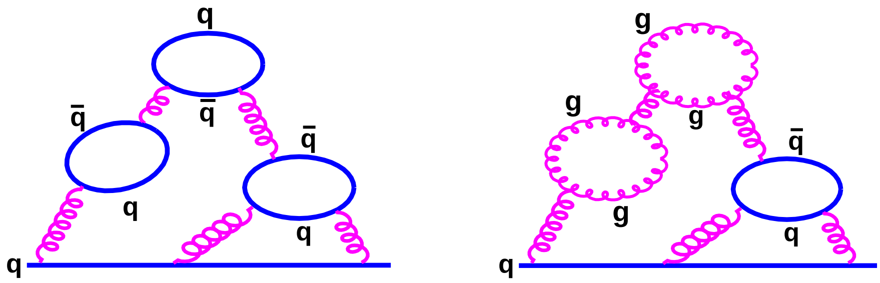


图 4.30: 自由夸克周围的正反虚夸克云 (左) 和虚胶子云 (右)。

虽然我们无法先验地了解虚胶子云的色荷分布对原始色荷的影响，但是诸多实验现象表明，它的影响必须和正反虚夸克云对原始色荷的影响相反，即虚胶子云的色荷分布使得原始色荷增加。实际上正反虚夸克云的影响依赖于夸克的味道数目 n_f，虚胶子云的影响依赖于颜色数目 n_c，故净效果依赖于理论中 n_f 和 n_c 的数目。QCD 理论给出一个参数：

$$a \equiv 2n_f - 11n_c$$

如果 $a > 0$，则净效果使得色荷减少，反之则增加。标准模型中夸克有六种味道和三种颜色 $n_f = 6$，$n_c = 3$，因此 $a = -21$，即正反虚夸克云和虚胶子云的色荷分布的最终效果是，随着检验色荷距离增大，原始色荷变大，这称为**色反屏蔽 (color anti-screening)**。

1. 由于 QCD 的色反屏蔽效应，当色荷之间距离增加 (能量减小) 时，色荷 (强相互作用的耦合常数) 以及与之相应的 α_s 增大。而在 QED 中，由于电荷屏蔽效应，电荷以及与之相应的精细结构常数随着电荷之间距离的增加而减小。QCD 和 QED 中的耦合常数均非真正的常数，这称为**跑动的耦合常数**，如图 4.31 所示。

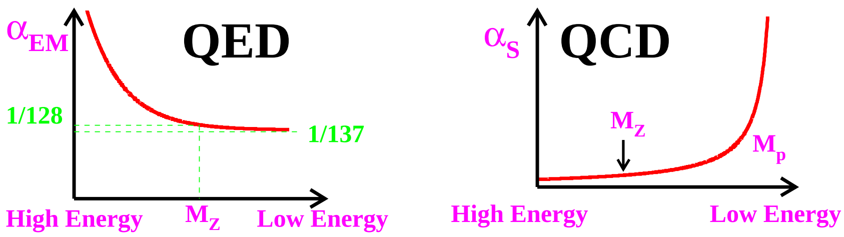


图 4.31: 跑动的耦合常数 α 和 α_s。

2. 在短距离 (或者高能量) 时，强相互作用的 α_s 相对长距离情形而言变弱了，这就是所谓的**渐近自由**。此时可以认为强作用粒子是自由的，可以用微扰理论处理。

二、色禁闭

胶子的自相互作用被认为是色囚禁的原因，因而也是夸克和胶子囚禁的原因，即自然界中不存在自由的夸克和胶子，夸克通过胶子传递的强作用被束缚在无色的强子中。下面我们通过比较正负电子对 e^-e^+ 和正反夸克对 $q\overline{q}$ (介子) 来定性地看待囚禁现象。

图 4.32 所示是一对正负电子 e^-e^+ 以及它们之间的静电场线。当 e^- 和 e^+ 之间的距离增大时，由于传递 Coulomb 力的光子没有自相互作用，没有什么东西可以阻碍静电场线往外辐射，因此静电场的能量密度减少。

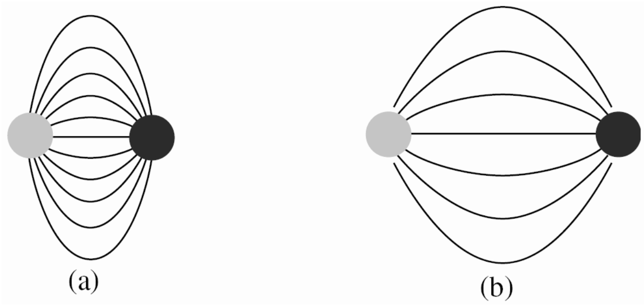


图 4.32: 正负电子之间的静电场线。随着 e^-e^+ 之间距离增大静电场的能量密度减少。

色场的行为则很不一样。图 4.33 给出了一对正反夸克 $q\overline{q}$ 和它们之间的色场线。由于传递强作用的胶子胶子之间的相互作用，色场线被收缩成流管状的色管。色管有张力，储存着夸克之间的强作用势能。当 q 和 $\overline{q}$ 之间的距离增大时，色管直径基本保持不变，故能量密度不变，或者说单位长度色管内储存的能量近似为常数。因此势能与夸克之间的距离 r 成正比 (忽略 Coulomb 项 $\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r}$)：

$$V(r) = kr \tag{4.6.1}$$

其中 $k \sim 1\,\text{GeV/fm}$。根据 (4.6.1) 式，要使带色的正反夸克 q 和 $\overline{q}$ 之间的距离为无限大，所需能量也是无限大。因此带色荷的夸克和胶子总是囚禁在无色态例如强子中。这种称为红外奴役 (infrared slavery) 的行为给出了色禁闭现象的一种定性解释，不过这种解释还不能用理论证明。



图 4.33: 正反夸克之间的色场线。随着 $q\overline{q}$ 之间距离增大色场的能量密度基本不变。

三、强子化和喷注

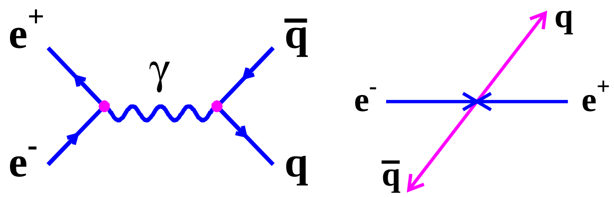
考虑正负电子对撞产生强子的过程：

$$e^- \ + \ e^+ \ \rightarrow \ \text{hadrons}$$

这个过程的第一步是正反夸克对 q 和 $\overline{q}$ 的产生：

$$e^- \ + \ e^+ \ \rightarrow \ q \ + \ \overline{q} \tag{4.6.2}$$

只要 e^-e^+ 质心总能量比正反夸克对质量大，即 $\sqrt{s} > 2m_q$，就可以产生这种味道的 (以及所有比这种味道轻的) 正反夸克对。



在正反夸克刚产生的时刻，它们距离很近，近似自由。因为带有对撞的初始能量，所以具有很高的运动速度。又因为胶子的自相互作用，所以正反夸克之间形成色管。随着 q 和 $\overline{q}$ 之间距离的增加，储存在色管中的能量线性地增长。当能量提高到足以产生另外一种 $q\overline{q}$ 时，即 $V > 2m_q$ 时，色管断裂成两个能量较低的色管，这样就形成了另外一对 $q\overline{q}$。分离的夸克和反夸克继续运动，进一步产生更多的 $q\overline{q}$ 对。最后能量转化为一些由动量很小的夸克和胶子强耦合而成的无色的强子。如图 4.34 所示。

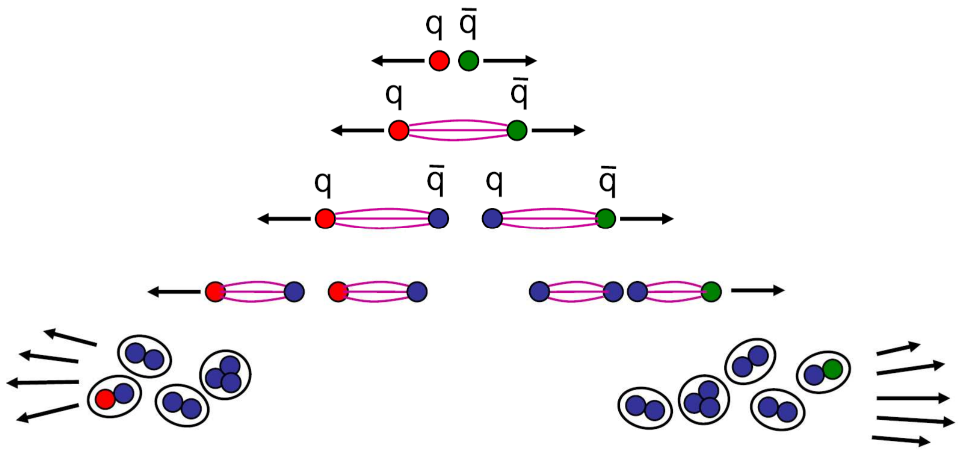
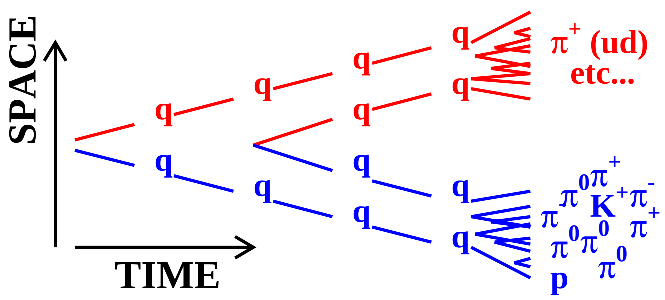


图 4.34: $e^- + e^+ \to \text{hadrons}$ 的强子化过程。

上述过程称为**强子化 (harmonization)**，目前还无法从理论上对夸克的强子化进行计算。在 $e^- + e^+ \to q + \overline{q}$ 过程中，夸克强子化后产生的强子大致沿着初始夸克和反夸克的方向运动，形成两个**喷注 (jet)**。在 e^-e^+ 对撞实验中，这两个喷注是背对背的，不过我们不知道哪个喷注来自夸克，哪个喷注来自反夸克。



除了以上 (4.6.2) 式所示的两喷注的过程，在 QCD 中还存在如下过程：

$$e^- + e^+ \to q + \overline{q} + g \to 3\text{ jets} \tag{4.6.3}$$

$$e^- + e^+ \to q + \overline{q} + g + g \to 4\text{ jets} \tag{4.6.4}$$

$$e^- + e^+ \to q + \overline{q} + q + \overline{q} \to 4\text{ jets} \tag{4.6.5}$$

它们形成三喷注和四喷注。图 4.35 给出了两喷注、三喷注和四喷注的反应过程、典型事例和费曼图。这些喷注过程对于了解夸克和胶子的性质具有重要的意义。

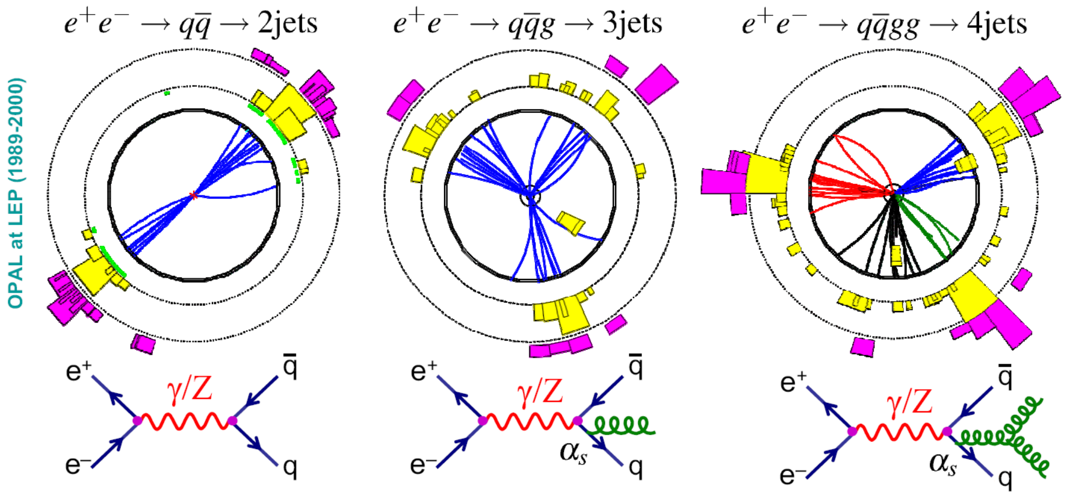


图 4.35: LEP 正负对撞对撞机实验中的两喷注、三喷注和四喷注。

1. 我们知道 $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ 散射过程中出射 μ 子是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子。该过程的微分截面是：
$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos^2\theta)$$
在 (4.6.2) 式所示的过程中 $e^- + e^+ \to q + \overline{q} \to 2\,\mathrm{jets}$，两喷注的角分布同样是 $\propto (1+\cos^2\theta)$，如图 4.36 所示。这表明形成喷注的夸克是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子。

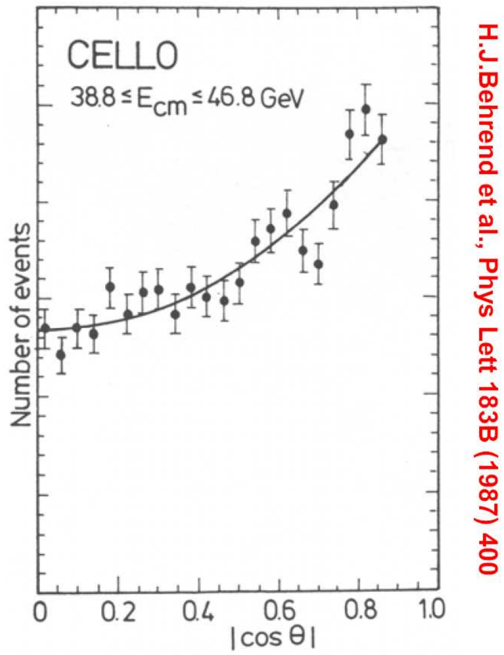
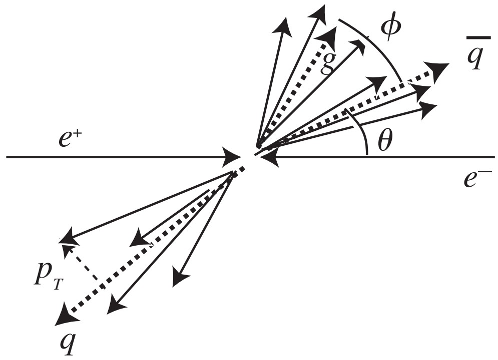


图 4.36: $e^- + e^+ \to q + \overline{q} \to 2\,\mathrm{jets}$ 中两喷注的角分布。

2. 在 QED 中电子可以辐射出光子，在 QCD 中夸克也可以辐射出胶子，例如存在如 (4.6.3) 式所示的过程 $e^- + e^+ \to q + \overline{q} + g \to 3\,\mathrm{jets}$。这里由于 QCD 的色囚禁，实验上不能观测到自由的胶子，而是额外地观测到由胶子形成的第三个喷注，也就是三喷注事例。

三个喷注中由正反夸克形成的喷注相对动量较大，是硬喷注，由辐射胶子形成的喷注相对动量较小，为软喷注。除了这种统计上的差别，夸克喷注和胶子喷注的运动学特性非常相似。实验上可以找出所有三喷注事例，把每个事例中的三个喷注按照动量大小从大到小排序，记作 j_1, j_2, j_3，并定义第三个喷注 j_3 是胶子喷注。然后把 j_3 Lorentz 变换到 $j_1 j_2$ 质心系中，计算 j_3 和 $j_1 j_2$ 之间的夹角 ϕ。



胶子喷注的 ϕ 角分布依赖于胶子自旋，因此可以用 $e^- e^+$ 对撞实验中的三喷注事例确定胶子自旋。图 4.37 所示是位于德国 Hamberg DESY 的 PETRA 正反电子对撞机上 TASSO 实验组测得的胶子喷注 $\cos\theta$ 分布。实验结果表明胶子自旋为 1。

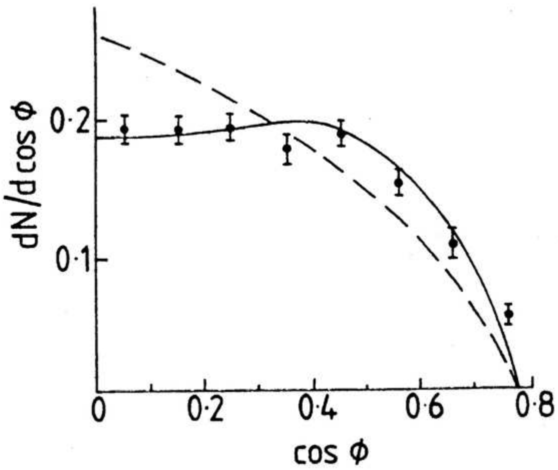


图 4.37: 胶子喷注的 $\cos\theta$ 角分布。带误差的数据点是实验观测值，虚线和实线分别是假设胶子 J^P 为 0^+ 和 1^- 时的理论计算结果。

3. 正负电子对撞中四喷注的来源有很多，如图 4.38 所示。我们关注 (4.6.4) 式所示的四喷注过程 $e^- + e^+ \to q + \overline{q} + g + g$。

   类似三喷注情形，我们找出所有四喷注事例，把每个事例中的四个喷注按照动量从大到小排序 j_1, j_2, j_3, j_4，动量小的两个喷注更像来自胶子，定义为胶子喷注。两个夸克喷注 j_1, j_2 和两个胶子喷注 j_3, j_4 构成两个平面，如图 4.39 所示。我们把这两个平面之间的夹角记作 $\chi_{\rm BZ}$。

   四喷注事例可以用来说明 QCD 理论的 non-Abelian 性。由于 QCD 中存在胶子的自相互作用，因此不仅有 $q\overline{q}g$ 顶点，还有 ggg 和 $gggg$ 顶点。显然，在 $q\overline{q}g$ 顶点中包含两个自旋是 $\frac{1}{2}$ 的夸克和一个自旋是 1 的胶子，在 ggg 和 $gggg$ 顶点中分别包含三个和四个自旋为 1 的胶子，故这些顶点有不同的 $\chi_{\rm BZ}$ 分布。实验测得 $\chi_{\rm BZ}$ 分布如图 4.39 中数据点所示。图中实线区间和虚线区间分别是假设理论为 non-Abelian 和 Abelian 时的结果。实验表明 QCD 理论是 non-Abelian 的。

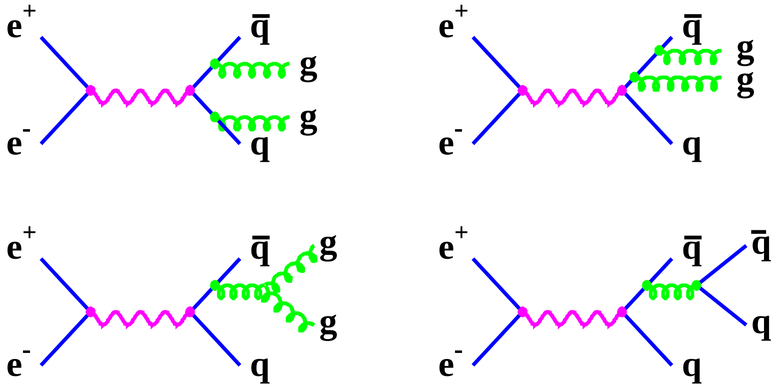


图 4.38: e^-e^+ 对撞实验中四喷注的来源。

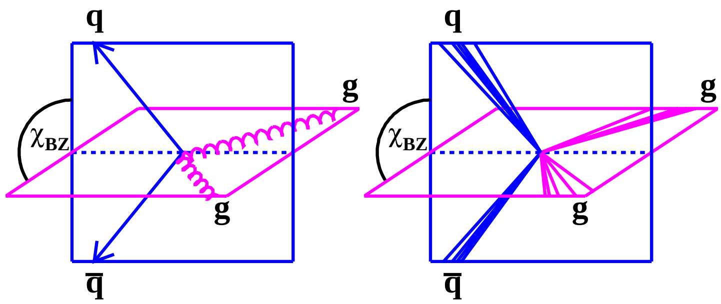


图 4.39: 夸克喷注平面和胶子喷注平面之间的夹角。

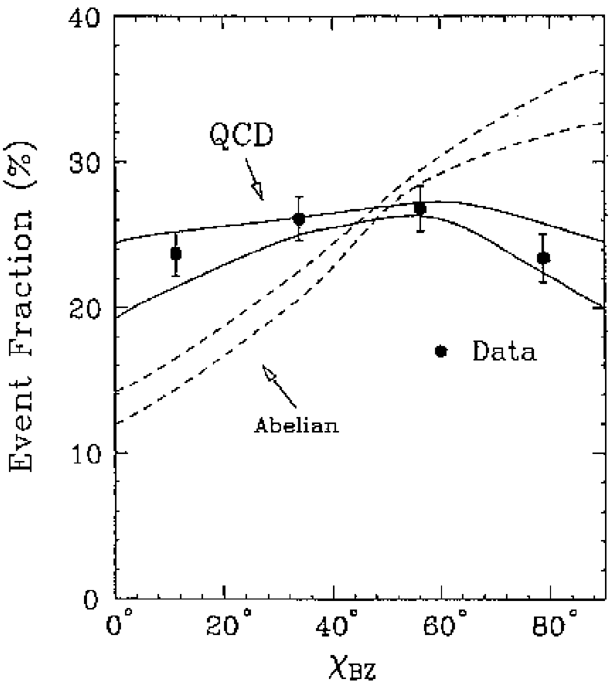


图 4.40: QCD 理论 non-Abelian 性的实验验证。

4.6.2 e^-e^+ 对撞中的 R 值

我们在 QED 中求得 $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ 过程的总截面如 (4.3.29) 式所示：

$$\sigma(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

推广到末态是某种味道的无色的夸克反夸克对，$e^- + e^+ \to q + \overline{q}$ 过程的截面为：

$$\sigma(e^-e^+ \to q\overline{q}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} e_q^2$$

其中 e_q 是夸克的电荷因子。但是实验测量的是喷注而不是夸克反夸克对，因此需要对所有夸克色 r, g, b 以及所有 e^-e^+ 质心能量可以产生 $q\overline{q}$ 对的夸克味道 q 求和：

$$\sigma(e^-e^+ \to \text{hadrons}) = 3\sum_q \frac{4\pi\alpha^2}{3s} e_q^2$$

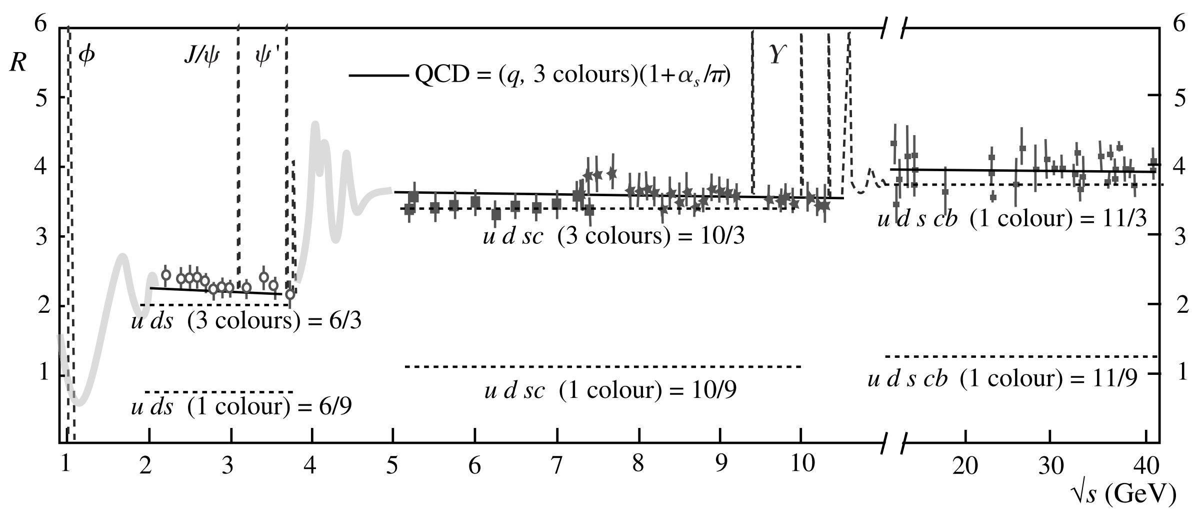
式中因子 3 来自三种颜色。一般测量的是 $e^- + e^+ \to$ hadrons 和 $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ 过程总截面的比值，称为 R 值：

$$\boxed{R = \frac{\sigma(e^-e^+ \to \text{hadrons})}{\sigma(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+)} = 3\sum_q e_q^2} \tag{4.6.6}$$

在不同 e^-e^+ 对撞质心总能量下的 R 值为：

Center of Mass Energy	Quark Flavors	Ratio R
$\sqrt{s} > 2m_s \sim 1\,\text{GeV}$	u, d, s	$3 \times \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = 2$
$\sqrt{s} > 2m_c \sim 4\,\text{GeV}$	u, d, s, c	$3 \times \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) = \frac{10}{3}$
$\sqrt{s} > 2m_b \sim 10\,\text{GeV}$	u, d, s, c, b	$3 \times \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{11}{3}$
$\sqrt{s} > 2m_t \sim 350\,\text{GeV}$	u, d, s, c, b, t	$3 \times \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) = 5$

实验测量的结果与夸克具有三种色的预期一致。注意图中实线是考虑胶子辐射修正后的 QCD 计算结果 $R = 3\sum_q e_q^2\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right)$。



4.6.3 QCD 费曼规则

本节通过讨论夸克和胶子的相互作用引入QCD 费曼规则。QCD 的基本顶点如图 4.41 所示。我们知道，在 QED 中，夸克作为自旋为 $\frac{1}{2}$ 的带电 Dirac 粒子，其波函数用 Dirac 旋量波函数 u 表示。而在 QCD 中，夸克的波函数是旋量波函数 u 和色波函数 c_i 的乘积：

$$u(p) \quad \rightarrow \quad c_i u(p)$$

其中 $i = 1,2,3$ 是色指标，色波函数 c_i 则为：

$$c_1 = r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c_2 = g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c_3 = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.7}$$

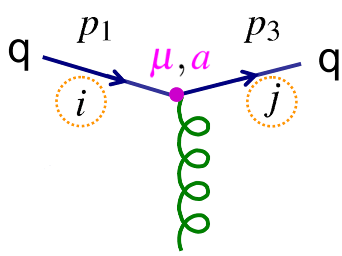


图 4.41: QCD 中的夸克夸克胶子顶点。

因此容易把 QED 的 $e^- e^- \gamma$ 顶点推广到 QCD 的 qqg 顶点：

$$\overline{u}(p_3)[ie\gamma^\mu]u(p_1) \quad \rightarrow \quad \overline{u}(p_3)c_j^\dagger\left\{-ig_s\frac{\lambda^a}{2}\gamma^\mu\right\}c_i u(p_1)$$

上式与 QED 顶点相比，除了考虑色波函数 c_i，以及把电磁相互作用的耦合常数 e 换成强相互作用的耦合常数 g_s 外，还多了一个色 SU(3) 群的生成元 $\frac{\lambda^a}{2}$ 因子。其中 λ^a 是八个 3×3 的 Gell-Mann 矩阵，$a = 1,2,\cdots 8$ 是指标，对应八种胶子。把上式中与颜色相关的部分分离出来：

$$\boxed{c_j^\dagger \lambda^a c_i = c_j^\dagger \begin{pmatrix} \lambda^a_{1i} \\ \lambda^a_{2i} \\ \lambda^a_{3i} \end{pmatrix} \equiv \lambda^a_{ji}} \tag{4.6.8}$$

于是夸克和胶子的相互作用可以写为：

$$\boxed{\overline{u}(p_3)c_j^\dagger\left\{-ig_s\frac{\lambda^a}{2}\gamma^\mu\right\}c_i u(p_1) = \overline{u}(p_3)\left\{-ig_s\frac{1}{2}\lambda^a_{ji}\gamma^\mu\right\}u(p_1)} \tag{4.6.9}$$

我们总结 QCD 的费曼规则如图 4.42 所示，不变矩阵元是所有费曼因子的乘积：

$$-i\mathcal{M} = \text{product of all factors}$$

关于 QCD 费曼图的几点说明：

- 入射夸克和出射夸克的颜色用 $i, j, k, l = 1,2,3$ 等标记。
- 八种不同的胶子用 $a, b = 1,2,\cdots,8$ 等表示。
- 传播子中的 δ 函数保证在 a 处发射的胶子等于在 b 处吸收的胶子。

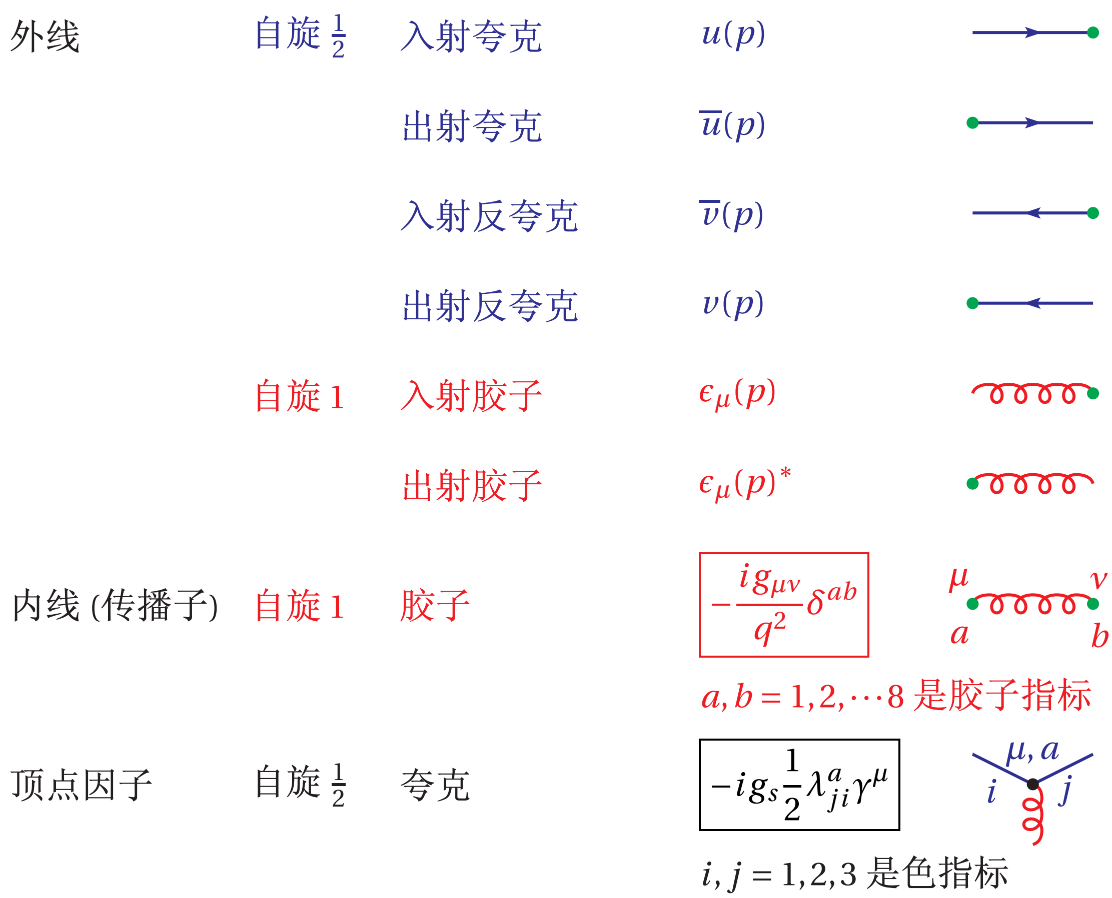


图 4.42: QCD 费曼规则。

4.6.4　强作用顶点的色因子

这一节我们讨论 QCD 中的色因子。为此考虑如图 4.43 所示的 u 夸克和 d 夸克的 QCD 散射过程 $u+d\to u+d$：

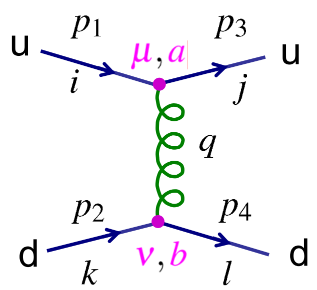


图 4.43: $u+d\to u+d$ 的 QCD 弹性散射过程。

应用 QCD 费曼规则，写出该过程的不变矩阵元：

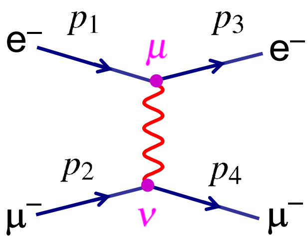
$$-i\mathscr{M}=\left[\overline{u}_u(p_3)\left\{-ig_s\frac{1}{2}\lambda^a_{ji}\gamma^\mu\right\}u_u(p_1)\right]\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\delta^{ab}\left[\overline{u}_d(p_4)\left\{-ig_s\frac{1}{2}\lambda^b_{lk}\gamma^\nu\right\}u_d(p_2)\right]$$

其中重复指标隐含着求和。利用 δ 函数，对所有胶子 a,b 求和，得到：

$$\mathscr{M}=-\frac{1}{4}\lambda^a_{ji}\lambda^a_{lk}\frac{g_s^2}{q^2}g_{\mu\nu}\left[\overline{u}_u(p_3)\gamma^\mu u_u(p_1)\right]\left[\overline{u}_d(p_4)\gamma^\nu u_d(p_2)\right] \tag{4.6.10}$$

式中 λ 矩阵中的重复指标 a 表示对八种胶子求和。把上式与 QED 中的弹性散射过程 $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$ 的不变矩阵元进行比较：

$$\mathscr{M} = -\frac{e^2}{q^2} g_{\mu\nu} \left[\overline{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)\right]$$



发现如果把 QED 不变矩阵元中的相互作用耦合常数作如下替换：

$$e^2 \;\to\; g_s^2 \qquad 或 \qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \;\to\; \alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} \tag{4.6.11}$$

并且在 QED 不变矩阵元中乘以因子：

$$\boxed{C_{ik\to jl} \equiv \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} \lambda^a_{ji}\lambda^a_{lk}} \tag{4.6.12}$$

那么两者就完全相等。式 (4.6.12) 称为**色因子 (color factor)**。

一、qqg 顶点的色因子

把 λ^a_{ji} 的定义式 (4.6.8) 代入 QCD 的色因子 (4.6.12) 式，得到：

$$C_{ik\to jl} = \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} \left(c_j^\dagger \lambda^a c_i\right)\left(c_l^\dagger \lambda^a c_k\right)$$

其中色波函数 c_i 由 (4.6.7) 式表示：

$$c_1 = r = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad c_2 = g = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad c_3 = b = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

可见色因子反映了胶子的色波函数：

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \lambda^2 = \begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad r\overline{g},\ g\overline{r}$$

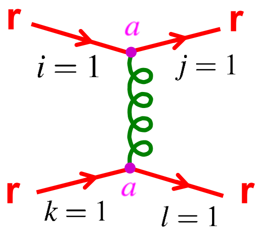
$$\lambda^4 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \qquad \lambda^5 = \begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix} \qquad r\overline{b},\ b\overline{r}$$

$$\lambda^6 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad \lambda^7 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} \qquad g\overline{b},\ b\overline{g}$$

$$\lambda^3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(r\overline{r} - g\overline{g}),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(r\overline{r} + g\overline{g} - 2b\overline{b})$$

下面具体计算色因子(强作用和夸克味道无关，故可以用色指标表示反应过程)：

1. **反应过程中只有一种颜色。**



这样的反应有 $rr \to rr$、$gg \to gg$ 和 $bb \to bb$ 三种，我们以 $rr \to rr$ 过程为例说明。色因子为：

$$C(rr \to rr) = \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8}\left(c_1^\dagger \lambda^a c_1\right)\left(c_1^\dagger \lambda^a c_1\right)$$

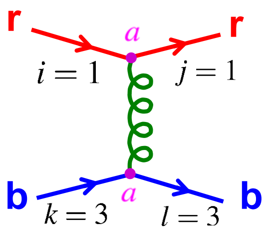
显然只有第 11 位置的元素不为零的 λ 矩阵才有贡献。这样的 λ 矩阵有 λ^3 和 λ^8 两个。于是：

$$C(rr \to rr) = \frac{1}{4}(\lambda_{11}^3\lambda_{11}^3 + \lambda_{11}^8\lambda_{11}^8) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

其它反应过程的色因子类似可得：

$$C(rr \to rr) = C(gg \to gg) = C(bb \to bb) = \frac{1}{3}$$

2. **反应过程中有两种颜色且夸克颜色不变。**



这样的反应有 $rg \to rg$、$rb \to rb$、$gr \to gr$、$gb \to gb$、$br \to br$ 和 $bg \to bg$ 等六种。我们以 $rb \to rb$ 过程为例说明。色因子为：

$$C(rb \to rb) = \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8}\left(c_1^\dagger \lambda^a c_1\right)\left(c_3^\dagger \lambda^a c_3\right)$$

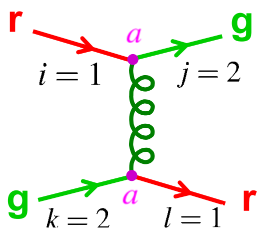
显然只有第 11 位置和第 33 位置的元素均不为零的 λ 矩阵才有贡献。这样的 λ 矩阵只有 λ^8 一个。于是：

$$C(rb \to rb) = \frac{1}{4}(\lambda_{11}^8\lambda_{33}^8) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{-2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{6}$$

其它反应过程的色因子类似可得：

$$C(rg \to rg) = C(rb \to rb) = C(gr \to gr)$$
$$= C(gb \to gb) = C(br \to br) = C(bg \to bg) = -\frac{1}{6}$$

3. **反应过程中有两种颜色且夸克颜色互换。**



这样的反应有 $rg \to gr$、$rb \to br$、$gr \to rg$、$gb \to bg$、$br \to rb$ 和 $bg \to gb$ 等六种。我们以 $rg \to gr$ 过程为例说明。色因子为：

$$C(rg \to gr) = \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8}\left(c_2^\dagger \lambda^a c_1\right)\left(c_1^\dagger \lambda^a c_2\right)$$

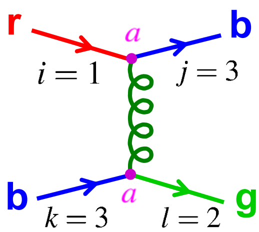
显然只有第 12 位置和第 21 位置的元素均不为零的 λ 矩阵才有贡献。这样的 λ 矩阵有 λ^1 和 λ^2 两个。于是：

$$C(rg \to gr) = \frac{1}{4}(\lambda^1_{21}\lambda^1_{12} + \lambda^2_{21}\lambda^2_{12}) = \frac{1}{4}(i(-i)+1) = \frac{1}{2}$$

其它反应过程的色因子类似可得：

$$\begin{aligned} &C(rg \to gr) = C(rb \to br) = C(gr \to rg) \\ =&C(gb \to bg) = C(br \to rb) = C(bg \to gb) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. **反应过程中有三种颜色。**



这样的反应有很多，例如 $rb \to bg$。色因子为：

$$C(rb \to bg) = \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8}\left(c_3^\dagger \lambda^a c_1\right)\left(c_2^\dagger \lambda^a c_3\right)$$

显然只有第 13 位置和第 32 位置的元素均不为零的 λ 矩阵才有贡献。因为不存在这样的 λ 矩阵，所以色因子为零。这个结果说明强作用中颜色是守恒量子数。

二、$\overline{q}\overline{q}g$ 和 $q\overline{q}g$ 顶点的色因子

我们还需要讨论涉及反夸克的强相互作用顶点及其色因子。前面第 (4.6.9) 式给出了 QCD 中 qqg 顶点的具体形式：

$$\overline{u}(p_3)c_j^\dagger\left\{-ig_s\frac{\lambda^a}{2}\gamma^\mu\right\}c_i u(p_1)$$

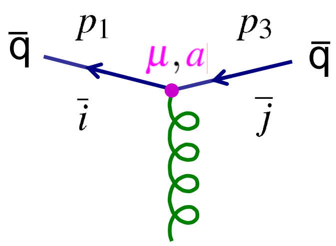


图 4.44: QCD 中的反夸克反夸克胶子顶点。

类似地可以得到 QCD 中 反夸克反夸克胶子顶点 $\overline{q}\overline{q}g$ 的具体形式：

$$\overline{v}(p_1)c_i^\dagger\Big\{-ig_s\frac{\lambda^a}{2}\gamma^\mu\Big\}c_j v(p_3)$$

如图 4.44 所示。上式与颜色相关的部分为：

$$c_i^\dagger\lambda^a c_j = c_i^\dagger\begin{pmatrix}\lambda^a_{1j}\\ \lambda^a_{2j}\\ \lambda^a_{3j}\end{pmatrix} = \lambda^a_{ij} \tag{4.6.13}$$

与 qqg 顶点比较，指标 i, j 互换，即反夸克和胶子的相互作用可以写为：

$$\boxed{\overline{v}(p_1)c_i^\dagger\Big\{-ig_s\frac{\lambda^a}{2}\gamma^\mu\Big\}c_j v(p_3) = \overline{v}(p_1)\Big\{-ig_s\frac{1}{2}\lambda^a_{ij}\gamma^\mu\Big\}v(p_3)} \tag{4.6.14}$$

同样地可以讨论夸克和反夸克的湮灭顶点 $q\overline{q}g$，如图 4.45 所示。

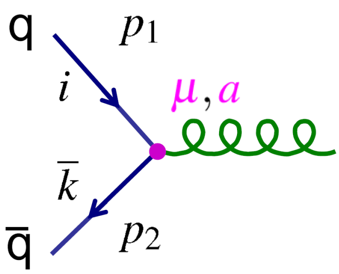


图 4.45: QCD 中的夸克反夸克胶子顶点。

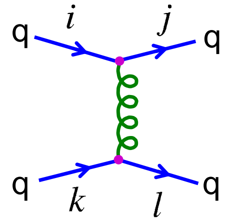
作用顶点为：

$$\boxed{\overline{v}(p_2)c_k^\dagger\Big\{-ig_s\frac{\lambda^a}{2}\gamma^\mu\Big\}c_i u(p_1) = \overline{v}(p_2)\Big\{-ig_s\frac{1}{2}\lambda^a_{ki}\gamma^\mu\Big\}u(p_1)} \tag{4.6.15}$$

其中：

$$c_k^\dagger\lambda^a c_i = c_k^\dagger\begin{pmatrix}\lambda^a_{1i}\\ \lambda^a_{2i}\\ \lambda^a_{3i}\end{pmatrix} = \lambda^a_{ki} \tag{4.6.16}$$

最后可以得到所有过程的色因子。我们总结如下：



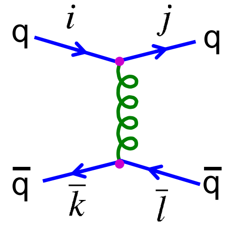
$$C(ik \to jl) \equiv \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} \lambda^a_{ji}\lambda^a_{lk}$$

e.g.

$C(rr \to rr) = \frac{1}{3}$

$C(rg \to rg) = -\frac{1}{6}$

$C(rg \to gr) = \frac{1}{2}$

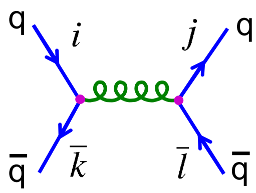


$$C(i\bar{k} \to j\bar{l}) \equiv \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} \lambda^a_{ji}\lambda^a_{kl}$$

$C(r\bar{r} \to r\bar{r}) = \frac{1}{3}$

$C(r\bar{g} \to r\bar{g}) = -\frac{1}{6}$

$C(r\bar{r} \to g\bar{g}) = \frac{1}{2}$



$$C(i\bar{k} \to j\bar{l}) \equiv \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} \lambda^a_{ki}\lambda^a_{jl}$$

$C(r\bar{r} \to r\bar{r}) = \frac{1}{3}$

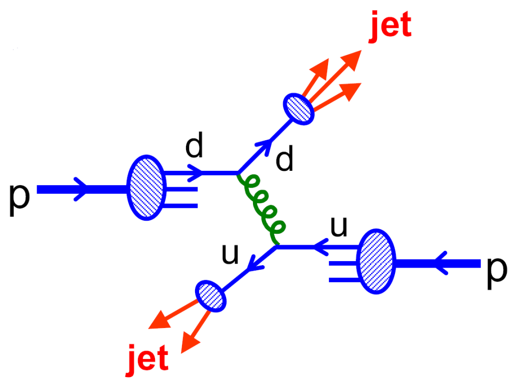
$C(r\bar{g} \to r\bar{g}) = \frac{1}{2}$

$C(r\bar{r} \to g\bar{g}) = -\frac{1}{6}$

4.6.5 $u+d \to u+d$ 散射过程

在高能质子质子对撞时，最底层部分发生的是质子中夸克之间的弹性散射，例如：

$$u \;+\; d \;\to\; u \;+\; d$$



每个夸克携带三种色荷，故反应初态和末态均有 $3\times3=9$ 种色态组合。对于非极化的质子，跃迁矩阵元不仅要对自旋求平均，也需要对色求平均，即对所有可能的末态色态求和，并对所有初态色态求平均：

$$\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = \frac{1}{9}\sum_{i,j,k,l=1}^{3}|\mathcal{M}_{fi}(ij\to kl)|^2$$

上述对色求平均的矩阵元中包含了对色因子求平均部分：

$$\langle|C|^2\rangle = \frac{1}{9}\sum_{i,j,k,l=1}^{3}|C(ij\to kl)|^2$$

对于 $q+q\to q+q$, $q=r,g,b$，共有三种单色反应，六种双色不变色反应和六种双色交换色反应，它们的色因子分别为 $\frac{1}{3}$、$-\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{2}$。于是：

$$\langle |C|^2\rangle = \frac{1}{9}\left[3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+6\times\left(-\frac{1}{6}\right)^2+6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=\frac{2}{9}$$

我们知道 $e^-+\mu^-\to e^-+\mu^-$ 散射的截面公式为 (参阅 (4.5.24) 式)：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q^2}=\frac{2\pi\alpha^2}{q^4}\left[1+\left(1+\frac{q^2}{s}\right)^2\right]$$

只需把 α^2 换成 α_s，再乘以色因子平均，就可以得到 $u+d\to u+d$ 的截面公式：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q^2}=\frac{2}{9}\frac{2\pi\alpha_s^2}{q^4}\left[1+\left(1+\frac{q^2}{\tilde{s}}\right)^2\right]$$

其中 $\tilde{s}$ 是 u,d 夸克质心系中的总能量。

虽然最底层夸克之间的散射很容易求得，但是高能质子质子散射本身是很复杂的。不仅需要考虑质子中部分子动量分布函数，还需要考虑各种可能的相互作用。例如，对于 $p\overline{p}$ 散射，有如图 4.46 所示的两喷注过程：

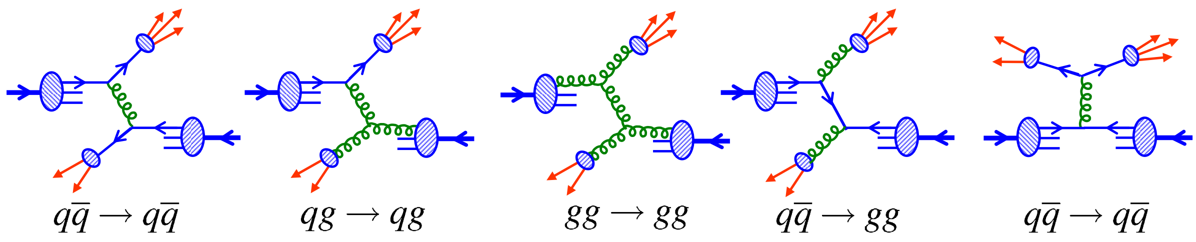


图 4.46: $p\overline{p}$ 对撞实验中的两喷注。

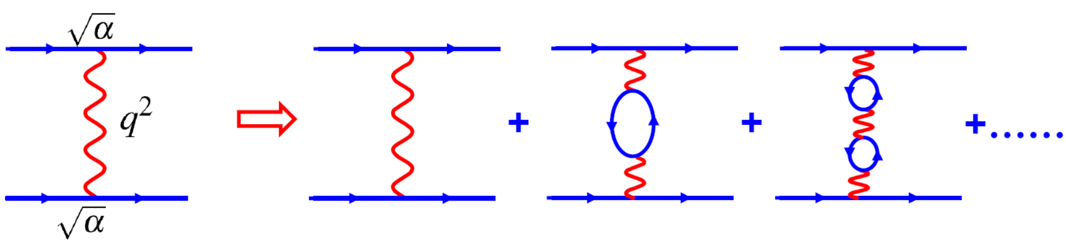
美国 Fermilab 的质子反质子对撞机 Tevatron 的质心能量为 $\sqrt{s}=1.8\,\mathrm{TeV}$，自 1987 年开始运行，目前仍然在取数。在 Tevatron 可以通过测量两喷注事例中喷注的横能量 E_T 和赝快度 η 分布测试 QCD。实验发现在低 E_T 处散射截面以低 x 的部分子散射为主，即胶子胶子散射。在高 E_T 处散射截面以高 x 的部分子散射为主，即夸克反夸克散射。

4.6.6 跑动的耦合常数

第 4.6.1 节中利用 QED 电荷屏蔽和 QCD 色反屏蔽定性解释了 QED 和 QCD 中耦合常数的变化。这种跑动的耦合常数是可以根据费曼图进行计算的。例如在 QED，画出所有末态相同过程的费曼图，对所有不变矩阵元求和：

$$\mathcal{M}=\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2+\mathcal{M}_3+\cdots$$

结果等价于用跑动的耦合常数 α 表征的单一费曼图。



计算结果是 (因为计算涉及圈图，所以具体过程从略，可参考量子场论书籍)：

$$\alpha(Q^2) = \alpha(Q_0^2) \Big/ \left[1 - \frac{\alpha(Q_0^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)\right] \tag{4.6.17}$$

注意式中负号。实验测量 α^{-1} 的结果如图 4.47 所示。在 QED 中 α 的变化是很慢的：

- 在原子物理中，$Q^2 \sim 0$，此时：

$$\frac{1}{\alpha} = 137.035\,999\,76(50)$$

- 在高能物理中，当 $Q^2 = 193\,\text{GeV}$ 时，有：

$$\frac{1}{\alpha} = 127.4 \pm 2.1$$

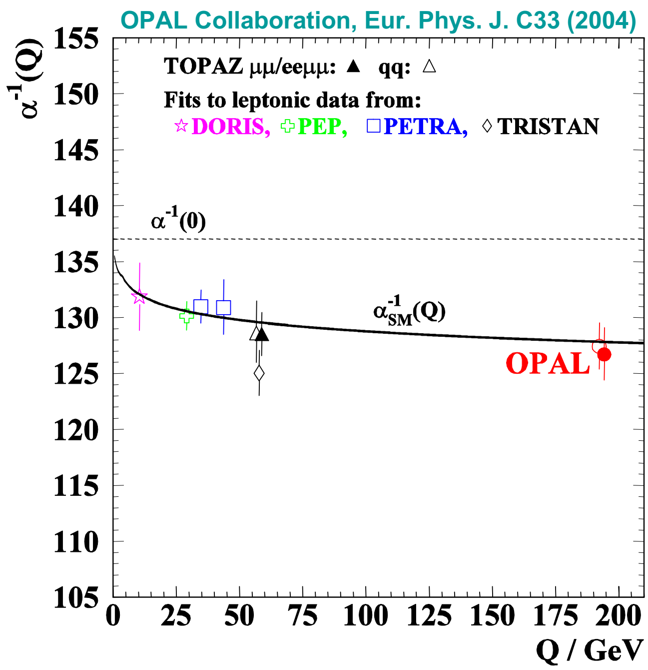
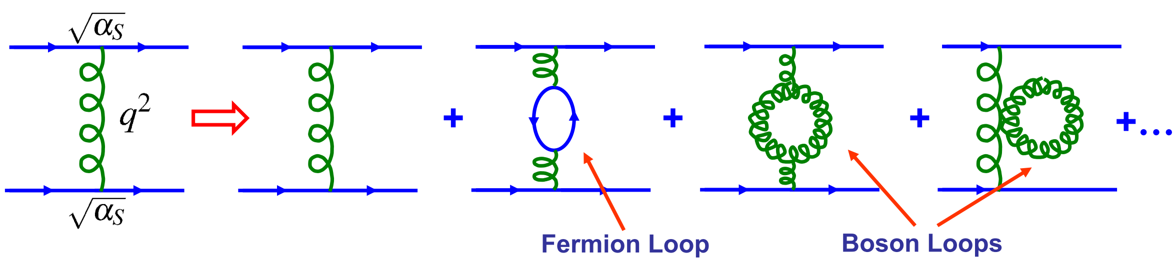


图 4.47: QED 中跑动的耦合常数 α。

类比 QED，画出所有末态相同过程的费曼图，不过此时多出了胶子圈图。对所有这些费曼图的不变矩阵元求和，结果等价于用跑动的耦合常数 α_s 表征的单一费曼图。这些不变矩阵元求和时可能干涉相消，因此求和结果可以比单个图的小。



QCD 的计算结果是：

$$\alpha_s(Q^2) = \alpha_s(Q_0^2) \Big/ \left[1 + B\alpha_s(Q_0^2)\ln\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)\right] \tag{4.6.18}$$

注意式中正号。其中：

$$B = \frac{11n_c - 2n_f}{12\pi}$$

式中 n_c、n_f 分别是夸克颜色的数目和夸克味道的数目。根据标准模型 $n_c = 3$、$n_f = 6$，因此 $B > 0$。于是由 (4.6.18) 式可知 α_s 随着 Q^2 增加而减小。各种实验测量的 α_s 结果如图 4.48 所示。可见 α_s 变化很快 (参阅第 1.5.4 节)。

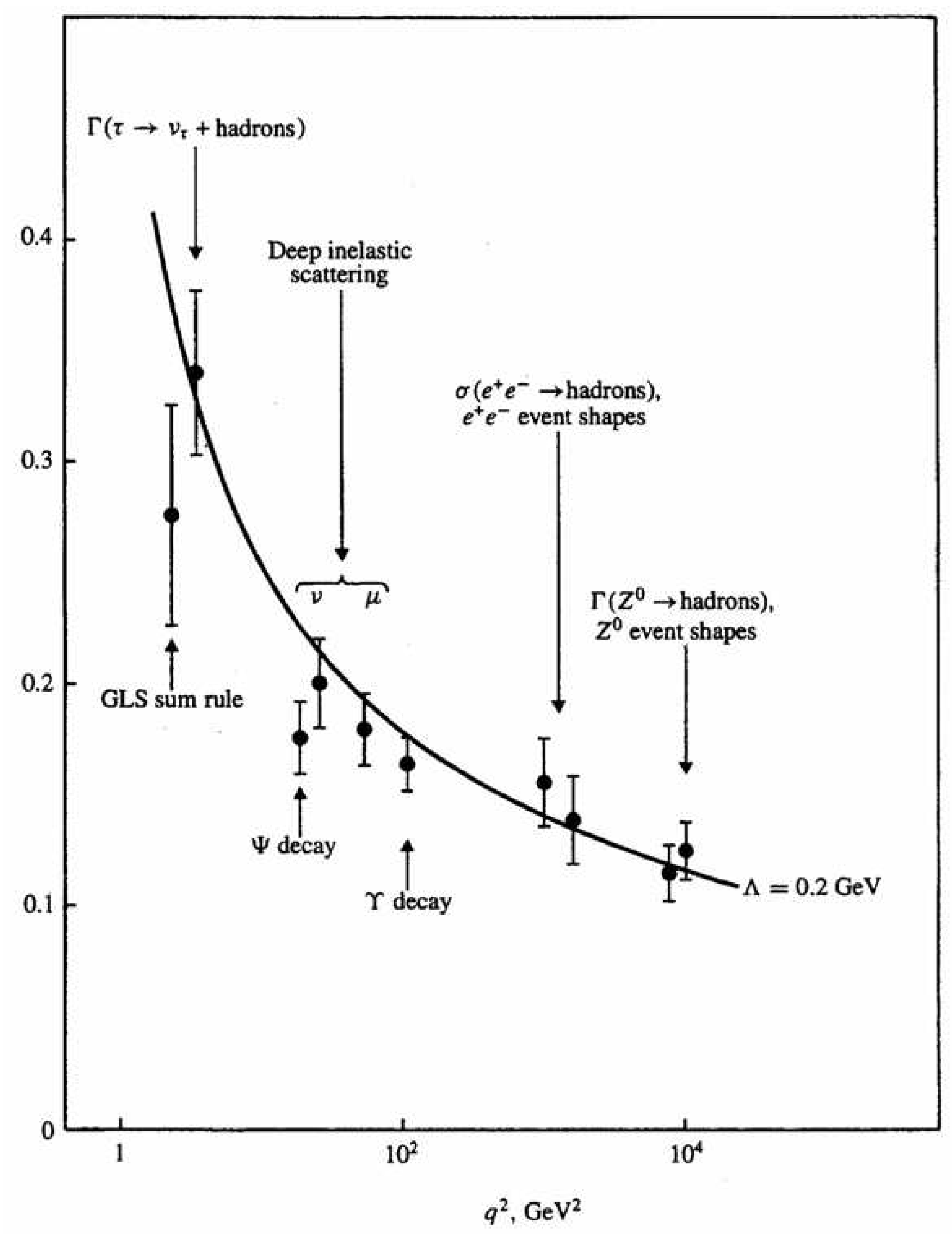


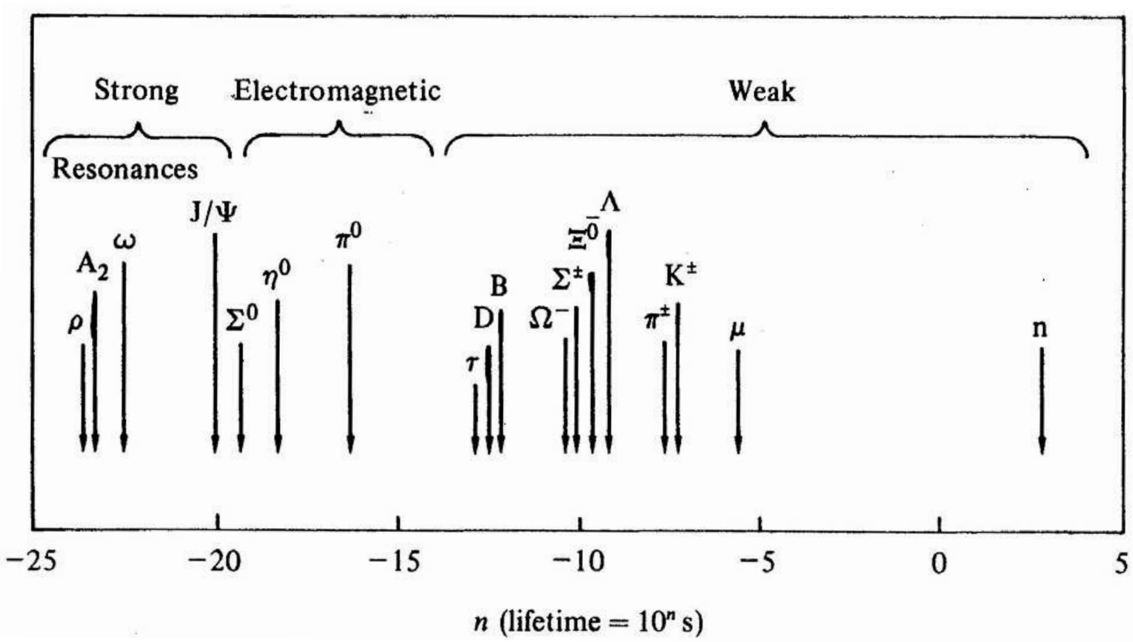
图 4.48: QCD 中跑动的耦合常数 α_s。

4.7 弱相互作用

本节讨论弱相互作用。首先对弱作用过程进行分类，然后介绍轻子的带电弱作用过程，它的 $V-A$ 结构和螺旋度结构，以及轻子普适性。我们还将介绍夸克的带电弱作用过程，讨论 Cabibbo 理论、GIM 机制和 CKM 矩阵。最后讨论弱中性流过程。对弱作用的深入研究最终导致标准模型的诞生。

4.7.1 弱作用过程的分类

在粒子物理很多反应过程中存在着弱相互作用。人们很早就发现弱相互作用的典型特征：衰变粒子的寿命很长，散射过程中截面很小，相互作用的力程很短，因此不能形成束缚态。虽然弱作用不一定改变反应过程中粒子的味道，但是粒子味道改变的过程必定是弱作用过程。



只有当强相互作用和电磁相互作用不存在的情形下，才可能观测到通过弱作用发生的衰变或散射现象。正因如此，人们用了很长时间才对弱作用有比较全面的了解。最早的弱作用理论是费米的 β 衰变理论，后来人们发现弱作用过程中宇称破坏，提出了弱作用的 $V-A$ 理论。人们还从各种实验中发现弱作用可以用一个普适的常数来描述，至此弱作用作为一种新的力的看法才变得明确。二十世纪六十年代，人们利用规范场论统一描述弱作用和电磁作用，电弱统一理论是粒子物理学标准模型的非常重要的一部分。

根据标准模型，弱作用有三种媒介子，W^+、W^- 和 Z^0。我们可以根据相互作用的传播子对弱作用进行分类。如果弱作用顶点是两个费米子和一个带电 W 玻色子，那么初态费米子和末态费米子之间的电荷改变一个符号，这样的弱作用是弱**带电流 (CC)** 过程。如果弱作用顶点是两个费米子和一个中性 Z^0 玻色子，则初末态费米子的电荷相等，称为弱**中性流 (NC)** 过程。

我们也可以根据参与弱相互作用过程的粒子种类，对弱作用进行分类：

❍ **纯轻子 (pure leptonic)** 过程：初态和末态粒子都是轻子。
例如 μ 子的 CC 衰变：

$$\text{CC:} \qquad \mu^- \;\rightarrow\; e^- \;+\; \nu_\mu \;+\; \overline{\nu}_e$$

又如中微子和电子的 CC 和 NC 散射：

$$\begin{aligned} \text{CC:} &\qquad \nu_\mu \;+\; e^- \;\rightarrow\; \mu^- \;+\; \nu_e \\ \text{NC:} &\qquad \nu_\mu \;+\; e^- \;\rightarrow\; \nu_\mu \;+\; e^- \end{aligned}$$

以上纯轻子过程的树图如图 4.49 所示。

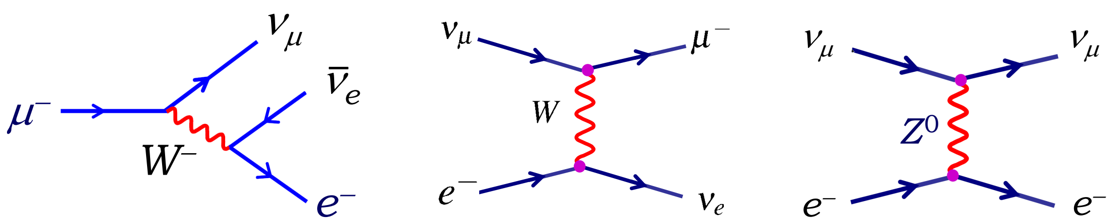


图 4.49: 弱相互作用的纯轻子过程。

❍ **半轻子 (semileptonic)** 过程：初末态中既有轻子也有强子。
例如中子 β 衰变的 CC 过程：

$$\text{CC:} \qquad n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e, \qquad d \rightarrow u + e^- + \overline{\nu}_e$$

又如中微子和核子的 CC 和 NC 散射：

$$\begin{aligned} \text{CC:} &\qquad \nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p, \qquad \nu_\mu + d \rightarrow \mu^- + u \\ \text{NC:} &\qquad \nu_\mu + p \rightarrow \nu_\mu + p, \qquad \nu_\mu + u \rightarrow \nu_\mu + u \end{aligned}$$

以上半轻子过程的树图如图 4.50 所示。

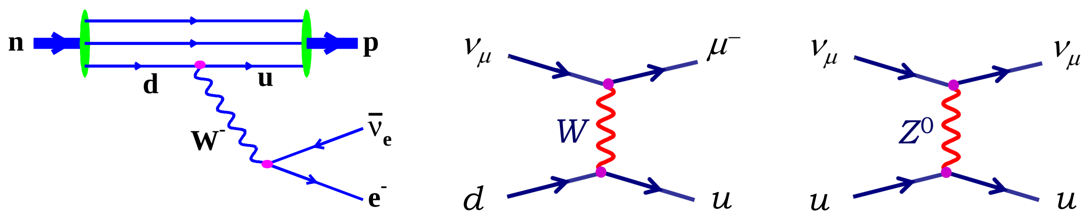


图 4.50: 弱相互作用的半轻子过程。

❍ **非轻子 (non-leptonic)** 过程：初末态粒子中都是强子，但是相互作用是弱作用。
这类过程只有衰变过程，例如：

$$\text{CC:} \qquad \Lambda \rightarrow p + \pi^-, \qquad s \rightarrow u + \overline{u} + d$$

该过程的树图如图 4.51 所示。

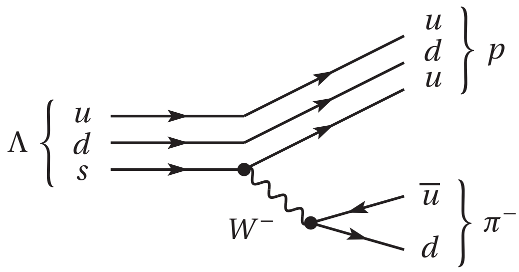


图 4.51: 弱相互作用的非轻子过程。

4.7.2 轻子弱带电流的费曼规则

图 4.52 是典型的 QED、QCD 和轻子弱带电流的作用顶点比较。这些顶点的费米子都可以用 Dirac 旋量表示。但是它们之间有两个重要区别:

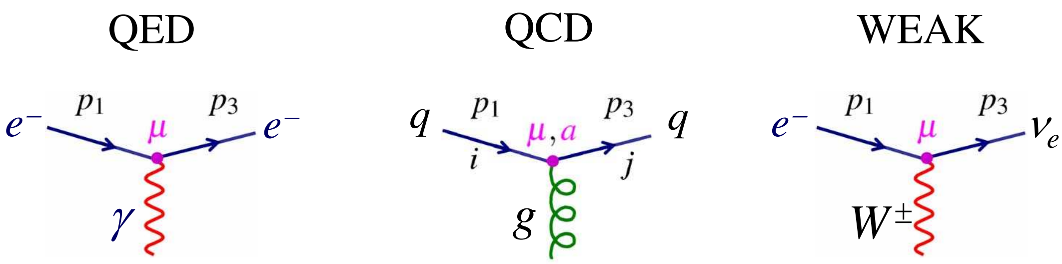


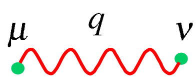
图 4.52: QED、QCD 和轻子弱带电流的相互作用顶点比较。

1. 不同于通过质量为零的光子传递的电磁作用或质量为零的胶子传递的强作用，轻子的带电弱作用通过质量很大的玻色子 $W^{\pm}$ 传递，显然在轻子的弱带电流过程中轻子味道发生变化。由于 $W^{\pm}$ 是有质量的自旋为 1 的矢量玻色子，这使得弱作用传播子的形式比 QED 和 QCD 更复杂。第 1.5.2 节中给出了无自旋的传播子 X 的一般形式:

$$\frac{1}{q^2 - m_X^2}$$

   考虑到 W 是自旋为 1 的玻色子，必须对它的所有极化态求和，W 传播子的费曼规则为 (具体计算参阅量子场论书籍):

$$-\frac{i\left[g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / m_W^2\right]}{q^2 - m_W^2} \tag{4.7.1}$$



   当 $q^2 \ll m_W^2$ 时，W 传播子的费曼规则简化为:

$$\frac{ig_{\mu\nu}}{m_W^2} \tag{4.7.2}$$



2. 实验发现宇称是 QED 和 QCD 中的守恒量，但是在弱相互作用过程中破坏 (且为最大程度的破坏)。因此弱作用顶点因子的费曼规则必须体现出宇称破坏。

下面讨论带电弱作用顶点因子的费曼规则。

一、Dirac 粒子的宇称变换性质

宇称变换是指空间反射变换 $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$，即：

$$x' = -x, \qquad y' = -y, \qquad z' = -z, \qquad t' = t$$

我们首先看 Dirac 旋量 $\psi(x, y, z, t)$ 的宇称变换性质。ψ 满足 Dirac 方程：

$$i\gamma^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - m\psi = -i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{4.7.3}$$

在宇称变换下 Dirac 旋量的变换为：

$$\psi'(x', y', z', t') = \hat{P}\psi(x, y, z, t)$$

假设 $\hat{P}$ 为：

$$\boxed{\hat{P} = \gamma^0} \tag{4.7.4}$$

则 Dirac 旋量变为：

$$\psi'(x', y', z', t') = \gamma^0 \psi(x, y, z, t)$$

由于 $\left(\gamma^0\right)^2 = 1$，因此：

$$\psi(x, y, z, t) = \gamma^0 \psi'(x', y', z', t')$$

代入 Dirac 方程 (4.7.3) 式，可知宇称变换下 Dirac 方程变为：

$$i\gamma^1\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial x} + i\gamma^2\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial y} + i\gamma^3\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial z} - m\gamma^0\psi' = -i\gamma^0\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial t}$$

根据宇称变换定义，上式为：

$$-i\gamma^1\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial x'} - i\gamma^2\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial y'} - i\gamma^3\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial z'} - m\gamma^0\psi' = -i\gamma^0\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial t'}$$

注意 γ^0 和 $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ 等反对易，上式可写为：

$$i\gamma^0\gamma^1 \frac{\partial \psi'}{\partial x'} + i\gamma^0\gamma^2 \frac{\partial \psi'}{\partial y'} + i\gamma^0\gamma^3 \frac{\partial \psi'}{\partial z'} - m\gamma^0\psi' = -i \frac{\partial \psi'}{\partial t'}$$

两边左乘 γ^0，得到变换后的 Dirac 方程：

$$i\gamma^1 \frac{\partial \psi'}{\partial x'} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi'}{\partial y'} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi'}{\partial z'} - m\psi' = -i\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial t'}$$

上式和 (4.7.3) 式形式相同。于是得出结论：若在宇称变换下 Dirac 旋量按照下式变换：

$$\boxed{\psi \quad \to \quad \psi' = \hat{P}\psi = \gamma^0\psi} \tag{4.7.5}$$

则 Dirac 方程形式不变。此时，伴随旋量 $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ 的变换为：

$$\boxed{\overline{\psi} \quad \to \quad \overline{\psi}' = (\hat{P}\psi)^\dagger\gamma^0 = (\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^{0\dagger}\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0 = \overline{\psi}\gamma^0} \tag{4.7.6}$$

注意：如果取宇称算符为 $\hat{P} = -\gamma^0$，也可以得到同样结论。不过习惯上取 $\hat{P} = \gamma^0$。

下面讨论 Dirac 粒子的内禀宇称。考虑自由 Dirac 粒子静止的情形，Dirac 旋量为：

$$\psi = u_1 e^{-imt}, \qquad \psi = u_2 e^{-imt}, \qquad \psi = v_1 e^{+imt}, \qquad \psi = v_2 e^{+imt}$$

其中：

$$u_1 = N\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad u_2 = N\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad v_1 = N\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad v_2 = N\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

于是 u_1 的宇称变换为：

$$\hat{P}u_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = u_1$$

类似地可以得到 u_2, v_1, v_2 的宇称变换。结果是：

$$\boxed{\begin{array}{ll}\hat{P}u_1 = +u_1, & \hat{P}u_2 = +u_2\\ \hat{P}v_1 = -v_1, & \hat{P}v_2 = -v_2\end{array}} \tag{4.7.7}$$

因此 Dirac 粒子和 Dirac 反粒子有相反的内禀宇称。

二、QED 和 QCD 中的宇称守恒

有了 Dirac 旋量的宇称变换性质，我们讨论 QED 和 QCD 中的宇称，即讨论在宇称变换下，不变矩阵元的变换。不失一般性，考虑 QED 或 QCD 两体散射过程，其不变矩阵元可写为：

$$\mathscr{M} \propto g_{\mu\nu} j^{\mu}_{V_1} j^{\nu}_{V_2} = j^{\mu}_{V_1} j_{V_2\mu} = j_{V_1} \cdot j_{V_2} \tag{4.7.8}$$

式中 j^{μ}_{V} 表示四维矢量流，定义为：

$$j^{\mu}_{V} = \overline{\psi}\gamma^{\mu}\phi \tag{4.7.9}$$

其中 ψ、ϕ 为任意旋量。式 (4.7.8) 表明，在宇称变换下，QED 或 QCD 不变矩阵元的变换等价于两个四维矢量流标积 $j_{V_1} \cdot j_{V_2}$ 的变换。

由于在宇称变换下，旋量 ψ 和伴随旋量 $\overline{\psi}$ 的变换分别由 (4.7.5)、(4.7.6) 式表示：

$$\psi \xrightarrow{\hat{P}} \gamma^0\psi$$
$$\overline{\psi} \xrightarrow{\hat{P}} \overline{\psi}\gamma^0$$

故四维矢量流 (4.7.9) 的变换为：

$$j^{\mu}_{V} \xrightarrow{\hat{P}} \overline{\psi}\gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0\psi$$

考虑其分量的变换：

$$\begin{aligned} 0: \quad & j_V^0 \xrightarrow{\hat{P}} \overline{\psi}\gamma^0\gamma^0\gamma^0\psi = \overline{\psi}\gamma^0\psi = j_V^0 \\ k=1,2,3: \quad & j_V^k \xrightarrow{\hat{P}} \overline{\psi}\gamma^0\gamma^k\gamma^0\psi = -\overline{\psi}\gamma^k\gamma^0\gamma^0\psi = -\overline{\psi}\gamma^k\psi = -j_V^k \end{aligned} \tag{4.7.10}$$

即在宇称变换下，四维矢量流的时间分量不变，空间分量反号。上式可记作：

$$\boxed{j_V^\mu \xrightarrow{\hat{P}} j_{V\mu}}$$

于是在宇称变换下，两个四维矢量流标积 $j_{V_1}\cdot j_{V_2}$ 的变换为：

$$j_{V_1}\cdot j_{V_2} = j_{V_1}^0 j_{V_2}^0 - j_{V_1}^k j_{V_2}^k \xrightarrow{\hat{P}} j_{V_1}^0 j_{V_2}^0 - (-j_{V_1}^k)(-j_{V_2}^k) = j_{V_1}\cdot j_{V_2} \tag{4.7.11}$$

即在宇称变换下，两个四维矢量流的标积不变，记作：

$$\boxed{j_{V_1}^\mu j_{V_2}^\nu \xrightarrow{\hat{P}} j_{V_1\mu} j_{V_2\nu} = j_{V_1}^\mu j_{V_2}^\nu}$$

因而跃迁矩阵元不变，也就是说在宇称变换下 QED 和 QCD 不变。

三、弱作用的 $V-A$ 结构和宇称破坏

由于四维矢量流 J_V^μ 的标积在宇称变换下不变，因此弱相互作用的流不能取 J_V^μ 的形式。但是相互作用的矩阵元必须满足 Lorentz 不变的要求，这就严格限制了弱相互作用顶点的可能形式。

所谓 j_V^μ 是一个四维矢量流，是指 j_V^μ 在 Lorentz 变换下表现为四维矢量的变换性质 (具体证明参阅量子场论书籍)。量子场论可以证明，两个线性旋量 ψ,ϕ 和 γ 矩阵的组合可以构成五种类型的物理量，称为**双线性协变量 (bilinear covariant)**。这些双线性协变量在 Lorentz 变换下表现为标量、赝标量、矢量、轴矢量和张量的变换性质，如表 4.1 所示。总共有 16 个双线性协变量，对应 γ 矩阵的 $4\times4=16$ 个自由度。

表 4.1: 双线性协变量及其 Lorentz 变换性质。

双线性协变量	Lorentz 变换性质	分量数目	传播子自旋
$\overline{\psi}\phi$	scalar	1	0
$\overline{\psi}\gamma^5\phi$	pseudoscalar	1	0
$\overline{\psi}\gamma^\mu\phi$	vector	4	1
$\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\phi$	axial vector	4	1
$\overline{\psi}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)\phi$	tensor	6	2

与标量或赝标量作用顶点相伴的传播子的自旋为零，与矢量或轴矢量作用顶点相伴的传播子的自旋为 1。弱相互作用既然由自旋为 1 的矢量玻色子传播，其顶点的一般形式应该是矢量和轴矢量的线性组合，许多实验表明弱作用流具有 $V-A$ 的形式：

$$j_{\text{weak}}^\mu \propto \overline{\psi}(\gamma^\mu-\gamma^\mu\gamma^5)\phi = j_V^\mu - j_A^\mu$$

其中：

$$j_V^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\phi, \qquad J_A^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\phi$$

下面证明 $V-A$ 形式的弱作用流确实可以给出宇称破坏。

❍ 在宇称变换下，纯四维矢量流 $j_V^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\phi$ 的变换由 (4.7.10) 式给出，两个矢量流的标积的变换则由 (4.7.11) 式给出，表明在宇称变换下矢量流的标积不变。

❍ 类似地，在宇称变换下，纯四维轴矢量流的 $j_A^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\phi$ 的变换为：

$$j_A^\mu \quad \xrightarrow{\hat{P}} \quad \overline{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0\phi = -\overline{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^5\phi$$

考虑其分量的变换：

$$\begin{aligned} 0: &\qquad j_A^0 \quad \xrightarrow{\hat{P}} \quad -\overline{\psi}\gamma^0\gamma^0\gamma^0\gamma^5\phi = -\overline{\psi}\gamma^0\gamma^5\phi = -j_A^0 \\ k=1,2,3: &\qquad j_A^k \quad \xrightarrow{\hat{P}} \quad -\overline{\psi}\gamma^0\gamma^k\gamma^0\gamma^5\phi = \overline{\psi}\gamma^k\gamma^0\gamma^0\gamma^5\phi = \overline{\psi}\gamma^k\gamma^5\phi = j_A^k \end{aligned} \tag{4.7.12}$$

即在宇称变换下，四维轴矢量流的时间分量反号，空间分量不变。这和四维矢量流的宇称性质正好相反。上式可记作：

$$\boxed{j_A^\mu \quad \xrightarrow{\hat{P}} \quad -j_{A\mu}}$$

于是在宇称变换下，两个四维轴矢量流标积 $j_{A_1}\cdot j_{A_2}$ 的变换为：

$$j_{A_1}\cdot j_{A_2} = j_{A_1}^0 j_{A_2}^0 - j_{A_1}^k j_{A_2}^k \quad \xrightarrow{\hat{P}} \quad (-j_{A_1}^0)(-j_{A_2}^0) - j_{A_1}^k j_{A_2}^k = j_{A_1}\cdot j_{A_2}$$

即在宇称变换下，两个四维轴矢量流的标积不变，记作：

$$\boxed{j_{A_1}^\mu j_{A_2}^\nu \quad \xrightarrow{\hat{P}} \quad j_{A_1\mu} j_{A_2\nu} = j_{A_1}^\mu j_{A_2}^\nu}$$

也就是说纯轴矢量流的相互作用和纯矢量流的相互作用在宇称变换下都不变。

❍ 但是在宇称变换下，矢量流和轴矢量流的标积的变换为：

$$j_{V_1}\cdot j_{A_2} \quad \xrightarrow{\hat{P}} \quad j_{V_1}^0(-j_{A2}^0) - (-j_{V_1}^k) j_{A_2}^k = -j_{V_1}\cdot j_{A_2}$$

上式表明，在宇称变换下 $V-A$ 流改变符号，故宇称破坏。

综上所述，再与 QED 和 QCD 中的作用顶点因子进行比较：

$$\begin{aligned} ie\gamma^\mu &\qquad \text{(QED)} \\ -ig_s\frac{1}{2}\lambda_{jl}^a\gamma^\mu &\qquad \text{(QCD)} \end{aligned}$$

得到轻子带电弱作用顶点因子的费曼规则：

$$\boxed{\frac{-ig_W}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)} \tag{4.7.13}$$

其中 g_w 是带电弱作用耦合常数，$\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ 代替 QED 或者 QCD 中的 γ^μ 体现弱作用中的宇称破坏，其余系数是惯例。

4.7.3　$\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \overline{\nu}_e$ 衰变过程

我们考虑 μ^- 的衰变过程 $\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \overline{\nu}_e$，其费曼图如图 4.53 所示。根据带电弱作用的费曼规则，考虑到 μ^- 衰变中 $q^2 \ll m_W^2$，很容易写出不变矩阵元：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{fi} &= \frac{g_w^2}{8m_W^2}\left[\overline{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p_1)\right]g_{\mu\nu}\left[\overline{u}(p_2)\gamma^\nu(1-\gamma^5)v(p_4)\right] \\ &= \frac{g_w^2}{8m_W^2}\left[\overline{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_2)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(p_4)\right]\end{aligned}$$

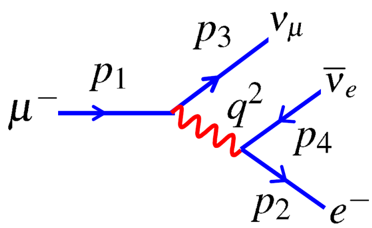


图 4.53: μ^- 衰变的费曼图。

一、衰变率

如果 μ^- 是非极化的，则需要计算不变矩阵元模方的自旋平均值 $\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle$。首先对不变矩阵元模方的所有可能的自旋态求和 $\sum\limits_{\text{spins}}|\mathcal{M}_{fi}|^2$。利用 Casimir 技巧 (4.3.35) 式：

$$\sum_{\text{spins}}\left[\overline{u}(p_3)\Gamma^\mu u(p_1)\right]^\dagger\left[\overline{u}(p_3)\Gamma^\nu u(p_1)\right] = \text{Tr}\left[\Gamma^\mu(\not{p}_3+m_3)\Gamma^\nu(\not{p}_1+m_1)\right]$$

得到：

$$\begin{aligned}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \left(\frac{g_w^2}{8m_W^2}\right)^2 &\text{Tr}\left[\gamma^\mu(1-\gamma^5)(\not{p}_3+m_{\nu_\mu})\gamma^\nu(1-\gamma^5)(\not{p}_1+m_\mu)\right] \\ &\times\text{Tr}\left[\gamma_\mu(1-\gamma^5)(\not{p}_2+m_e)\gamma_\nu(1-\gamma^5)(\not{p}_4+m_{\nu_e})\right]\end{aligned}$$

中微子质量为零，利用 γ 矩阵求迹公式，可得 (具体计算参考 Griffiths 第 303-304 页)：

$$\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_{fi}|^2 = 256\left(\frac{g_w^2}{8m_W^2}\right)^2(p_1\cdot p_4)(p_3\cdot p_2)$$

初态 μ^- 可能的自旋态数目为 2，于是得到不变矩阵元模方的自旋平均值：

$$\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_{fi}|^2 = 128\left(\frac{g_w^2}{8m_W^2}\right)^2(p_1\cdot p_4)(p_3\cdot p_2) \tag{4.7.14}$$

式中出现了两个四动量标积。我们在 μ^- 质心系中计算。由于：

$$p_1 = (m_\mu, \mathbf{0}), \qquad p_4 = (E_4, \mathbf{p}_4)$$

因此：

$$p_1 \cdot p_4 = m_\mu E_4 \tag{4.7.15}$$

根据四动量守恒：

$$p_1 - p_4 = p_3 + p_2$$

上式左边和右边的平方是：

$$(p_1 - p_4)^2 = p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 \cdot p_4 = m_\mu^2 - 2p_1 \cdot p_4$$
$$(p_3 + p_2)^2 = p_3^2 + p_2^2 + 2p_3 \cdot p_2 = m_e^2 + 2p_3 \cdot p_2$$

由上面两式相等得到：

$$p_3 \cdot p_2 = \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{2} - m_\mu E_4 \tag{4.7.16}$$

为了得到衰变率，根据 Fermi 黄金规则，还需要计算 $\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \nu_e$ 三体衰变的不变相空间。三体衰变相空间的计算是很复杂的，即使当部分末态粒子的质量为零时，计算也不容易。特别是此处的 $\langle|\mathscr{M}_{fi}|^2\rangle$ 还明显和相空间积分有关。具体计算可参考 Griffiths 第 305-307 页。结果表明 μ^- 的衰变率为 (忽略电子质量)：

$$\Gamma(\mu \to e\nu\nu) = \left(\frac{g_w^2}{8m_W^2}\right)^2 \frac{m_\mu^5}{96\pi^3}$$

注意 μ^- 的衰变率正比于 m_μ^5 (sargent rule)。根据带电弱作用耦合常数 g_w 和 Fermi 耦合常数 G_F 的关系 (1.5.29) 式：

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_w^2}{8m_W^2} \tag{4.7.17}$$

μ^- 的衰变率可写为：

$$\boxed{\Gamma(\mu \to e\nu\nu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} = \frac{1}{\tau_\mu}} \tag{4.7.18}$$

上式表明，通过精确测量 μ^- 的寿命，可以确定 Fermi 耦合常数。不过此时必须考虑辐射修正，上式进一步变为：

$$\Gamma(\mu \to e\nu\nu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}\left[1 - \frac{\alpha}{2\pi}\left(\pi^2 - \frac{25}{4}\right)\right]$$

修正大约为 4.2×10^{-3}。实验测得：

$$\tau_\mu = 2.197\,03(04) \times 10^{-6}\,\text{s}$$

于是 Fermi 耦合常数为：

$$G_F = 1.166\,39\,(01) \times 10^{-5}\,\text{GeV}^{-2} \tag{4.7.19}$$

二、Michel 参数

式 (4.7.18) 是 μ 衰变的总衰变率。在弱相互作用的研究中，μ^- 衰变产物 e^- 的能谱扮演着重要的角色。理论计算表明：

$$\mathrm{d}\Gamma = 12\Gamma\left[(1-x)-\frac{2}{9}\rho(3-4x)\right]x^2\mathrm{d}x$$

其中：

$$x=\frac{2E}{m_\mu}$$

E 是能量转移，ρ 称为 **Michel 参数 (Michel parameter)**。

如果弱作用具有 $V-A$ 结构，则理论预言 $\rho=0.75$，此时：

$$\mathrm{d}\Gamma=\frac{G_F^2 m_\mu^5}{96\pi^3}x^2(3-2x)\mathrm{d}x$$

如果弱作用具有 $V+A$ 结构，则理论预言 $\rho=0$，此时：

$$\mathrm{d}\Gamma=\frac{G_F^2 m_\mu^5}{96\pi^3}6x^2(1-x)\mathrm{d}x$$

这两种理论分布如图 4.54 所示。实验测得能谱曲线具有 $V-A$ 形式，拟合结果 [3] 是：

$$\rho=0.75080\pm0.00105$$

有力地表明弱作用是 $V-A$ 相互作用。

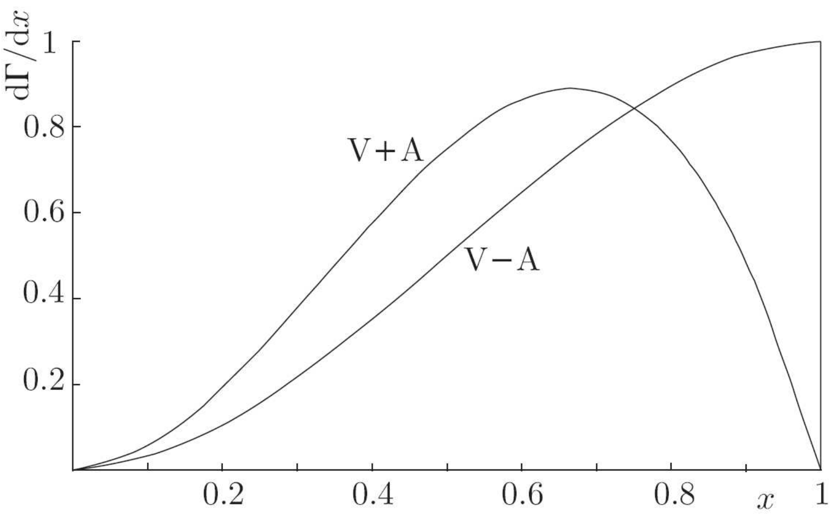


图 4.54: μ^- 衰变的电子能谱理论预言。

[3] 参阅文献：TWIST expt.，*Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 101805

三、和 Fermi 理论的联系

1934 年，远在弱作用宇称破坏被发现之前，Fermi 类比 QED，提出了 β 衰变的理论。他认为 (中子或 μ 子的) β 衰变是四费米子直接相互作用，不变矩阵元为：

$$\mathcal{M}_{fi} = G_F g_{\mu\nu}[\overline{\psi}\gamma^\mu\psi][\overline{\psi}\gamma^\nu\psi]$$

其中 G_F 是 Fermi 常数。注意式中没有传播子，表明四费米子的相互作用发生在一点。

1957 年，人们发现在弱作用过程中宇称破坏，于是把不变矩阵元改写为：

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} g_{\mu\nu}[\overline{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi][\overline{\psi}\gamma^\nu(1-\gamma^5)\psi] \tag{4.7.20}$$

式中引入了 $\sqrt{2}$ 因子，这样 G_F 的数值不需要修改。

现在我们知道 β 衰变过程是通过中间矢量玻色子 W 传递弱相互作用而发生的，根据前面介绍的带电弱作用费曼规则，有：

$$-i\mathcal{M}_{fi} = \left[\frac{-ig_w}{\sqrt{2}}\overline{\psi}\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi\right]\frac{-i[g_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu/m_W^2]}{q^2-m_W^2}\left[\frac{-ig_w}{\sqrt{2}}\overline{\psi}\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi\right]$$

当 $q^2 \ll m_W^2$ 时，不变矩阵元为：

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_w^2}{8m_W^2} g_{\mu\nu}[\overline{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi][\overline{\psi}\gamma^\nu(1-\gamma^5)\psi] \tag{4.7.21}$$

比较 (4.7.20)、(4.7.21) 式，得到：

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_w^2}{8m_W^2}$$

这也就是 (1.5.29) 或 (4.7.17) 式的来由。

由于通过 μ 子衰变过程可以很好地测定 G_F，因此我们经常用 Ferimi 常数表示弱相互作用的强度。利用实验测得的 Fermi 耦合常数和 W 玻色子的质量：

$$G_F = 1.166\,39\,(01)\times 10^{-5}\,\text{GeV}^{-2}$$
$$m_W = 80.403 \pm 0.029\,\text{GeV}$$

代入 (4.7.17) 式，得到：

$$\alpha_w = \frac{g_w^2}{4\pi} = \frac{8m_W^2 G_F}{4\sqrt{2}\pi} \approx \frac{1}{30}$$

即弱作用的本征强度大于且接近电磁作用的强度。弱作用之所以弱的原因在于传播子质量很大。当 $q^2 \gg m_W^2$ 时，弱作用强度很可能大于电磁作用的强度。

4.7.4 弱作用的螺旋度结构

我们在第 4.3.3 节中引入了右手手征投影算符和左手手征投影算符：

$$P_{\rm R} = \tfrac{1}{2}(1+\gamma^5), \qquad P_{\rm L} = \tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)$$

$P_{\rm R}$ 和 $P_{\rm L}$ 分别投影出 Dirac 粒子的右手手征态和左手手征态 (或者投影出 Dirac 反粒子的左手手征态和右手手征态)。利用 $P_{\rm R}$ 和 $P_{\rm L}$，任意 Dirac 旋量 ψ 总是可以分解为右手手征分量 $\psi_{\rm R}$ 和左手手征分量 $\psi_{\rm L}$：

$$\psi = P_{\rm R}\psi + P_{\rm L}\psi = \psi_{\rm R} + \psi_{\rm L}$$

我们还利用 Dirac 旋量的手征分量对 QED 费米子流 $\overline{\psi}\gamma^\mu\phi$ 进行分解：

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\phi = \overline{\psi}_{\rm R}\gamma^\mu\phi_{\rm R} + \overline{\psi}_{\rm R}\gamma^\mu\phi_{\rm L} + \overline{\psi}_{\rm L}\gamma^\mu\phi_{\rm R} + \overline{\psi}_{\rm L}\gamma^\mu\phi_{\rm L}$$

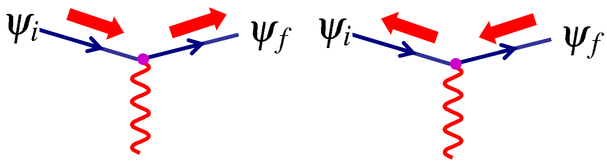
由于

$$\overline{\psi}_{\rm R}\gamma^\mu\phi_{\rm L} = 0, \qquad \overline{\psi}_{\rm L}\gamma^\mu\phi_{\rm R} = 0$$

因此 QED 费米子流为：

$$\boxed{\overline{\psi}\gamma^\mu\phi = \overline{\psi}_{\rm R}\gamma^\mu\phi_{\rm R} + \overline{\psi}_{\rm L}\gamma^\mu\phi_{\rm L}}$$

表明 QED 中手征守恒。在极端相对论情形下 (或者无质量 Dirac 粒子)，手征本征态等于螺旋度本征态，导致 QED 中的 Dirac 粒子只有两种非零的螺旋度组合。



现在把手征投影算符应用于弱带电流：

$$\overline{\psi}\tfrac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\phi \tag{4.7.22}$$

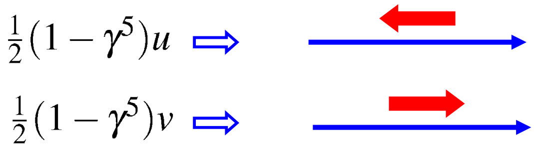
因为 $P_{\rm L} = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ 投影出 Dirac 粒子 ϕ 的左手手征态，所以弱带电流为：

$$\overline{\psi}\tfrac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\phi = \overline{\psi}\gamma^\mu\phi_L$$

由于旋量 $\overline{\psi} = \overline{\psi}_{\rm R} + \overline{\psi}_{\rm L}$，而 $\overline{\psi}_{\rm R}\gamma^\mu\phi_{\rm L} = 0$，因此弱带电流为：

$$\boxed{\overline{\psi}\tfrac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\phi = \overline{\psi}_{\rm L}\gamma^\mu\phi_L}$$

即只有 Dirac 粒子的左手手征分量 (或者 Dirac 反粒子的右手手征分量) 参与带电弱相互作用。在极端相对论情形下，手征本征态等于螺旋度本征态：



因此**在极端相对论情形下，只有左手粒子和右手反粒子参与弱带电流相互作用过程**。例如，正反电子和相应电子中微子的弱作用顶点只有三种，如图 4.55 所示，它们依次是：左手 e^- 左手 ν_e、右手 e^+ 右手 $\overline{\nu}_e$、左手 e^- 右手 $\overline{\nu}_e$。弱相互作用的螺旋度相关性 (本质上是 $V-A$ 结构) 表明弱作用过程中宇称破坏。

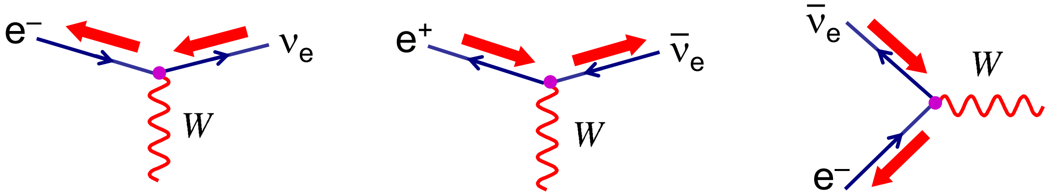


图 4.55: 三种弱带电流作用顶点。

4.7.5 $\pi^- \to l^- + \overline{\nu}_l$ 衰变过程

考察 π^- 介子的衰变过程，如图 4.56 所示。由于 $\binom{e^-}{\nu_e}$ 和 $\binom{\mu^-}{\nu_\mu}$ 分别是第一代和第二代轻子，它们的相互作用性质完全相同[4]，因此人们预期：

$$\frac{\Gamma(\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu)} = \frac{\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e \text{ 的相空间}}{\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu \text{ 的相空间}}$$

在 π^- 质心系中，根据 (2.2.19)、(2.2.18) 式：

$$\frac{\Gamma(\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu)} = \frac{p_e^*}{p_\mu^*} = \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} = 2.34 \tag{4.7.23}$$

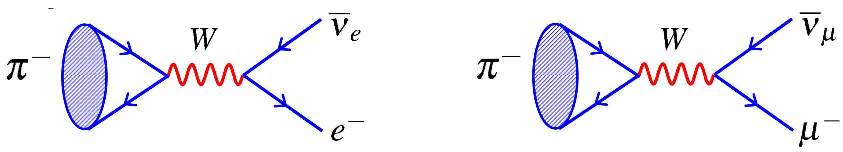


图 4.56: π^- 的纯轻子衰变。

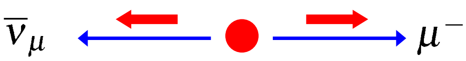
但是实验发现：

$$\frac{\Gamma(\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu)} = (1.230 \pm 0.004) \times 10^{-4} \tag{4.7.24}$$

即 $\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e$ 衰变是被高度压低的。

一、利用螺旋度结构定性解释

在 π^- 质心系中，由于 π^- 是赝标介子，它的自旋是零，因此 π^- 衰变末态中的轻子 (例如 μ 子) 和相应的反中微子 $\overline{\nu}$ 自旋相反，沿着相反方向运动。反中微子质量几乎为零，它的螺旋度态只能是右手的。为了保证角动量守恒，μ 子必须处在右手螺旋度本征态。这个结论对于电子同样适用。



[4]轻子的普适性，参阅第 4.7.6 节。

但是参与弱作用的是左手手征本征态，故需要知道轻子的右手螺旋度本征态中所含左手手征本征态的份额。我们知道 Dirac 粒子的右手螺旋度本征态的一般表达式为：

$$u_\uparrow = N\begin{pmatrix} C \\ e^{i\phi}S \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m}C \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m}e^{i\phi}S \end{pmatrix}$$

其中 $C=\cos\frac{\theta}{2}, S=\sin\frac{\theta}{2}$。利用 $P_{\rm L}=\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$，投影出 $u_\uparrow$ 中的左手手征本征态：

$$P_{\rm L}u_\uparrow = \frac{1}{2}N\left(1-\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\right)\begin{pmatrix} C \\ e^{i\phi}S \\ -C \\ -e^{i\phi}S \end{pmatrix} = \frac{1}{2}N\left(1-\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\right)u_{\rm L} \xrightarrow{\text{极端相对论 } E\gg m} 0$$

类似地，利用 $P_{\rm R}=\frac{1}{2}(1+\gamma^5)$，投影出 $u_\uparrow$ 中的右手手征本征态：

$$P_{\rm R}u_\uparrow = \frac{1}{2}N\left(1+\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\right)\begin{pmatrix} C \\ e^{i\phi}S \\ C \\ e^{i\phi}S \end{pmatrix} = \frac{1}{2}N\left(1+\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\right)u_{\rm R} \xrightarrow{\text{极端相对论 } E\gg m} u_{\rm R}$$

因此：

$$\underbrace{u_\uparrow}_{\text{RH Helicity}} = P_{\rm R}u_\uparrow + P_{\rm L}u_\uparrow = \frac{1}{2}N\left(1+\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\right)\underbrace{u_{\rm R}}_{\text{RH Chiral}} + \frac{1}{2}N\left(1-\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\right)\underbrace{u_{\rm L}}_{\text{LH Chiral}}$$

如果轻子质量为零，则轻子右手螺旋度态 $u_\uparrow$ 中左手手征本征态 $u_{\rm L}$ 的含量为零，这时反应过程是严格禁戒的。反之，则 $u_\uparrow$ 中 $u_{\rm L}$ 的含量不为零。

我们粗略预期跃迁矩阵元正比于轻子 $u_\uparrow$ 中的 $u_{\rm L}$ 分量：

$$\mathcal{M}_{fi} \propto f_{\rm wrong} = \frac{1}{2}N\left(1-\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\right) = \frac{m}{m_\pi + m}$$

其中 $f_{\rm wrong}$ 意指 wrong-handed。由于 $m_e \ll m_\mu$，故 $\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e$ 相比 $\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu$ 被高度压低。事实上，对于两体衰变，很容易求得：

$$f_{\rm wrong} = \begin{cases} 0.0035 & (\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e) \\ 0.43 & (\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu) \end{cases}$$

于是：

$$\frac{\Gamma(\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu)} = \left(\frac{0.0035}{0.43}\right)^2 \approx 6.6\times 10^{-5}$$

再简单乘以相位因子导致的差异 2.34，结果是：

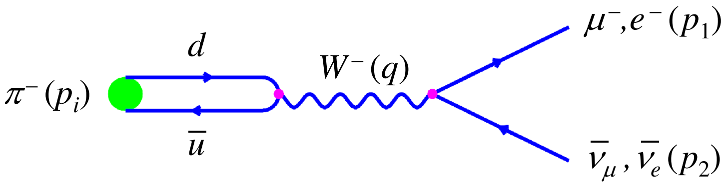
$$\frac{\Gamma(\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu)} \approx 1.55\times 10^{-4}$$

这种粗略的估计基本符合实验事实。

二、利用费曼规则具体计算

理论上 $\frac{\Gamma(\pi^-\to e^-+\overline{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^-\to\mu^-+\overline{\nu}_\mu)}$ 是可以精确计算的。根据该过程的费曼图，考虑 $q^2 \ll m_W^2$，容易写出不变矩阵元：

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_w^2}{8m_W^2} g_{\mu\nu} j_l^\mu j_h^\nu \tag{4.7.25}$$



式中 j_l^μ 和 j_h^ν 分别是轻子流和强子流。其中轻子流为：

$$j_l^\mu = \overline{u}(p_1)\gamma^\mu(1-\gamma^5)v(p_2) \tag{4.7.26}$$

强子流的底层是由 $\overline{u}, d$ 夸克组成的夸克流 $\overline{u}\gamma^\mu(p_u)\gamma^\nu(1-\gamma^5)v(p_d)$。虽然我们可以写出自由夸克的波函数，但是当它们被束缚在 π^- 介子中，必须考虑夸克 PDF，QCD 理论还不能给出具体形式，只能依赖唯象描述。通常用一个圆点表示隐藏在强子中的夸克流。为了构成一个 Lorentz 不变的四维流 j_h^ν，唯一可用的变量是 π^- 的四维动量 p_i^ν。考虑到 π^- 是自旋为零的赝标介子，强子流的形式为：

$$j_h^\nu = f(q^2)p_1^\nu$$

其中 $f(q^2)$ 必须是一个标量，一般是四动量转移平方 q^2 的函数。但是注意到 $q^2 = m_\pi^2$，故 $f(q^2) = f_\pi$ 是一个简单的数。强子流则简化为：

$$j_h^\nu = f_\pi p_i^\nu \tag{4.7.27}$$

常数 f_π 由实验确定。

把 (4.7.27)、(4.7.26) 式代入 (4.7.25) 式，并利用 Fermi 耦合常数，得到：

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \overline{u}(p_1)\gamma^\mu(1-\gamma^5)v(p_2)p_{i\mu} \\
&= \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \overline{u}(p_1)\gamma^\mu(1-\gamma^5)v(p_2)(p_1+p_2)_\mu \qquad \because p_i = p_1 + p_2 \\
&= \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \overline{u}(p_1)(\not{p}_1+\not{p}_2)(1-\gamma^5)v(p_2) \qquad \because \gamma^\mu p_\mu = \not{p} \\
&= \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \overline{u}(p_1)(m_l+0)(1-\gamma^5)v(p_2) \qquad \because \text{Dirac 方程} \\
&= \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi m_l \overline{u}(p_1)(1-\gamma^5)v(p_2)
\end{aligned}$$

其中 m_l 是轻子 e^-, μ^- 的质量。于是不变矩阵元模方的自旋平均为：

$$\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = \frac{G_F^2}{2} f_\pi^2 m_l^2 \sum_{\text{spins}} \left[\overline{u}(p_1)(1-\gamma^5)v(p_2)\right]^\dagger \left[\overline{u}(p_1)(1-\gamma^5)v(p_2)\right]$$

利用 Casimir 技巧和求迹公式 (具体求解参考 Griffiths 第 316 页)，得到：

$$\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = 4G_F^2 f_\pi^2 m_l^2 (p_1 \cdot p_2) \tag{4.7.28}$$

在质心系中：

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}(s - m_1^2 - m_2^2) = \frac{1}{2}(m_\pi^2 - m_l^2)$$

于是不变矩阵元模方的自旋平均为：

$$\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = 2G_F^2 f_\pi^2 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2)$$

显然 $\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle$ 是一个常数，因此衰变率中的两体不变相空间积分可以独立计算。最终计算结果由 (2.2.19) 式给出：

$$\Gamma_{fi}^* = \frac{p^*}{8\pi m_i^2}\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle \tag{4.7.29}$$

其中 m_i 是衰变粒子 π^- 的质量 $m_i = m_\pi$，p^* 根据 (2.2.18) 式计算，结果是：

$$p^* = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi} \tag{4.7.30}$$

把 (4.7.28)、(4.7.30) 式代入 (4.7.29) 式，得到质心系中 π^- 纯轻子衰变的衰变率：

$$\boxed{\Gamma(\pi \to l\nu) = \frac{G_F^2}{8\pi} f_\pi^2 \frac{m_l^2}{m_\pi^3}(m_\pi^2 - m_l^2)^2 = \frac{G_F^2}{8\pi} f_\pi^2 m_\pi m_l^2 \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2}\right)^2} \tag{4.7.31}$$

于是 μ^- 衰变的比例为：

$$\frac{\Gamma(\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{1 - m_e^2/m_\pi^2}{1 - m_\mu^2/m_\pi^2}\right)^2 = 1.28 \times 10^{-4}$$

与实验结果 (4.7.24) 一致。

4.7.6　轻子普适性

轻子通过 W 玻色子传递的弱带电流过程共有三种作用顶点，如图 4.57 所示。这三种弱作用顶点的强度相同，称为**轻子普适性 (lepton universality)**。在前面的讨论中，我们已经隐含地使用了轻子普适性：$g_w^e = g_w^\mu = g_w^\tau$ 或者 $G_F^e = G_F^\mu = G_F^\tau$。

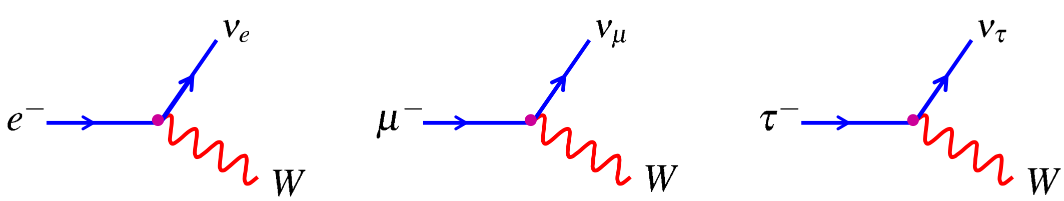
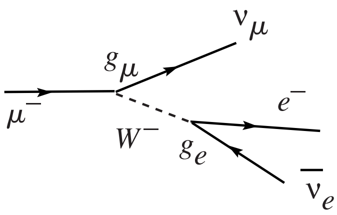
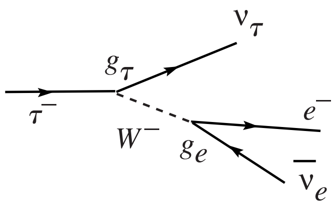


图 4.57: 轻子的三种弱带电流作用顶点。

一、$\mu-\tau$ 普适性

轻子 $\mu-\tau$ 的普适性可以通过比较 μ^- 和 τ^- 的 β 衰变过程加以检验。





我们知道 $\mu^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$ 的衰变率由 (4.7.18) 式给出：

$$\Gamma(\mu \to e\nu\nu) = \frac{G_F^e G_F^\mu m_\mu^5}{192\pi^3}$$

式中的两个作用顶点处的 Fermi 耦合常数分别用 G_F^μ 和 G_F^e 表示。于是 μ 的寿命为：

$$\tau_\mu = Br(\mu \to e\nu\nu)\frac{1}{\Gamma(\mu \to e\nu\nu)} = 100\%\frac{192\pi^3}{G_F^e G_F^\mu m_\mu^5}$$

类似地根据 $\tau^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\tau$ 可以得到 τ 的寿命为：

$$\tau_\tau = Br(\tau \to e\nu\nu)\frac{1}{\Gamma(\tau \to e\nu\nu)} = 17.85\%\frac{192\pi^3}{G_F^e G_F^\tau m_\tau^5}$$

由上面两式得到：

$$\frac{G_F^\mu}{G_F^\tau} = \frac{1}{0.1785}\frac{m_\tau^5}{m_\mu^5}\frac{\tau_\tau}{\tau_\mu}$$

式中的 μ,τ 的质量和寿命已由实验精密测量：

$$m_\mu = 0.105\,658\,367\,(4)\,\text{GeV} \qquad \tau_\mu = 2.197\,019\,(21) \times 10^{-6}\,\text{s}$$
$$m_\tau = 1.776\,84\,(17)\,\text{GeV} \qquad \tau_\tau = 0.2906\,(10) \times 10^{-12}\,\text{s}$$

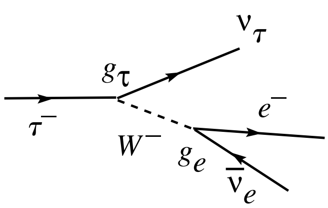
于是：

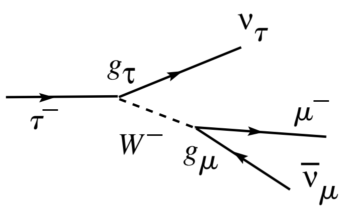
$$\boxed{\frac{G_F^\tau}{G_F^\mu} = 1.003 \pm 0.003} \tag{4.7.32}$$

说明 μ 和 τ 的弱相互作用强度相同。

二、$e-\mu$ 普适性

轻子 $e-\mu$ 的普适性可以通过比较 τ^- 的轻子衰变过程加以检验。





类似上面处理，我们可以根据 $\tau^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\tau$ 得到 τ 的寿命：

$$\tau_\tau = Br(\tau \to e\nu\nu)\frac{192\pi^3}{G_F^e G_F^\tau m_\tau^5}$$

也可以根据 $\tau^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu + \nu_\tau$ 得到 τ 的寿命：

$$\tau_\tau = Br(\tau \to \mu\nu\nu)\frac{192\pi^3}{G_F^\mu G_F^\tau m_\tau^5}$$

由上面两式得到：

$$\frac{G_F^\mu}{G_F^e} = \frac{Br(\tau \to \mu\nu\nu)}{Br(\tau \to e\nu\nu)}$$

根据实验测量的分支比：

$$Br(\tau \to e\nu\nu) = 0.1785\,(5) \qquad Br(\tau \to \mu\nu\nu) = 0.1736\,(5)$$

得到：

$$\frac{G_F^\mu}{G_F^e} = 0.973 \pm 0.004$$

说明 e 和 μ 的弱相互作用强度也相同。上式的结果与 1 略有偏离，原因在于我们在利用 $\tau^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu + \nu_\tau$ 过程计算 τ 寿命时使用了如下衰变率：

$$\Gamma(\tau \to \mu\nu\nu) = \frac{G_F^\mu G_F^\tau m_\tau^5}{192\pi^3} \tag{4.7.33}$$

上式是假设 μ 质量为零时得到的。考虑到 μ 质量不为零，衰变率 $\Gamma(\tau \to \mu\nu\nu)$ 将因为相空间轻微减少而略有减少，于是寿命将略有增加，导致 $\frac{G_F^\mu}{G_F^e}$ 也略有增加。更准确的计算表明 $\frac{G_F^\mu}{G_F^e} = 1.000 \pm 0.004$。对于前面的 $\mu - \tau$ 普适性，也应该考虑 e 质量不为零造成的相空间减少。更准确的计算表明 $\frac{G_F^\tau}{G_F^\mu} = 1.000 \pm 0.005$。

4.7.7 Cabibbo 理论

不仅轻子存在味道改变的弱带电流过程，夸克也存在这样的过程，例如 μ^- 衰变和中子的 β 衰变都是通过 W 传递相互作用的弱带电流过程，如图 4.58 所示。

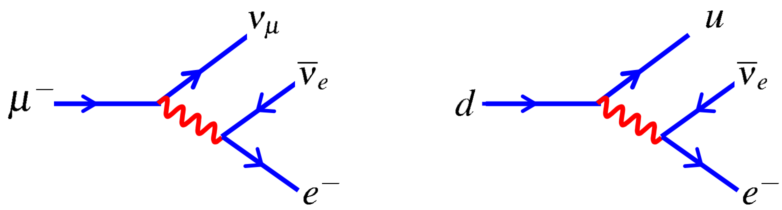


图 4.58: 轻子和夸克的弱带电流过程。

我们知道轻子的弱作用具有普适性，即 $l^- \to \nu_l W^-, l = e, \mu, \tau$ (l, ν_l 为同代轻子) 的耦合常数相同。很自然地预期夸克的弱作用也有类似的普适性，于是通过图 4.58 所示的两个过程测量 G_F 应该给出相同的值。实验发现：

$$G_F^\mu = 1.166\,32(02) \times 10^{-5}\,\text{GeV}^{-2}$$
$$G_F^\beta = (1.136 \pm 0.003) \times 10^{-5}\,\text{GeV}^{-2}$$

两者之比为：

$$\frac{G_F^\beta}{G_F^\mu} = 0.974 \pm 0.003$$

即 u 夸克和 d 夸克之间的弱作用强度确实和轻子的弱作用强度差不多，但是在实验精度下明显偏离预期的 1。

实验还发现某些强子的弱衰变过程被明显压低。例如比较 π^-、K^- 的衰变过程：

$$\begin{array}{ccccccc} \pi^- & \to & \mu^- & + & \overline{\nu}_\mu & & |\Delta S| = 0 \\ K^- & \to & \mu^- & + & \overline{\nu}_\mu & & |\Delta S| = 1 \end{array}$$

其中 π^- 衰变过程中奇异数不改变，K^- 衰变过程中奇异数改变，如图 4.59 所示。根据 (4.7.31) 式，两者衰变率之比为：

$$\frac{\Gamma(K \to l\nu)}{\Gamma(\pi \to l\nu)} = \frac{f_K^2}{f_\pi^2}\frac{m_\pi^3}{m_K^3}\left(\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_K^2 - m_\mu^2}\right)^2 = 8.06\frac{f_K^2}{f_\pi^2}$$

如果味 SU(3) 是严格对称的，则 $\frac{f_K}{f_\pi} = 1$，否则 $\frac{f_K}{f_\pi} > 1$。实际上 SU(3) 近似对称，故强作用使得 $\frac{\Gamma(K\to l\nu)}{\Gamma(\pi\to l\nu)} > 8.06$。但是实验发现：

$$\frac{\Gamma(K \to l\nu)}{\Gamma(\pi \to l\nu)} = 1.34$$

这个比值比预期的低一个数量级。

仔细分析轻子的和夸克的弱 CC 过程，我们发现：

- 轻子的味道改变总是发生在同代轻子之间，表现为代轻子数守恒。轻子的带电弱作用耦合常数相等，表现出轻子普适性。

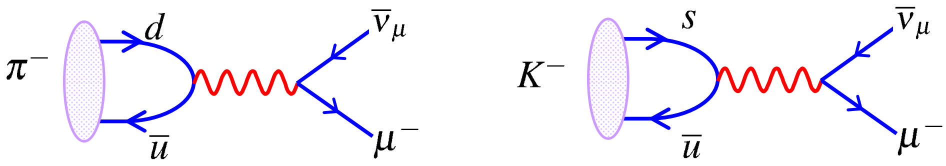


图 4.59: π^- (奇异数不改变) 和 K^- (奇异数改变) 的半轻子弱带电流过程。

- 夸克的味道改变可以发生在同代夸克之间，如中子的 β 衰变或 π^- 介子的半轻子衰变，也可以发生在不同代夸克之间，如 K^- 介子的半轻子衰变。前者的反应率比预期的略有压低，后者的反应率则明显压低。

1963 年 Cabibbo 基于当时已知的 u,d,s 等三种夸克，认为夸克具有和轻子一样的带电弱作用耦合常数 (因而是普适的弱相互作用，或者 weak universality)，但是夸克的弱作用本征态 (通过弱作用产生或消失时的态) u',d',s' 不同于质量本征态 (不存在弱作用例如自由时的态) u,d,s，电荷为 $-\frac{1}{3}e$ 的 d 型夸克中参与带电弱作用的不是 d,s，而是 d',s'。d,s 和 d',s' 各自构成一组正交归一的基，后者相对于前者转动一定角度，称为 Cabibbo 角，记作 θ_C，如图 4.60 所示。

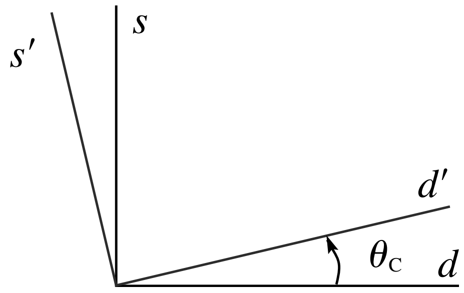


图 4.60: Cabibbo 转动。

在 Cabibbo 理论中，夸克带电弱作用发生在 u 型夸克和 d' 夸克之间，如图 4.61 所示。弱作用本征态 d' 是 d 和 s 的线性混合：

$$d' = d\cos\theta_C + s\sin\theta_C \tag{4.7.34}$$

式中因考虑到组合系数必须满足正交归一条件，故已取为角度的 sine 和 cosine 形式。

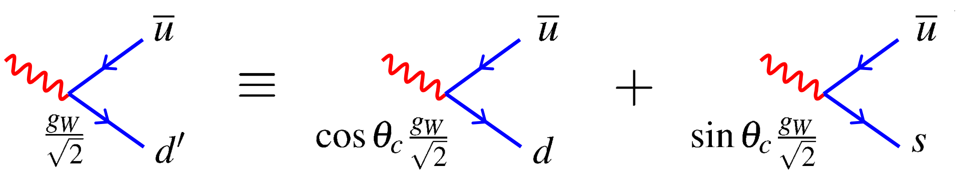


图 4.61: Cabibbo 理论中夸克的带电弱相互作用发生在 u 型夸克和 d' 夸克之间。

Cabibbo 理论可以很好地解释上面提到的实验现象。例如，对于 π^- 和 K^- 的半轻子衰变过程，在夸克流作用顶点处需要分别乘以 $\cos\theta_C$ 和 $\sin\theta_C$ 因子，如图 4.62 所示。



图 4.62: 用 Cabibbo 理论解释 π^- 和 K^- 的半轻子衰变。

于是衰变率中需要各自乘以相关因子：

$$\Gamma(\pi\to\mu\nu)\propto|\mathcal{M}_{fi}|^2\propto\cos^2\theta_C$$
$$\Gamma(K\to\mu\nu)\propto|\mathcal{M}_{fi}|^2\propto\sin^2\theta_C$$

两者之比：

$$\frac{\Gamma(K\to l\nu)}{\Gamma(\pi\to l\nu)}=8.06\frac{f_K^2}{f_\pi^2}\tan^2\theta_C$$

由于 Cabibbo 角比较小，因此在考虑 $\tan^2\theta_C$ 因子后，上式比值接近实验测量值 1.34。事实上，众多实验测量了 Cabibbo 角，目前结果为：

$$\theta_C=12.9^\circ \tag{4.7.35}$$

相应的三角函数值为：

$$\cos\theta_C=0.974,\qquad \sin\theta_C=0.223,\qquad \tan\theta_C=0.229$$

类似地，对于 μ^- 衰变和 β 衰变，前者是轻子的带电弱作用，顶点处不存在任何 Cabibbo 相关因子，后者是夸克的带电弱作用，在顶点处需要乘以 $\cos\theta_C$ 因子。如图 4.63 所示。

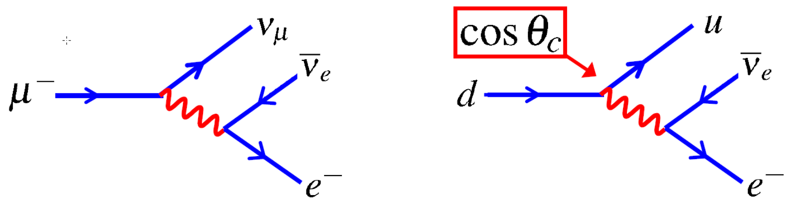


图 4.63: 用 Cabibbo 理论解释 μ^- 衰变和 β 衰变。

于是衰变率为：

$$\Gamma(\mu\to e\nu\nu)\propto|\mathcal{M}_{fi}|^2\propto g_w^2\cdot g_w^2 \qquad\equiv(G_F^\mu)^2$$
$$\Gamma(d\to u\nu\nu)\propto|\mathcal{M}_{fi}|^2\propto g_w^2\cdot\left(g_w\cos\theta_C\right)^2\equiv(G_F^\beta)^2$$

两者之比为：

$$\frac{\Gamma(d\to u\nu\nu)}{\Gamma(\mu\to e\nu\nu)}=\cos^2\theta_C=\frac{(G_F^\beta)^2}{(G_F^\mu)^2}$$

或者：

$$\frac{G_F^\beta}{G_F^\mu}=\cos\theta_C=0.974$$

与实验结果完全一致。

4.7.8 GIM 机制

虽然 Cabibbo 理论在解释众多实验结果时取得了很大的成功，但是也存在一个很大的问题。由于 u, d 夸克之间以及 u, s 夸克之间都存在带电弱相互作用，因此 K^0 可以通过如图 4.64 所示的箱图衰变到一对 μ 子。根据 Cabibbo 理论，该过程的跃迁矩阵元为：

$$\mathcal{M}_1 \propto g_w^4 \cos\theta_C \sin\theta_C \tag{4.7.36}$$

但是实验测得的衰变率远远小于理论预言。

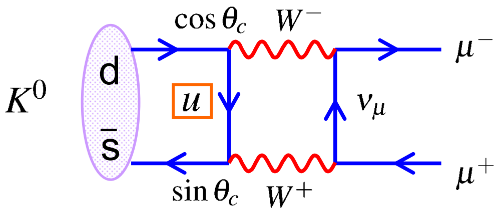


图 4.64: $K^0 \to \mu^- + \mu^+$ 箱图。

1970 年 Glashow, Iliopoulos 和 Maiani 提出 GIM 机制解决了这个问题。他们认为在弱相互作用中 u 和 d' 态组成二重态 $\binom{u}{d'}$，同时提出存在第四种夸克 c (在 c 夸克于 1974 年被发现前)，c 和 s' 态构成了第二个二重态 $\binom{c}{s'}$。如同 d' 是 d, s 的线性混合，s' 也是 d, s 的线性混合。由于 d' 和 s' 正交，因此有：

$$s' = -d\sin\theta_C + s\cos\theta_C \tag{4.7.37}$$

可以把 (4.7.34) 式和 (4.7.37) 式合写为：

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{4.7.38}$$

它反映了弱作用本征态 d', s' 和质量本征态 d, s 这两组基之间的关系，称为夸克混合。根据 GIM 机制，夸克的弱作用发生在 u, d' 夸克和 c, s' 夸克之间，如图 4.65 所示。

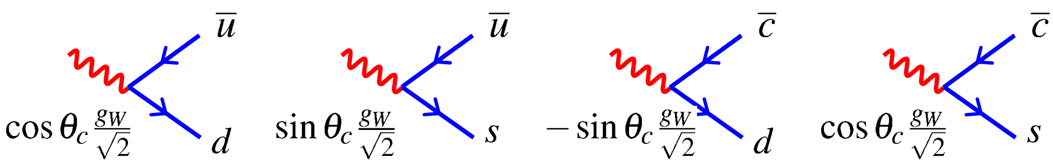


图 4.65: GIM 机制中夸克的带电弱相互作用发生在 u, d' 夸克和 c, s' 夸克之间。

下面我们利用 GIM 机制解释前述 $K^0 \to \mu^- + \mu^+$ 衰变问题。事实上图 4.65 表明，在 GIM 机制下还存在 c, d 夸克和 c, s 夸克之间的带电弱作用，因此 K^0 可以通过如图 4.66 所示的另一种箱图衰变到一对 μ 子。该过程的跃迁矩阵元为：

$$\mathcal{M}_2 \propto -g_w^4 \cos\theta_C \sin\theta_C \tag{4.7.39}$$

其符号和 (4.7.36) 式所示的跃迁过程相反。于是总的衰变率为：

$$\Gamma(K^0 \to \mu^- + \mu^+) \propto |\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 \approx 0$$

由于夸克质量不等 $m_u \neq m_c$，两个矩阵元不能完全抵消，衰变率不完全为零。

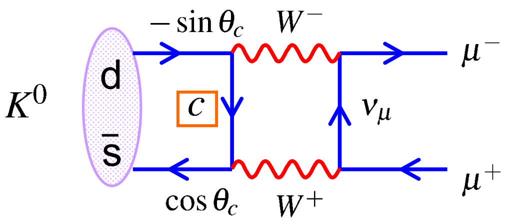


图 4.66: $K^0 \to \mu^- + \mu^+$ 另一种箱图。

4.7.9 夸克弱带电流的费曼规则

1973 年 Kobayashi 和 Maskawa 把 Cabibbo 理论和 GIM 机制推广到三代夸克的情形。此时的带电弱相互作用发生在 u, c, t 和 d', s', b' 之间，夸克混合为：

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}}_{\text{Weak Eigenstates}} = \underbrace{\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}}_{\text{CKM Matrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}}_{\text{Mass Eigenstates}} \tag{4.7.40}$$

式中的变换矩阵 V 称为 CKM 矩阵。注意 V 是幺正矩阵，满足：

$$VV^\dagger = 1$$

其中每个矩阵元 V_{ij} 都是复常数，根据相互作用发生的次序，有时用 V_{ij}，有时用 V_{ij}^*。我们以 d' 为例进行说明。

对于 $u \to d' + W^+$ 跃迁，在跃迁矩阵元中 d' 作为伴随旋量出现，因此：

$$\overline{d}' = V_{ud}^* \overline{d} + V_{us}^* \overline{s} + V_{ub}^* \overline{b} \tag{4.7.41}$$

故 CKM 矩阵元用 $V_{ud}^*, V_{us}^*, V_{ub}^*$ 等。弱作用顶点如图 4.67 所示。显然 u, d' 夸克之间的弱相互作用包含 u, d、u, s、u, b 态之间的耦合。

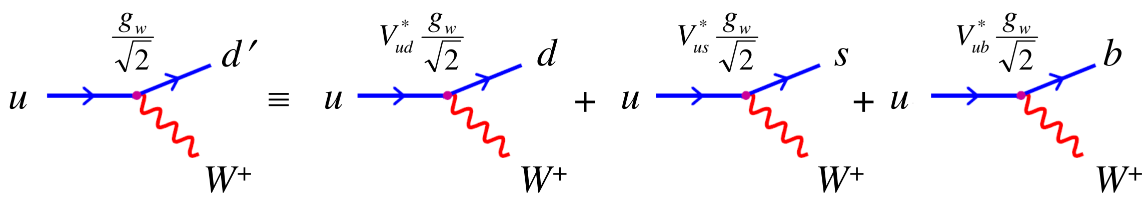


图 4.67: $u \to d' + W^+$ 的夸克带电弱作用。

弱带电流可以写为：

$$j_{ud'} = \overline{d}' \left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \tfrac{1}{2}(1-\gamma^5) \right] u$$

式中 $\overline{d}'$ 由 (4.7.41) 式给出，因而 $j_{ud'}$ 包含三项之和。其中 $u \to d$ 的弱带电流为：

$$\boxed{j_{ud} = \overline{d} V_{ud}^* \left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \tfrac{1}{2}(1-\gamma^5) \right] u} \tag{4.7.42}$$

对于 $d' \to u + W^-$ 跃迁，在跃迁矩阵元中 d' 作为旋量出现，因此：

$$d' = V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b \tag{4.7.43}$$

此时 CMK 矩阵元用 V_{ud}, V_{us}, V_{ub} 等。弱作用顶点如图 4.68 所示。可见 u, d' 夸克之间的弱相互作用仍然包含 u, d、u, s、u, b 态之间的耦合。

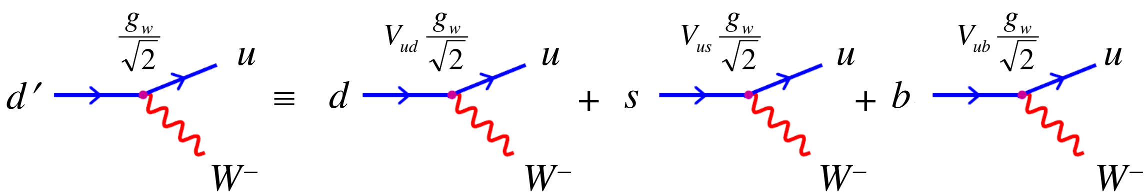


图 4.68: $d' \to u + W^-$ 的夸克带电弱作用。

弱带电流可以写为：

$$j_{d'u} = \overline{u}\left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}}\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\right]d'$$

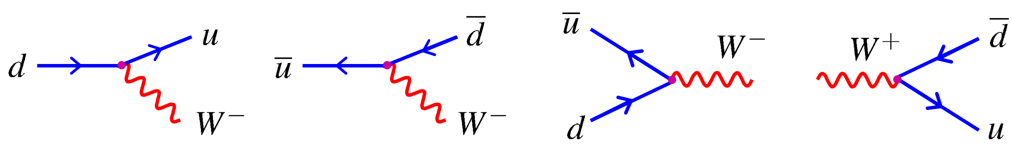
式中 d' 由 (4.7.43) 式给出，故 $j_{d'u}$ 也包含三项之和。其中 $u \to d$ 的弱带电流为：

$$\boxed{j_{du} = \overline{u}\left[-\frac{ig_w}{\sqrt{2}}\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\right]V_{ud}d} \tag{4.7.44}$$

综上所述，我们得到**夸克带电弱作用顶点因子的费曼规则**：

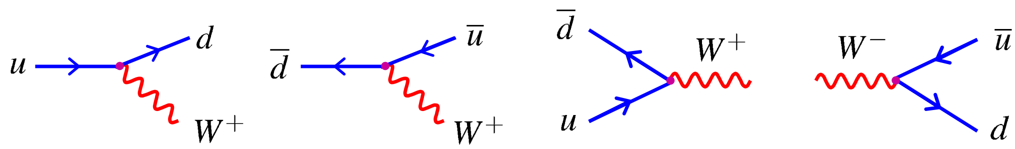
1. 当 d 型夸克作为旋量写入 $\mathcal{M}_{fi}$ 时，我们要用 CKM 矩阵元，顶点因子为：

$$\boxed{-\frac{ig_w}{\sqrt{2}}V_{ud}\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)} \tag{4.7.45}$$



2. 当 d 型夸克作为伴随旋量写入 $\mathcal{M}_{fi}$ 时，用 CKM 矩阵元的复共轭，顶点因子为：

$$\boxed{-\frac{ig_w}{\sqrt{2}}V_{ud}^*\gamma^\mu\frac{1}{2}(1-\gamma^5)} \tag{4.7.46}$$



4.7.10 CKM 矩阵元

CKM 矩阵 V 是幺正矩阵，故有 $n^2=3^2=9$ 个独立实参数。这里 n 是夸克代的数目，因此有 $2n=6$ 种夸克。通过规定这 $2n$ 种夸克之间的相对相位可以去掉 $2n-1$ 个参数，还剩下 $n^2-2n+1=(n-1)^2=4$ 个实参数。可以选取 $\frac{1}{2}n(n-1)=3$ 个为描述 n 维实空间中转动的 Euler 角 θ_i，另外 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)=1$ 个参数是不可去相位因子 δ_j。粒子物理中，θ_i 的出现体现了代的混合，δ_j 的出现则反映为代的混合中的 CP 破坏。

标准模型的 CKM 矩阵可以通过四个参数表示。目前常用的表示为：

$$
\begin{aligned}
V &= R_{23}(\theta_{23},0)\times R_{13}(\theta_{13},-\delta)\times R_{12}(\theta_{12},0)\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&c_{23}&s_{23}\\0&-s_{23}&c_{23}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_{13}&0&s_{13}e^{-i\delta}\\0&1&0\\-s_{13}e^{i\delta}&0&c_{13}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_{12}&s_{12}&0\\-s_{12}&c_{12}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}c_{12}c_{13}&s_{12}c_{13}&s_{13}e^{-i\delta}\\-s_{12}c_{23}-c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta}&c_{12}c_{23}-s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta}&s_{23}c_{13}\\s_{12}s_{23}-c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta}&-c_{12}s_{23}-s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta}&c_{23}c_{13}\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.7.47}
$$

上式是指“先绕 z 轴转动 θ_{12}，再绕新的 y 轴转动 θ_{13}，最后绕 x 轴转动 θ_{23}”系列操作下，质量本征态 d,s,t 这组基的变换矩阵，如图所示。式中 $\theta_{12},\theta_{23},\theta_{13}$ 也称为混合角，δ 称为相位因子。

$$
\begin{aligned}
s_{ij} &= \sin\theta_{ij}\\
c_{ij} &= \cos\theta_{ij}
\end{aligned}
$$

式 (4.7.47) 是 CKM 矩阵的一种精确的表示方式。还有一种更常用的 CKM 矩阵的表示是 Wolfenstein 参数化方式，它是在考虑到 $s_{13}\ll s_{23}\ll s_{12}$ 后提出的近似表示，具体形式可参阅相关文献[5]。

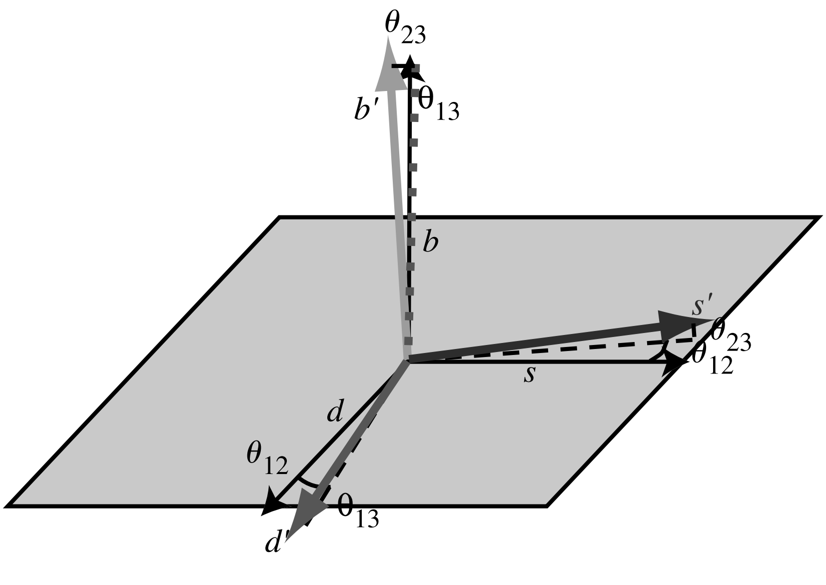


图 4.69: 三代夸克情形下的夸克转动。

[5] 参阅文献：Particle Data Group,“Review of Particle Physics”, *Phys. Lett. B* **667** (2008)，第 951-965 页。

第 2.4.4 节中讨论了 $K^0\overline{K}^0$ 系统的 CP 破坏，即：

$$\Gamma(\overline{K}^0_{t=0} \to K^0) \neq \Gamma(K^0_{t=0} \to \overline{K}^0)$$

可以利用 CKM 矩阵解释 $K^0\overline{K}^0$ 系统的 CP 破坏。为此考虑 K^0 和 $\overline{K}^0$ 混合的箱图，如图所示。图中 $q=\{u,c,t\}$，$q'=\{u,c,t\}$。

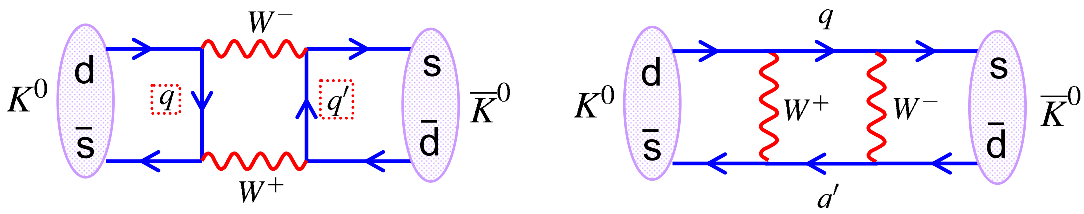


图 4.70: K^0 和 $\overline{K}^0$ 混合的箱图。

在计算衰变率时必须对跃迁矩阵元中所有参与交换的夸克求和。为简单起见，我们只考虑通过 c,t 交换的箱图，如图 4.71 所示。

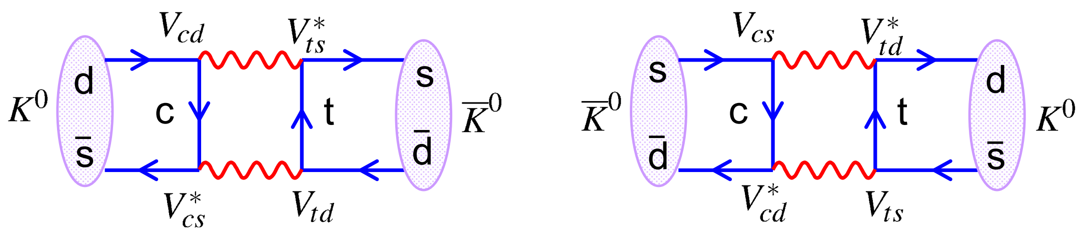


图 4.71: 通过 c,t 交换的 K^0 和 $\overline{K}^0$ 混合的箱图。

图 4.71 中两个箱图所对应的跃迁矩阵元分别是：

$$\mathcal{M}_{fi} \propto A_{ct} V_{cd} V^*_{cs} V_{td} V^*_{ts}$$
$$\mathcal{M}'_{fi} \propto A_{ct} V^*_{cd} V_{cs} V^*_{td} V_{ts}$$

其中 A_{ct} 是和虚粒子动量积分相关的一个实常数。从上式可知：

$$\mathcal{M}'_{fi} = \mathcal{M}^*_{fi}$$

因此衰变率之差：

$$\Gamma(K^0 \to \overline{K}^0) - \Gamma(\overline{K}^0 \to K^0) \propto \mathcal{M}_{fi} - \mathcal{M}^*_{fi} = 2\mathrm{Im}\mathcal{M}_{fi}$$

或者不对程度：

$$|\epsilon| \propto \mathrm{Im}\mathcal{M}_{fi}$$

因此，当且仅当 CKM 矩阵中存在虚数成份，才有衰变率的差异或不对称度不为零，即 CP 破坏，或者说 CP 破坏和 CKM 矩阵元中的虚部有关。对于 $K^0\overline{K}^0$ 系统，在考虑所有通过 $q=\{u,c,t\}$ 和 $q'=\{u,c,t\}$ 交换的箱图后，可以证明：

$$|\epsilon| \propto A_{ut}\mathrm{Im}(V_{ud}V^*_{us}V_{td}V^*_{ts}) + A_{ct}\mathrm{Im}(V_{cd}V^*_{cs}V_{td}V^*_{ts}) + A_{tt}\mathrm{Im}(V_{td}V^*_{ts}V_{td}V^*_{ts})$$

标准模型不能预言 CKM 矩阵元大小，这些矩阵元是模型的参数，它们必须由实验确定。实验上主要通过介子的半轻子衰变过程来测量 CKM 矩阵元，通常在提取 CKM 矩阵元参数时不得不依赖理论模型。对于介子的半轻子衰变过程，其中轻子部分的理论是清楚的，但是对介子的描述存在理论不确定性。因此 CKM 矩阵元的实验测量总是包含理论误差。Particle Data Geoup 发布的“Review of Particle Physics”详细介绍了 CKM 矩阵元的实验测量方法。我们列出其中的测量结果：

$$\begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.974 & 0.226 & 0.004 \\ 0.23 & 0.96 & 0.04 \\ 0.01 & 0.04 & 0.999 \end{pmatrix} \tag{4.7.48}$$

- 因为实验测量的是概率，所以式中 CKM 矩阵元都是取模后的值。
- 式中蓝色矩阵元 V_{td}, V_{ts}, V_{tb} 涉及和 t 夸克的弱耦合，目前实验上还没有直接测量结果，它们是根据 CKM 幺正性得到的。例如 $|V_{tb}|$ 可以根据下式计算得到：

$$|V_{ub}|^2 + |V_{cb}|^2 + |V_{tb}|^2 = 1$$

- 对角矩阵元对应同代夸克之间的跃迁，它们的值接近 1，说明弱作用发生在同代夸克之间的概率最大。值最小的两个矩阵元是 $|V_{ub}|$ 和 $|V_{td}|$，对应第一代夸克和第三代夸克之间的弱作用。
- 式中左上角四个红色矩阵元大致相当于 Cabibbo-GIM 方案中的混合矩阵：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix}$$

4.7.11 弱中性流

弱中性流过程的存在最早是 S. Bludman 于 1958 年提出的。他认为存在一种中性的弱相互作用，由中性的 Z^0 玻色子传递。轻子和夸克都存在弱中性流，如图 4.72 所示。

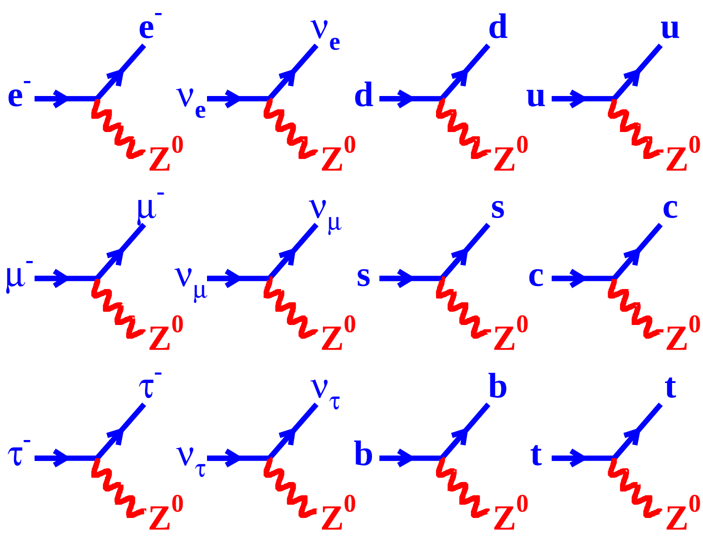


图 4.72: 轻子和夸克的弱中性流。

不同于弱带电流过程，弱中性流过程不改变轻子或夸克的味道。因此下列反应是不存在的：

$$\begin{array}{lllll} \mu^- & \to & e^- & + & Z^0 \\ s & \to & d & + & Z^0 \end{array}$$

前者违反轻子数守恒，后者改变奇异数。

1961 年 Glashow 发表了第一篇关于电磁作用和弱作用统一的文章，该理论要求存在一种中性的弱作用过程。1967 年 Weinberg 和 Salam 把 Glashow 的理论纳入对称性自发破缺的规范理论，1971 年 ’t Hooft 证明了电弱统一理论可重整化。因此从理论角度看，自然界中应该存在中性的弱相互作用过程。但是长期以来未得到实验证实。直到 1973 年，CERN 的科学家才在 Gargamelle 泡室中找到了如下反应过程的实验证据：

$$\overline{\nu}_\mu \ + \ e^- \ \to \ \overline{\nu}_\mu \ + \ e^-$$

这是令人信服弱中性流过程，该过程的泡室照片和费曼图如图 4.73 所示。后来的一系列中微子和核子散射实验还在 νq 层次证实了弱中性流的存在：

$$\overline{\nu}_\mu \ + \ N \ \to \ \overline{\nu} \ + \ N$$

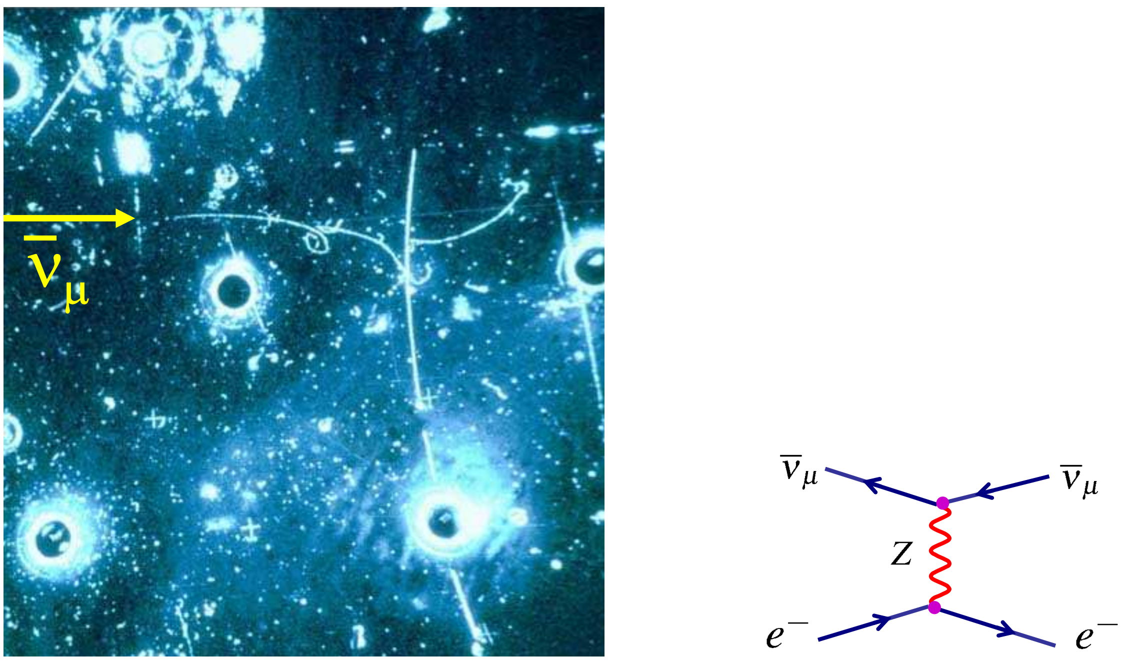


图 4.73: $\overline{\nu}_\mu + e^- \to \overline{\nu}_\mu + e^-$ 弱中性流的泡室照片和费曼图。

我们知道带电弱相互作用的顶点因子是：

$$\frac{-ig_w}{\sqrt{2}}\gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)$$

中性弱相互作用的顶点因子不再这么简单，它具有如下形式：

$$\boxed{-ig_z\gamma^\mu \frac{1}{2}(c_V - c_A\gamma^5)} \tag{4.7.49}$$

其中 g_z 是中性弱作用耦合常数，c_V 和 c_A 是和参与中性弱作用过程的夸克和轻子味道有关的系数。它们都和弱混合角 (或 Weinberg 角) θ_w 有关。我们将在第　　节中再对此展开讨论。

4.8 νp 深度非弹性散射

第 4.5 节中考虑了电子和质子的 DIS，其中虚光子作为探测质子内部结构的探针。我们也可以考虑中微子和质子的 DIS，这时候探针是虚 W 粒子。νN 的 DIS 不仅可以作为弱作用截面计算的一个很好的例子，还可以给出更多的核子结构函数以及核子中部分子的信息。

4.8.1 中微子的味道和实验产生

最近的中微子实验已经证明中微子是有质量的 (尽管很小)，不同味道的中微子之间可以互相转换，称为**中微子振荡 (neutrino oscillation)**。

中微子味道发生振荡的原因在于以前教科书中所说的中微子味道 (即弱作用本征态) ν_e,ν_μ,ν_τ 不是基本粒子质量本征态 ν_1,ν_2,ν_3，因此在某处产生的某种特定味道的中微子，例如 ν_e 在飞行一段时间到达另一地点后，可能被探测为其他味道的中微子，例如 ν_μ 或 ν_τ。因为中微子味道之间的振荡，所以轻子数不再是严格守恒的量子数，正如同夸克数并非守恒量。

那么什么是 ν_e,ν_μ,ν_τ 等三种味道的中微子？注意，实验上从来就没有直接探测过中微子，我们只能通过中微子的弱相互作用来探测中微子。因此我们定义电子中微子 ν_e 为伴随正电子 e^+ 通过弱带电流过程产生的中微子，或者定义 ν_e 为通过弱带电流过程湮灭产生 e^- 时的中微子，即中微子 ν_e 是弱相互作用的本征态 (ν_μ 和 ν_τ 也可类似定义)。如图 4.74 所示。

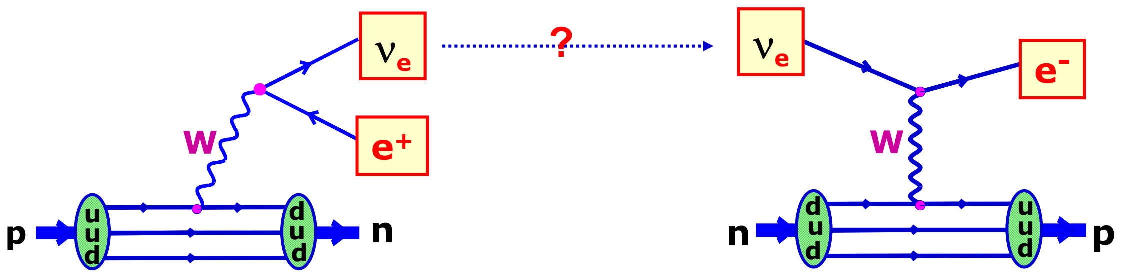


图 4.74: 中微子 ν_e,ν_μ,ν_τ 的定义。它们是弱相互作用的本征态。

除非在距离中微子产生点很远的距离来研究中微子问题，通常伴随正电子产生的中微子，再经过一次相互作用产生的是电子。所以我们可以继续使用 ν_e,ν_μ,ν_τ 等，并认为它们就是基本粒子态。

图 4.75 给出了实验室中产生中微子束流的一般方法。高能质子束流轰击固定靶，产生大量强子。利用聚焦磁铁组选出 π^+、K^+ 介子。这些带电介子衰变就产生基本平行的 ν_μ 束流：

$$
\begin{aligned}
\pi^+ &\to \mu^+ + \nu_\mu, &\sim 99.99\% \\
K^+ &\to \mu^+ + \nu_\mu, &\sim 63.53\%
\end{aligned}
$$

如果聚焦磁铁选出的是 π^-、K^- 介子，则得到 $\overline{\nu}_\mu$ 束流。

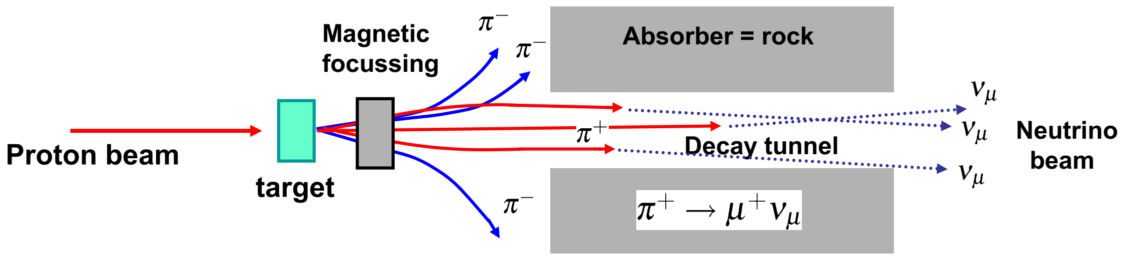
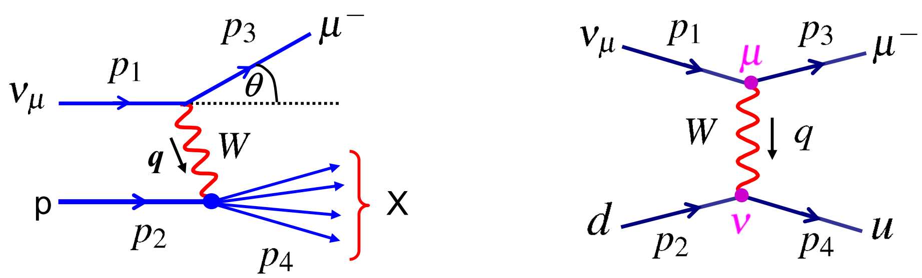


图 4.75: 中微子束流的实验产生。

4.8.2 $\nu + q \to \nu + q$ 弹性散射

中微子 ν_μ 和质子 p 的 DIS 在最底层发生的是 ν_μ 和夸克的弹性散射。例如：

$$\begin{array}{ccccccccc} \nu_\mu & + & d & \to & \mu^- & + & u \\ \nu_\mu & + & \overline{u} & \to & \mu^- & + & \overline{d} \end{array}$$



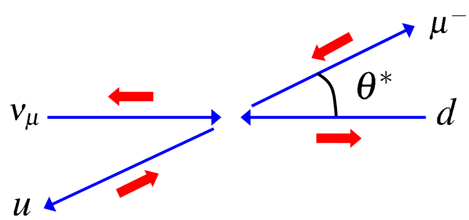
其中第二个反应过程只不过是第一个反应过程的交叉对称。我们以第一个反应过程为例。当 $q^2 \ll m_W^2$ 时，W 传播子为 $\frac{ig_{\mu\nu}}{m_W^2}$，根据带电弱作用的费曼规则，并忽略 $d \to u$ 跃迁中的 V_{ud} 因子，有：

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_w^2}{2m_W^2} g_{\mu\nu} \left[\overline{u}(p_3)\gamma^\mu \tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_4)\gamma^\nu \tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)u(p_2)\right]$$

我们考虑极端相对论情形，忽略 μ^- 和 u, d 夸克的质量，此时螺旋度本征态等于手征本征态，只有左手粒子 (螺旋度 $h = -1$) 和右手反粒子 (螺旋度 $h = +1$) 参与弱相互作用，于是跃迁矩阵元为：

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_w^2}{2m_W^2} g_{\mu\nu} \left[\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1)\right]\left[\overline{u}_\downarrow(p_4)\gamma^\nu u_\downarrow(p_2)\right]$$

可见在弱作用中，因螺旋度守恒，使得跃迁矩阵元不为零的螺旋度组合态只有一种。



在质心系中，弹性散射初末态粒子 ν_μ, d, μ^-, u 的四动量为：

$$p_1 = (E, 0, 0, E), \qquad p_2 = (E, 0, 0, -E)$$
$$p_3 = (E, E\sin\theta^*, 0, E\cos\theta^*), \qquad p_4 = (E, -E\sin\theta^*, 0, -E\cos\theta^*)$$

只需处理左手粒子，沿着 (θ, ϕ) 方向运动的无质量粒子，其旋量为 (参阅 (4.3.9) 式)：

$$u_\downarrow = \sqrt{E}\begin{pmatrix} -S \\ e^{i\phi}C \\ S \\ -e^{i\phi}C \end{pmatrix}$$

其中：

$$C = \cos\frac{\theta}{2}, \qquad S = \sin\frac{\theta}{2}$$

对于 $\nu_\mu + d \to \mu^- + u$ 散射过程，各粒子的方向为：

$$(\theta_1, \phi_1) = (0, 0), \qquad (\theta_2, \phi_2) = (\pi, 0)$$
$$(\theta_3, \phi_3) = (\theta^*, 0), \qquad (\theta_4, \phi_4) = (\pi - \theta^*, \pi)$$

于是相应的旋量为：

$$u_\downarrow(p_1) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_\downarrow(p_2) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$u_\downarrow(p_3) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} -S \\ C \\ S \\ -C \end{pmatrix}, \qquad u_\downarrow(p_4) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} -C \\ -S \\ C \\ S \end{pmatrix}$$

利用 (4.3.14) 式：

$$\overline{\psi}\gamma^0\phi = \psi_1^*\phi_1 + \psi_2^*\phi_2 + \psi_3^*\phi_3 + \psi_4^*\phi_4$$
$$\overline{\psi}\gamma^1\phi = \psi_1^*\phi_4 + \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 + \psi_4^*\phi_1$$
$$\overline{\psi}\gamma^2\phi = -i(\psi_1^*\phi_4 - \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 - \psi_4^*\phi_1)$$
$$\overline{\psi}\gamma^3\phi = \psi_1^*\phi_3 - \psi_2^*\phi_4 + \psi_3^*\phi_1 - \psi_4^*\phi_2$$

得到不为零的轻子流和夸克流各一种：

$$\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1) = 2E(C, S, -iS, C)$$
$$\overline{u}_\downarrow(p_4)\gamma^\mu u_\downarrow(p_2) = 2E(C, -S, -iS, -C)$$

于是跃迁矩阵元为：

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_w^2}{2m_W^2}4E^2(C^2 + S^2 + S^2 + C^2) = \frac{g_w^2}{m_W^2}\tilde{s}$$

其中：

$$\tilde{s} = (2E)^2$$

为了求得微分散射截面，需要计算 $\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle$，这就需要对所有末态的自旋态求和，对所有初态的自旋态求平均。如前所述，初态和末态的自旋态组合中都只有一种不为零，故跃迁矩阵元模方的求和不必考虑。由于中微子总是左手的，故初态可能的自旋态来自夸克，总数目为 2，于是：

$$\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = \frac{1}{2}\left|\frac{g_w^2}{m_W^2}\tilde{s}\right|^2$$

代入质心系中两体散射的微分散射截面公式 (2.2.33) 式：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{1}{64\pi^2\tilde{s}}\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle$$

得到 νq 散射的微分截面：

$$\frac{d\sigma_{\nu q}}{d\Omega^*} = \left(\frac{g_w^2}{8\sqrt{2}\pi m_W^2}\right)^2\tilde{s}$$

利用带电弱作用耦合常数 g_w 和 Fermi 耦合常数 G_F 的关系 $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_w^2}{8m_W^2}$，上式可写为：

$$\boxed{\frac{d\sigma_{\nu q}}{d\Omega^*} = \frac{G_F^2}{4\pi^2}\tilde{s}} \tag{4.8.1}$$

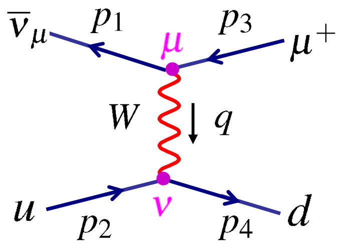
对角度积分，得到总截面：

$$\boxed{\sigma_{\nu q} = \frac{G_F^2\tilde{s}}{\pi}} \tag{4.8.2}$$

4.8.3 $\overline{\nu} + q \to \overline{\nu} + q$ 弹性散射

类似地可以处理反中微子 $\overline{\nu}_\mu$ 和质子 p 的 DIS。在最底层发生的是 $\overline{\nu}_\mu$ 和 质子中夸克的弹性散射，例如：

$$\begin{array}{ccccccccc}\overline{\nu}_\mu & + & u & \to & \mu^+ & + & d \\ \overline{\nu}_\mu & + & \overline{d} & \to & \mu^+ & + & \overline{u}\end{array}$$

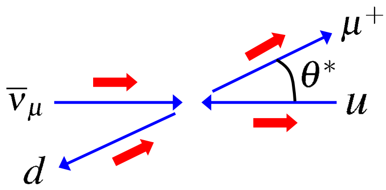


仍然以第一个反应过程为例，继续忽略 $u \to d$ 跃迁中的 V_{ud}^* 因子，跃迁矩阵元为：

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_w^2}{2m_W^2}g_{\mu\nu}\left[\overline{v}(p_1)\gamma^\mu\tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)v(p_3)\right]\left[\overline{u}(p_4)\gamma^\nu\tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)u(p_2)\right]$$

在极端相对论情形下，只有左手粒子和右手反粒子参与带电弱作用，上式变为：

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_w^2}{2m_W^2}g_{\mu\nu}\left[\overline{v}_\uparrow(p_1)\gamma^\mu\tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)v_\uparrow(p_3)\right]\left[\overline{u}_\downarrow(p_4)\gamma^\nu\tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)u_\downarrow(p_2)\right]$$



完全类似 νq 过程的计算，可得 $\bar{\nu} q$ 散射的微分截面为：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\bar{\nu}q}}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{G_F^2}{16\pi^2}(1+\cos\theta^*)^2\tilde{s} \tag{4.8.3}$$

对角度积分：

$$\int(1+\cos\theta^*)^2\mathrm{d}\Omega^*=\int(1+\cos\theta^*)^2\mathrm{d}(\cos\theta^*)\mathrm{d}\phi=\frac{16\pi}{3}$$

得到总截面为：

$$\sigma_{\bar{\nu}q}=\frac{G_F^2\tilde{s}}{3\pi} \tag{4.8.4}$$

比较 (4.8.2) 和 (4.8.4) 式，我们发现：

$$\frac{\sigma_{\bar{\nu}q}}{\sigma_{\nu q}}=\frac{1}{3}$$

由于质子中存在海夸克，因此正反中微子也可以和质子中的反夸克发生弹性散射。图 4.76 给出了正反中微子和正反夸克散射的费曼图、反应的运动学、系统自旋、微分截面和总截面。

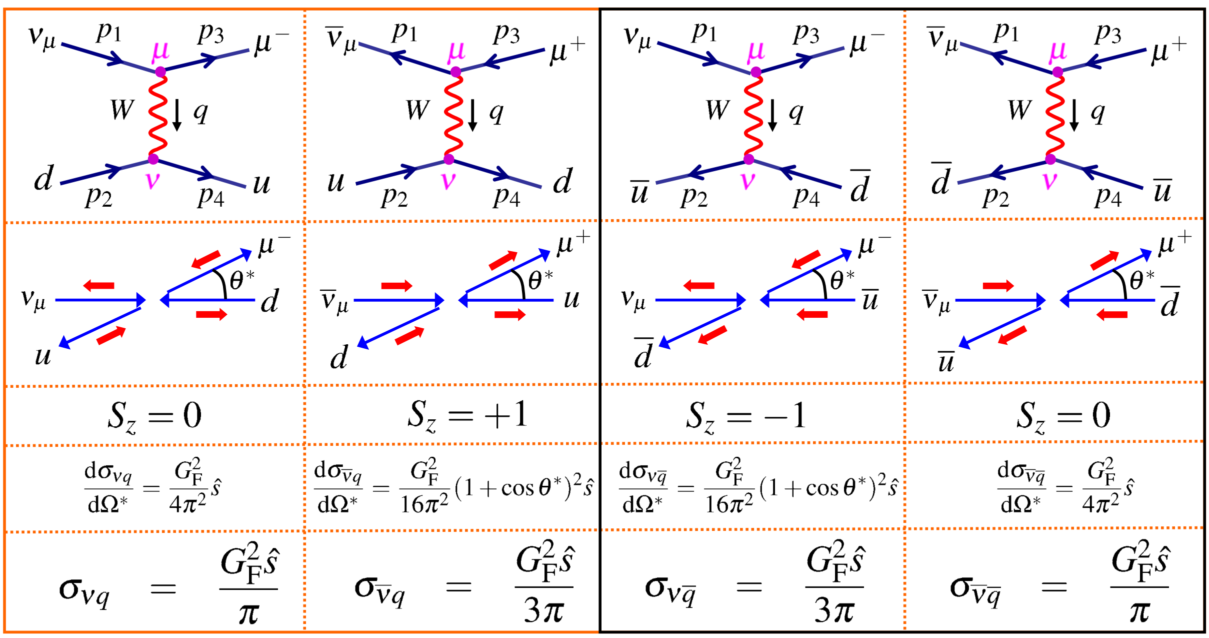


图 4.76: 正反中微子和正反夸克的弹性散射。

4.8.4 电磁和弱作用微分截面比较

微分散射截面 (4.8.1)、(4.8.3) 式是 Lorentz 不变量，适用于任意参考系，但是它们是用质心系中的量表示的。我们把它们写成 Lorentz 不变的形式。利用在讨论 $e^- p$ DIS 时定义的 Lorentz 不变量：

$$y=\frac{p_2\cdot q}{p_2\cdot p_1}$$

在极端相对论情形下，上式用质心系中的量表示：

$$y=\frac{1}{2}(1-\cos\theta^*) \tag{4.8.5}$$

为了把 $\frac{d\sigma}{d\Omega^*}$ 转换到 $\frac{d\sigma}{dy}$，利用：

$$\frac{d\sigma}{dy}=\left|\frac{d\cos\theta^*}{dy}\right|\frac{d\sigma}{d\cos\theta^*}=\left|\frac{d\cos\theta^*}{dy}\right|2\pi\frac{d\sigma}{d\Omega^*}=4\pi\frac{d\sigma}{d\Omega^*} \tag{4.8.6}$$

把 (4.8.1) 式代入 (4.8.6) 式，得到：

$$\boxed{\frac{d\sigma_{\nu q}}{dy}=\frac{d\sigma_{\overline{\nu q}}}{dy}=\frac{G_F^2}{\pi}\tilde{s}} \tag{4.8.7}$$

同样地，把 (4.8.3) 式代入 (4.8.6) 式，得到：

$$\frac{d\sigma_{\overline{\nu}q}}{dy}=\frac{d\sigma_{\nu\overline{q}}}{dy}=\frac{G_F^2}{4\pi}(1+\cos\theta^*)^2\tilde{s}$$

利用质心系中 y 的表达式 (4.8.5) 式，有：

$$1-y=\frac{1}{2}(1+\cos\theta^*)$$

联立上面两式，可得：

$$\boxed{\frac{d\sigma_{\overline{\nu}q}}{dy}=\frac{d\sigma_{\nu\overline{q}}}{dy}=\frac{G_F^2}{\pi}(1-y)^2\tilde{s}} \tag{4.8.8}$$

利用 G_F 和 α_w 之间的关系 $\alpha_w=\frac{8m_W^2G_G}{4\sqrt{2}\pi}$，式 (4.8.8) 可写为：

$$\frac{d\sigma_{\overline{\nu}q}}{dy}=\frac{d\sigma_{\nu\overline{q}}}{dy}=\frac{\pi\alpha_w^2}{2m_W^4}(1-y)^2\tilde{s}$$

比较上式所示的弱作用微分散射截面和 QED 微分散射截面 (4.5.28) 式：

$$\frac{d\sigma_{e^-q}}{dy}=\frac{d\sigma_{e^+q}}{dy}=\underbrace{\frac{2\pi\alpha^2}{q^4}e_q^2}_{\text{相互作用+传播子}}\times\underbrace{\left[1+(1-y)^2\right]}_{\text{螺旋度结构}}\tilde{s}$$

$$\frac{d\sigma_{\overline{\nu}q}}{dy}=\frac{d\sigma_{\nu\overline{q}}}{dy}=\overbrace{\frac{\pi\alpha_w^2}{2m_W^4}}\times\overbrace{(1-y)^2}\tilde{s}$$

我们发现两者在形式上非常接近。主要差异在于螺旋度结构不同。在极端相对论情形下，只有左手粒子 (以及右手反粒子) 参与弱作用，但是左手和右手粒子 (以及左手和右手反粒子) 都可以参与电磁作用。弱作用和电磁作用在相互作用和传播子部分非常相似，是否意味着在极端相对论情形下电弱可以统一描述？

4.8.5 νp DIS 及其部分子模型

前面讨论了中微子和夸克之间的弹性散射，这是 ν 和 p 深度非弹性散射过程中最底层的反应。实验上发生的是 νp DIS，远比 νq 弹性散射复杂得多。

一、核子的结构函数 $F_3(x,Q^2)$

首先回忆一般的电磁相互作用中的DIS。在高能极限下 $(s \gg M^2)$，$e^{\pm}p$ 的微分散射截面为 (参考 (4.5.14) 式)：

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma_{e^{\pm}p}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}Q^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left[(1-y)\frac{F_2(x,Q^2)}{x} + y^2F_1(x,Q^2)\right] \tag{4.8.9}$$

因为中微子散射实验在实验室系中进行，实验测量的是反应产物 μ 子的能量 E_μ，通常用 y 描述 (参考 (4.5.6) 式：

$$y = 1 - \frac{E_\mu}{E_\nu}$$

所以我们把 QED 过程的微分散射截面用 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示。利用：

$$Q^2 = (s-M^2)xy \approx sxy$$

得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \left|\frac{\mathrm{d}Q^2}{\mathrm{d}y}\right|\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}Q^2} = sx\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}Q^2}$$

代入 (4.8.9) 式，得到 $e^{\pm}p$ 的微分散射截面：

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma_{e^{\pm}p}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{4\pi\alpha^2 s}{Q^4}\left[(1-y)F_2(x,Q^2) + y^2xF_1(x,Q^2)\right] \tag{4.8.10}$$

注意 (4.8.10) 式是高能极限下 Lorentz 不变且宇称守恒的微分散射截面一般表达式。在 νp DIS 过程中宇称破坏，因此一般表达式中必须包含反映宇称破坏的额外项，引入一个新的结构常数 $F_3(x,Q^2)$，于是可以证明：

$$\nu_\mu p \to \mu^- X \qquad \frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\nu p}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{G_F^2 s}{2\pi}\left[(1-y)F_2^{\nu p} + y^2xF_1^{\nu p} + y\left(1-\frac{y}{2}\right)xF_3^{\nu p}\right] \tag{4.8.11}$$

$$\overline{\nu}_\mu p \to \mu^+ X \qquad \frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\overline{\nu} p}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{G_F^2 s}{2\pi}\left[(1-y)F_2^{\overline{\nu} p} + y^2xF_1^{\overline{\nu} p} - y\left(1-\frac{y}{2}\right)xF_3^{\overline{\nu} p}\right] \tag{4.8.12}$$

对于中子靶有完全相同的表达式，结构函数用 νn 和 $\overline{\nu} n$ 标记：

$$\nu_\mu n \to \mu^- X \qquad \frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\nu n}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{G_F^2 s}{2\pi}\left[(1-y)F_2^{\nu n} + y^2xF_1^{\nu n} + y\left(1-\frac{y}{2}\right)xF_3^{\nu n}\right] \tag{4.8.13}$$

$$\overline{\nu}_\mu n \to \mu^+ X \qquad \frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\overline{\nu} n}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{G_F^2 s}{2\pi}\left[(1-y)F_2^{\overline{\nu} n} + y^2xF_1^{\overline{\nu} n} - y\left(1-\frac{y}{2}\right)xF_3^{\overline{\nu} n}\right] \tag{4.8.14}$$

和 (4.8.10) 式相比，上面四式右边已经作了如下替换：

$$\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \;\to\; \frac{G_F^2}{2\pi}$$

我们发现在 νN DIS 中，微分散射截面少了 $\frac{1}{Q^4}$ 因子，反映出在 $Q^2 \ll m_W^2$ 情形下 $W^{\pm}$ 传播子因子 $-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2-m_W^2} = \frac{ig_{\mu\nu}}{Q^2+m_W^2}$ 近似是个常数。如同 e^-N DIS 的情形，νN DIS 中的结构函数 F_i 还不能通过理论得到，必须由实验确定。一般情况下，F_i 是 x,y 或 x,Q^2 的函数。但是在高能极限下表现出 Bjorken 标度，即 $F_i(x,Q^2) = F_i$。

二、中微子 DIS 的部分子模型

在夸克层次，如果忽略 s,c,b,t 夸克的贡献，则 νp DIS 实际上是中微子和质子中的 d 夸克 (来自价夸克或海夸克)，或者 $\overline{u}$ 夸克 (只能来自海夸克) 的弹性散射：

$$
\begin{array}{ccccccc}
\nu_\mu & + & d & \to & \mu^- & + & u \\
\nu_\mu & + & \overline{u} & \to & \mu^- & + & \overline{d}
\end{array}
$$

根据部分子模型，质子中动量份额为 $x \to x + \mathrm{d}x$ 的 d 夸克的数目是 $d^p(x)\mathrm{d}x$，将它乘以 $\nu_\mu + d \to \mu^- + u$ 散射过程的微分截面 (4.8.7) 式，即得到 d 夸克对 νp DIS 微分截面的贡献：

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma^{\nu p}}{\mathrm{d}y} = \frac{G_F^2}{\pi}\tilde{s} d^p(x)\mathrm{d}x
$$

其中 $\tilde{x}$ 是 $\nu_\mu d$ 质心系中的总能量。类似可得 $\overline{u}$ 夸克对 νp DIS 微分截面的贡献：

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma^{\nu p}}{\mathrm{d}y} = \frac{G_F^2}{\pi}\tilde{s}(1-y^2)\overline{u}^p(x)\mathrm{d}x
$$

上面两式之和即为 νp DIS 的微分散射截面。利用 $\tilde{x} = xs$，得到：

$$
\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\nu p}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{G_F^2}{\pi} sx\left[d^p(x) + (1-y)^2\overline{u}^p(x)\right]
$$

用完全相同的方法可以得到 $\overline{\nu}p$ DIS 的微分散射截面：

$$
\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\overline{\nu}p}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{G_F^2}{\pi} sx\left[(1-y)^2 u^p(x) + \overline{d}^p(x)\right]
$$

如果用中子靶代替质子靶，则得到 $\nu n, \overline{\nu}n$ 的微分散射截面：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\nu n}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} &= \frac{G_F^2}{\pi} sx\left[d^n(x) + (1-y)^2\overline{u}^n(x)\right] \\
\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\overline{\nu}n}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} &= \frac{G_F^2}{\pi} sx\left[(1-y)^2 u^n(x) + \overline{d}^n(x)\right]
\end{aligned}
$$

考虑到 u,d 夸克的同位旋 SU(2) 对称，可以用质子的夸克/反夸克 PDF 定义中子的夸克/反夸克 PDF：

$$
\begin{aligned}
u(x) &\equiv u^p(x) = d^n(x), \qquad & d(x) &\equiv d^p(x) = u^n(x) \\
\overline{u}(x) &\equiv \overline{u}^p(x) = \overline{d}^n(x), \qquad & \overline{d}(x) &\equiv \overline{d}^p(x) = \overline{u}^n(x)
\end{aligned}
$$

于是前面的四个 DIS 微分散射截面可以用 $u(x), d(x), \overline{u}(x), \overline{d}(x)$ 表示：

$$
\nu_\mu p \to \mu^- X \qquad \frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\nu p}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{G_F^2}{\pi} sx\left[d(x) + (1-y)^2\overline{u}(x)\right] \tag{4.8.15}
$$

$$
\overline{\nu}_\mu p \to \mu^+ X \qquad \frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\overline{\nu}p}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{G_F^2}{\pi} sx\left[(1-y)^2 u(x) + \overline{d}(x)\right] \tag{4.8.16}
$$

$$
\nu_\mu n \to \mu^- X \qquad \frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\nu n}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{G_F^2}{\pi} sx\left[u(x) + (1-y)^2\overline{d}(x)\right] \tag{4.8.17}
$$

$$
\overline{\nu}_\mu n \to \mu^+ X \qquad \frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\overline{\nu}n}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{G_F^2}{\pi} sx\left[(1-y)^2 d(x) + \overline{u}(x)\right] \tag{4.8.18}
$$

重写用部分子模型描述的微分截面 (4.8.15) 式：

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\nu p}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_F^2}{2\pi}s\left[2xd(x)+2x\overline{u}(x)-4xy\overline{u}(x)+2xy^2\overline{u}(x)\right]$$

将它和用结构函数表示的微分截面 (4.8.11) 式比较，由 y 不同次幂的系数相等，可得：

$$\begin{aligned}2xd+2x\overline{u}&=F_2\\-4x\overline{u}&=-F_2+xF_3\\2\overline{u}&=F_1-\frac{1}{2}F_3\end{aligned}$$

于是：

$$F_2^{\nu p}=2xF_1^{\nu p}=2x\left[d(x)+\overline{u}(x)\right] \tag{4.8.19}$$

$$xF_3^{\nu p}=2x\left[d(x)-\overline{u}(x)\right] \tag{4.8.20}$$

我们再次从 νp DIS 得到 Callan-Gross 关系 $F_2=2xF_1$。这并不奇怪，因为底层发生的是中微子和自旋为 $\frac{1}{2}$ 的点状夸克的散射。

我们可以用 νp DIS 实验确定质子的夸克 PDF。利用 Callan-Gross 关系，消去 (4.8.11) 式中的 $F_1^{\nu p}$，得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{\nu p}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{G_F^2 s}{2\pi}\left[\left(1-y+\frac{y^2}{2}\right)F_2^{\nu p}+y\left(1-\frac{y}{2}\right)xF_3^{\nu p}\right]$$

实验上通过根据固定 x 时的 y 分布测量 F_2 和 F_3，然后利用 (4.8.19)、(4.8.20) 式，得到 $d(x)$ 和 $\overline{u}(x)$。CDHS 实验组曾利用中微子和铁的 DIS 测量过 $F_2(x)$ 和 $F_3(x)$：

$$\nu_\mu \;+\; \mathrm{Fe} \;\to\; \mu^- + X$$

具体细节可参阅文献 H. Abramowicz *et al.*, *Z. Phys.* **C17** (1983) 283。

第 5 章　电弱统一理论

在第 4 章中，我们讨论了粒子物理学研究的三种相互作用，主要是在经典电磁作用基础上，把经典电磁理论的形式进行量子推广，从而得到描写电磁作用的量子理论，然后通过类比得到强作用和弱作用的描述方法。

在本章中我们将简单介绍关于相互作用的规范理论。如果要求描写电磁场运动的 Lagrangian 具有定域规范不变性，则必然有电磁场的存在。从这个角度看，电磁场是一种规范场，电磁力是一种规范力。描写电磁场的群是 Abelian 的 U(1) 群，1964 年，杨振宁和 Mills 将定域规范不变性的思想推广到 non-Abelian 的 SU(2) 群，发现若相互作用具有 SU(2) 定域规范不变性，则必然有传递相互作用的规范场存在。这一理论很容易推广到 SU(n) 群。

二十世纪六十年代，Weiberg, Salam, Glashow 等用 $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$ 群统一描述弱作用和电磁作用，得到弱电统一理论，这是粒子物理标准模型的重要组成部分。在规范理论中，粒子质量项的存在会破坏规范对称性，因此在初始的 Lagrangian 中没有质量项。粒子质量是通过真空对称性自发破缺获得的。这称为 Higgs 机制。

5.1　从 W 到 Z^0

在本节中我们主要讨论 W 玻色子的衰变。最后通过 $e^+ + e^- \to W^+ + W^-$ 过程中截面的讨论，说明引入 Z^0 玻色子的必要性。因为 $W^\pm$ 和 Z^0 是自旋为 1 的矢量玻色子，所以首先讨论它们的极化态。

5.1.1　矢量玻色子极化态

第 4.2.2 节讨论了质量为零、自旋为 1 的光子。真空中光子的运动方程是：

$$\Box^2 A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \tag{5.1.1}$$

其中 d’Alembertian 算符为：

$$\Box^2 = \partial_\nu \partial^\nu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

应用 Lorentz 条件：

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{5.1.2}$$

自由光子 $j^\mu = 0$ 的方程变为：

$$\Box^2 A^\mu = 0$$

电磁场除了满足 Lorentz 条件，它在规范变换下不变。于是可以论证：在壳的实光子有两种横向极化态。如果光子沿着 z 向运动，那么这两个极化态可以写作圆极化态：

$$\epsilon^\mu_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-i,0), \qquad \epsilon^\mu_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0) \tag{5.1.3}$$

我们把无质量光子的情形推广到质量不为零的矢量玻色子情形。量子场论可以证明，只需作如下替换：

$$\Box^2 \quad\rightarrow\quad \Box^2 + m^2$$

于是 (5.1.1) 式变为：

$$(\Box^2 + m^2)B^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu B^\nu) = j^\mu \tag{5.1.4}$$

对于自由矢量粒子，上式右边 $j^\mu = 0$，再以 ∂_μ 作用上式，得到：

$$(\Box^2 + m^2)\partial_\mu B^\mu - \partial_\mu\partial^\mu(\partial_\nu B^\nu) = 0$$

利用 d'Alembertian 算符定义，上式可写为：

$$(\Box^2 + m^2)\partial_\mu B^\mu - \Box^2(\partial_\nu B^\nu) = 0$$

于是：

$$m^2\partial_\mu B^\mu = 0$$

由于矢量玻色子质量不为零，故上式表明该粒子必须满足：

$$\partial_\mu B^\mu = 0 \tag{5.1.5}$$

在上述条件下，(5.1.4) 式变为：

$$\boxed{(\Box^2 + m^2)B^\mu = 0} \tag{5.1.6}$$

式 (5.1.6) 的解为：

$$B_\mu = \epsilon_\mu e^{-ip\cdot x} = \epsilon^\mu e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)}$$

其中 p^μ 是质量不为零的矢量玻色子的四动量。代入 (5.1.5) 式，得到：

$$\boxed{p_\mu \epsilon^\mu = 0} \tag{5.1.7}$$

这样 ϵ^μ 的自由度数目由四个减少到三个。对于有质量的粒子，规范场论不允许该粒子另取规范，即质量不为零的矢量玻色子的自由度数目不能进一步减少，或者说有三个正交的极化态满足 (5.1.7) 式。对于沿着 z 方向运动的粒子，其中两个极化态我们仍然可以取 (5.1.3) 式所示的圆极化态：

$$\epsilon_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0), \qquad \epsilon_+^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0)$$

第三个态可写为：

$$\epsilon_L^\mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(\alpha, 0, 0, \beta)$$

利用 (5.1.7) 式，得到 $\alpha E - \beta p_z = 0$，于是：

$$\epsilon_L^\mu = \frac{1}{m}(p_z, 0, 0, E) \tag{5.1.8}$$

称为纵向极化态，只有质量不为零的矢量玻色子 (或者离壳的虚光子) 才存在纵向极化态。我们总结这三种极化态如图 5.1 所示。

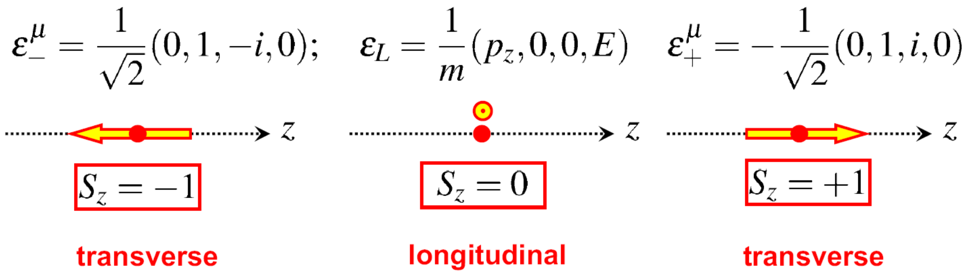


图 5.1: 质量不为零的矢量玻色子的极化态。

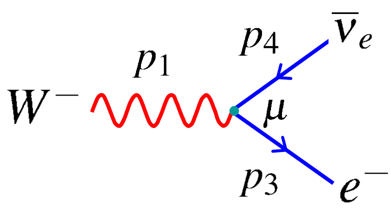


图 5.2: $W^- \to e^- + \overline{\nu}_e$ 衰变的费曼图。

5.1.2 W 的衰变和宽度

矢量玻色子 $W^- \to e + \overline{\nu}_e$ 衰变的领头阶费曼图如图 5.2 所示。根据费曼规则，有：

$$-i\mathcal{M}_{fi} = \underbrace{\epsilon_\mu(p_1)}_{\text{入射 } W^-} \underbrace{\overline{u}(p_3)}_{\text{出射 } e^-} \underbrace{\frac{-ig_w}{\sqrt{2}}\gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)}_{\text{顶点因子}} \underbrace{v(p_4)}_{\text{出射 } \overline{\nu}_e}$$

其中 $\epsilon_\mu(p_1)$ 是 W^- 的极化四矢量。于是跃迁矩阵元可写为 ϵ_μ 和弱带电流 j^μ 的标积：

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_w}{\sqrt{2}}\epsilon_\mu(p_1)j^\mu \tag{5.1.9}$$

式中：

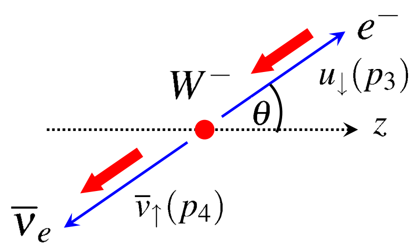
$$j^\mu = \overline{u}(p_3)\gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)v(p_4)$$

我们在 W^- 的质心系中计算 $\mathcal{M}_{fi}$。考虑极端相对论情形，忽略 e^- 和 ν_e 的质量。在质心系中，初末态粒子的四动量为：

$$p_1 = (m_W, 0, 0, 0)$$
$$p_3 = (E, E\sin\theta, 0, E\cos\theta)$$
$$p_4 = (E, -E\sin\theta, 0, -E\cos\theta)$$

式中 E 是轻子的能量：

$$E = \frac{m_W}{2}$$



在极端相对论情形下，只有左手粒子和右手反粒子参与带电弱相互作用，故轻子弱带电流为：

$$j^\mu = \overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu \tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)v_\uparrow(p_4)$$

利用左手手征算符性质：

$$\frac{1}{2}(1-\gamma^5)v_\uparrow(p_4) = v_\uparrow(p_4)$$

轻子弱带电流可写为：

$$j^\mu = \overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu v_\uparrow(p_4)$$

我们在讨论 $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ 湮灭过程时已经具体计算了上式所示的流，其结果是 (参考 (4.3.15) 式 μ 子流中的 $\mu_{\mathrm{L}}^-\mu_{\mathrm{R}}^+$ 组合)：

$$j^\mu = 2E(0, -\cos\theta, -i, \sin\theta) \tag{5.1.10}$$

总之，在极端相对论情形下，对于带电弱作用过程，我们只需考虑一种螺旋度组合，以及三种可能的 W 玻色子的极化态。在 W^- 质心系中，这三种极化态为：

$$\epsilon_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-i,0), \qquad \epsilon_L^\mu = (0,0,0,1), \qquad \epsilon_+^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0) \tag{5.1.11}$$

把 (5.1.10)、(5.1.11) 式代入 (5.1.9) 式，得到跃迁矩阵元为：

$$\begin{aligned}
\epsilon_-: \quad & \mathcal{M}_- = \frac{g_w}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-i,0)\, m_W(0,-\cos\theta,-i,\sin\theta) = \frac{1}{2}g_w m_W(1+\cos\theta) \\
\epsilon_L: \quad & \mathcal{M}_L = \frac{g_w}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,0,1)\ \ m_W(0,-\cos\theta,-i,\sin\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}g_w m_W \sin\theta \\
\epsilon_+: \quad & \mathcal{M}_+ = -\frac{g_w}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0)\ \ m_W(0,-\cos\theta,-i,\sin\theta) = \frac{1}{2}g_w m_W(1-\cos\theta)
\end{aligned}$$

相应的矩阵元的模方为：

$$\boxed{\begin{aligned}
|\mathcal{M}_-|^2 &= g_w^2 m_W^2 \frac{1}{4}(1+\cos\theta)^2 \\
|\mathcal{M}_L|^2 &= g_w^2 m_W^2 \frac{1}{2}\sin^2\theta \\
|\mathcal{M}_+|^2 &= g_w^2 m_W^2 \frac{1}{4}(1-\cos\theta)^2
\end{aligned}} \tag{5.1.12}$$

这些角分布可以根据粒子系统的自旋波函数叠加来理解，如图 5.3 所示。参考第 4.3.4 节中的讨论。

把 (5.1.12) 式代入质心系中两体衰变的微分衰变率公式 (2.2.20)：

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{|\mathbf{p}^*|}{32\pi^2 m_W^2}|\mathcal{M}|^2$$

其中 $|\mathbf{p}^*| = \frac{m_W}{2}$，得到对应 W^- 三种极化态的微分衰变率：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Gamma_-}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{g_w^2 m_W}{64\pi^2}\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^2 \\
\frac{\mathrm{d}\Gamma_L}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{g_w^2 m_W}{64\pi^2}\frac{1}{2}\sin^2\theta \\
\frac{\mathrm{d}\Gamma_+}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{g_w^2 m_W}{64\pi^2}\frac{1}{4}(1-\cos\theta)^2
\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

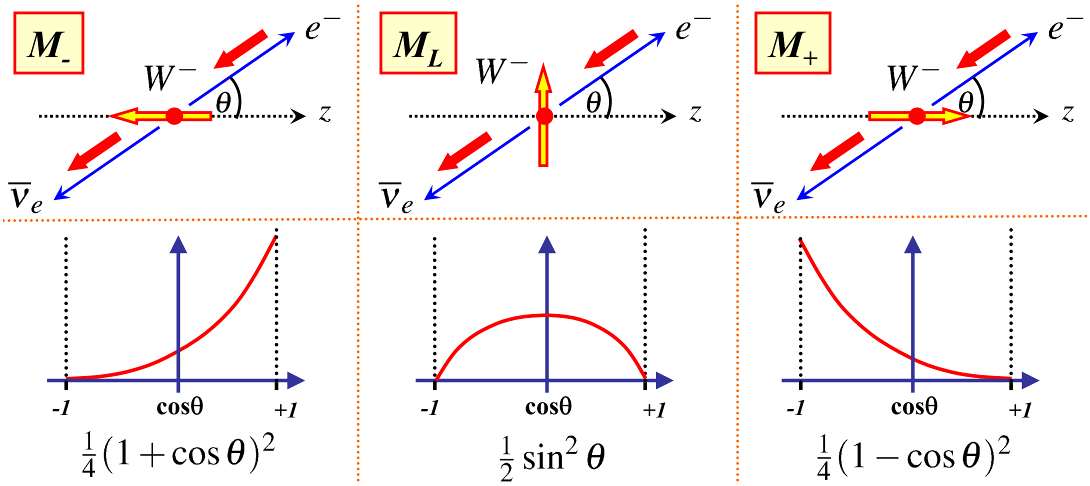


图 5.3: $W^- \to e^- + \overline{\nu}_e$ 衰变的角分布。

对角度积分：

$$\int \frac{1}{4}(1\pm\cos\theta)^2 \mathrm{d}\cos\theta \mathrm{d}\phi = \int \frac{1}{2}\sin^2\theta \mathrm{d}\cos\theta \mathrm{d}\phi = \frac{4\pi}{3}$$

得到衰变率：

$$\boxed{\Gamma_- = \Gamma_L = \Gamma_+ = \frac{g_w^2 m_W}{48\pi}} \tag{5.1.14}$$

W 的衰变率和它的极化态无关，这是可以理解，因为 z 轴的选取是任意的。

对于非极化的 W 玻色子，W 处在每种极化态的概率都相同，我们计算跃迁矩阵元模方的平均值，即：

$$\begin{aligned}\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle &= \frac{1}{3}(|\mathcal{M}_-|^2 + |\mathcal{M}_L|^2 + |\mathcal{M}_+|^2)\\ &= \frac{1}{3}g_w^2 m_W^2\left[\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\sin^2\theta + \frac{1}{4}(1-\cos\theta)^2\right]\\ &= \frac{1}{3}g_w^2 m_W^2\end{aligned}$$

这是一个常数，与角度无关。因此总衰变率为：

$$\Gamma = \frac{|\mathbf{p}^*|}{32\pi^2 m_W^2}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle \int \mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi|\mathbf{p}^*|}{32\pi^2 m_W^2}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$$

根据上面两式得到 $W^- \to e^- + \overline{\nu}_e$ 的衰变率为：

$$\boxed{\Gamma(W\to e\nu) = \frac{g_w^2 m_W}{48\pi}} \tag{5.1.15}$$

事实上上式也可以通过对 W^- 各种极化态的衰变率求平均得到。

$$\Gamma(W\to e\nu) = \frac{1}{3}(\Gamma_- + \Gamma_L + \Gamma_+)$$

W^- 还有其他各种衰变模式，它们的计算都一样。忽略终态粒子的质量，则有：

$$
\begin{aligned}
&W^- \to e^- + \overline{\nu}_e && (= \Gamma(W \to e\nu) \times 1) \\
&W^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu && (= \Gamma(W \to e\nu) \times 1) \\
&W^- \to \tau^- + \overline{\nu}_\tau && (= \Gamma(W \to e\nu) \times 1) \\
&W^- \to d + \overline{u} && (= \Gamma(W \to e\nu) \times 3|V_{ud}|^2) \\
&W^- \to s + \overline{u} && (= \Gamma(W \to e\nu) \times 3|V_{us}|^2) \\
&W^- \to b + \overline{u} && (= \Gamma(W \to e\nu) \times 3|V_{ub}|^2) \\
&W^- \to d + \overline{c} && (= \Gamma(W \to e\nu) \times 3|V_{cd}|^2) \\
&W^- \to s + \overline{c} && (= \Gamma(W \to e\nu) \times 3|V_{cs}|^2) \\
&W^- \to b + \overline{c} && (= \Gamma(W \to e\nu) \times 3|V_{cb}|^2)
\end{aligned}
$$

式中括号中的因子是指该衰变模式的衰变率相对 $\Gamma(W \to e\nu)$ 的比例，其中 3 是色自由度，V_{ij} 是 CKM 矩阵元。我们没有考虑 top 夸克的贡献，因为 $m_W < m_t$，W 不会衰变到 t。把上式中所有衰变模式的衰变率相加，注意到CKM 矩阵元的幺正性：

$$
\begin{aligned}
|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 &= 1 \\
|V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 &= 1
\end{aligned}
$$

于是 W^- 玻色子的宽度：

$$
\boxed{\Gamma_W = 9\Gamma(W \to e\nu) = \frac{3g_w^2 m_W}{16\pi} = 2.07\,\text{GeV}} \tag{5.1.16}
$$

实验测量值为：

$$
\Gamma_W = 2.141 \pm 0.041\,\text{GeV}
$$

两者略有差异，原因是我们在计算中忽略了 3% 的夸克衰变 QCD 修正。

5.1.3 Z^0 玻色子的引入

因为 $W^\pm$ 玻色子是带电粒子，所以它也参与电磁相互作用。例如考虑正反电子碰撞产生正反 W 玻色子的过程 $e^+ + e^- \to W^+ + W^-$。$W^\pm$ 可以通过电磁作用或者弱作用过程产生，如图 5.4 所示。

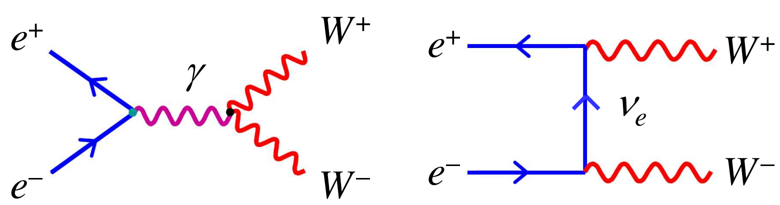


图 5.4: $e^+ + e^- \to W^+ + W^-$ 的两种过程。

如果只考虑图 5.4 中的两种过程，那么理论计算表明 (具体计算从略)，W^+W^- 产生截面随着 e^+e^- 质心系能量增大而增加，如图 5.5 中紫线所示。当质心系能量达到一定值，W 的流将大于入射 e^-e^+ 流，称为 unitarity violation。

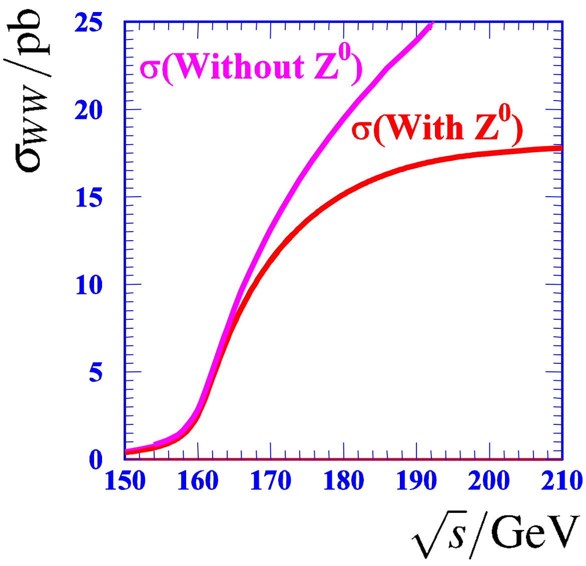


图 5.5: $e^+ + e^- \to W^+ + W^-$ 过程中 W^+W^- 的产生截面。

这种截面发散的现象可以通过引入一种新的 Z^0 玻色子解决。e^+e^- 不仅可以通过湮灭到 γ 的电磁过程产生 W^+W^-，也可以通过湮灭为 Z^0 的弱过程产生 W^+W^-，如图 5.6 所示。引入的新的费曼图和其他两个图干涉，总效果为：

$$|\mathcal{M}_{\gamma WW} + \mathcal{M}_{ZWW} + \mathcal{M}_{\nu WW}|^2 < |\mathcal{M}_{\gamma WW} + \mathcal{M}_{\nu WW}|^2$$

从而解决 unitarity 问题，如图 5.5 中红线所示。这只有当 $\gamma, Z, W^\pm$ 的耦合相关时才有可能，因此需要有弱作用和电磁作用的统一。

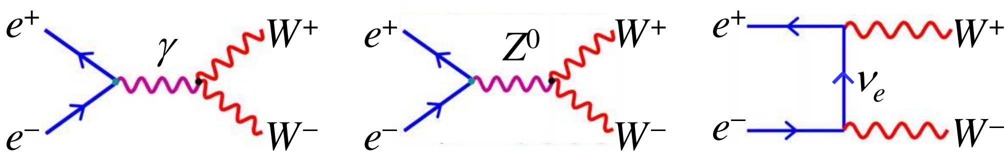


图 5.6: $e^+ + e^- \to W^+ + W^-$ 的三种过程。

5.2 规范场论简介

我们所熟悉的相互作用的具体形式是由一些聪明的物理学家通过实验结果猜测出来的。例如，经典力学中的万有引力、经典电动力学中的 Maxwell 方程组、微观领域的强作用和弱作用等无不如此。在规范理论框架下，如果要求系统在某种定域规范变换下不变，可以导出相应的相互作用形式。

在本节中，我们首先介绍如何用 Lagrangian 来描述粒子和场，接着介绍量子理论中和场论中的规范不变性，包括整体 (规范) 变换和定域规范变换。重点讨论定域 U(1) 规范不变的 Abelian 规范理论和定域 SU(2) 规范不变的 non-Abelian 规范理论。前者是电磁相互作用的理论，后者又称为 Yang-Mills 理论，可以推广到描写强作用和 SU(3) 规范理论和描写弱作用的 $SU(2) \otimes U(1)_Y$ 规范理论。

5.2.1 场的 Lagrangian 表述

经典力学中一个质点 (或者粒子) 的状态由 **Lagrangian 函数** L 描述。L 通常是粒子的广义坐标 q 和广义速度 $\dot{q}$ 的函数：

$$L = L(q, \dot{q})$$

利用 L 可以构造出粒子的作用量 S：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) \mathrm{d}t$$

根据最小作用量的哈密顿原理，利用变分方法：

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) \mathrm{d}t = 0$$

就可以得到粒子的运动方程：

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

上式称为 **Euler-Lagrange 方程**。对于由 N 个粒子构成的粒子系统，每个粒子分别用相同的变分方法，得到相应的运动方程。

经典粒子系统的这种 Lagrangian 表述很容易推广到开放 (open) 系统，即 L 含有时间或者其他参数，例如，若对系统加上一个外部冲力 $F(t)$，则只需在 Lagrangian 中加上 $qF(t)$ 即可。此外，数学上还可以把 L 推广到包含广义坐标的高阶导数。不过我们的规范场论不需要考虑这些推广。

我们也可以把上述关于经典质点系统的 Lagrangian 表述推广到无限自由度的场。场是时空坐标 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ 的连续函数，用 $\phi(x)$ 表示，我们可以把 $\phi(x)$ 看作是广义坐标，于是 $\phi(x)$ 的四维微商 $\partial_\mu \phi(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu}$ 是广义速度，场的 Lagrangian 为：

$$L = \int \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \mathrm{d}^3 x$$

式中 $\mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ 称为 Lagrangian 密度。同样根据最小作用量原理，利用变分方法，可以得到场的 Euler-Lagrangian 方程：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi(x)} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))}\right) \tag{5.2.1}$$

如果问题中包含几个场 ϕ_i，则对每个场都作变分，得到相应的运动方程。在场论中经常把 Lagrangian 密度 $\mathscr{L}$ 称为 Lagrangian。

下面我们简单介绍几个粒子物理学中感兴趣的自由场的 Lagrangian，从这些自由场的 Lagrangian 出发，根据 Euler Lagrangian 方程 (5.2.1) 式，可以得到相应场的运动方程。需要指出的是，历史上，人们是在得到描述自由场的运动方程后，再从中得到 Lagrangian 的。

1. **实标量场** $\phi(x)$

   这可以说是最简单的场。实标量场的 Lagrangian 为：

$$\boxed{\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2} \tag{5.2.2}$$

由于 ϕ 是实的标量 (或赝标量)，故 ϕ^2 是一个平常的标量，$(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)$ 则是四维矢量的平方，因而也是标量。利用度规张量 $g^{\mu\nu}$，把标量场的 Lagrangian 写为：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

上式对 $\partial_\mu\phi$ 和 ϕ 的微商是：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi = \partial^\mu\phi, \qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi$$

代入 Euler-Lagrange 方程，得到：

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = (\Box^2 + m^2)\phi = 0$$

这正是 Klein-Gordon 方程，描写 (量子理论中的) 自旋为零、质量为 m 的粒子。

2. **复标量场** $\phi(x), \phi^*(x)$

复标量场可以表示为两个实标量场 $a(x)$ 和 $b(x)$ 的线性组合：

$$\phi(x) = \frac{a(x) + ib(x)}{\sqrt{2}}$$

它的复共轭场为：

$$\phi^*(x) = \frac{a(x) - ib(x)}{\sqrt{2}}$$

复标量场的 Lagrangian 为：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial^\mu a)^2 - m^2a^2\right] + \frac{1}{2}\left[(\partial^\mu b)^2 - m^2b^2\right]$$

粒子物理学中常用 $\phi(x)$ 和 $\phi^*(x)$ 表示 Lagrangian：

$$\boxed{\mathscr{L} = (\partial^\mu\phi)^*(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi = |\partial^\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2} \tag{5.2.3}$$

分别对 $\phi(x)$ 和 $\phi^*(x)$ 变分，得到两个 Klein-Gordon 方程：

$$(\Box^2 + m^2)\phi(x) = 0, \qquad (\Box^2 + m^2)\phi^*(x) = 0$$

复标量场及其共轭场可以用来描述带相加性量子数 (例如电荷) 的粒子和反粒子。

3. **旋量场** $\psi(x)$

Dirac 旋量场的 Lagrangian 是：

$$\boxed{\mathscr{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi} \tag{5.2.4}$$

上式对对 $\partial_\mu\psi$ 和 ψ 的微商是：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = i\overline{\psi}\gamma^\mu, \qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi} = -m\overline{\psi}$$

代入 Euler-Lagrange 方程，得到：

$$i(\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu + m\overline{\psi} = 0$$

这是 Dirac 伴随方程。我们对 $\partial_\mu\overline{\psi}$ 和 $\overline{\psi}$ 求微商：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\overline{\psi})}=0,\qquad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\overline{\psi}}=i\gamma^\mu\partial_\mu\psi-m\psi$$

同样代入 Euler-Lagrange 方程，得到：

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0$$

这正是 Dirac 方程，描写自旋为 $\frac{1}{2}$、质量为 m 的粒子。

4. **无质量的矢量场** $A(x)$

也就是电磁场，它的 Lagrangian 为：

$$\boxed{\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-j^\mu A_\mu} \tag{5.2.5}$$

其中 $F_{\mu\nu}$ 是电磁场强度张量：

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

为了求对 $\partial_\mu A_\nu$ 的微商，只需考虑 Lagrangian 中的第一项：

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha)(\partial^\alpha A^\beta-\partial^\beta A^\alpha)$$

把式中的上指标下降：

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha)(\partial_\rho A_\sigma-\partial_\sigma A_\rho)$$

于是对 $\partial_\mu A_\nu$ 的微商为：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-\frac{1}{4}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu F_{\rho\sigma}-\delta^\beta_\mu\delta^\alpha_\nu F_{\rho\sigma}+\delta^\rho_\mu\delta^\sigma_\nu F_{\alpha\beta}-\delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\nu F_{\alpha\beta})$$

由于 $g^{\mu\nu}$ 和 $F_{\mu\nu}$ 都是反对称的，因此上式中四项相等，微商变为：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}=-F^{\mu\nu}$$

为了求对 A_ν 的微商，只需考虑 Lagrangian 中的第二项，微商为：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\nu}=-j^\nu$$

把上面两式代入 Euler-Lagrange 方程，得到：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=j^\nu$$

这正是协变形式的有源的 Maxwell 方程。如果是自由电磁场，令 $j^\nu=0$ 即可。

5. **有质量的矢量场** $B(x)$

无源的质量为 m 的矢量场的 Lagrangian 是：

$$\boxed{\mathscr{L}=-\frac{1}{4}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2B^\mu B_\mu} \tag{5.2.6}$$

其中：

$$W^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu B^\nu-\partial^\nu B^\mu \tag{5.2.7}$$

类似前面处理方法，可以得到：

$$\partial_\mu W^{\mu\nu}+m^2B^\nu=0$$

上式称为 Proca 方程，描写自旋为 1、质量为 m 的自由矢量粒子。

5.2.2 量子理论中的规范不变性

规范 (gauge) 的字面意义为刻度或度量标准 (standard of calibration)。虽然我们在经典电动力学中遇到过 Lorentz 规范、Coulomb 规范等，但是规范和规范不变性这些词本身，最早是 H. Weyl 在 1919 年引入的。Weyl 在试图统一当时已知的电磁力和引力时，要求时空几何性质的度量，即规范不变。规范场论中的规范和 Weyl 的规范，物理意义已经不同，但是名称依然保留下来。量子理论中所谓的规范变换，确切地说是波函数 ψ 的相位变换，今后我们认为这两种说法等价。

首先考虑波函数的**整体相位 (global phase) 变换**：

$$\psi(x) \quad \to \quad \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \tag{5.2.8}$$

其中 α 是常数。上式表明任何地方的波函数变换相同。量子力学中可观测量 $\mathcal{O}$ 的测量平均值和概率为：

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle, \qquad P = \langle \psi | \psi \rangle$$

显然在 (5.2.8) 式整体相位变换下，测量平均值和概率等不变，或者说量子力学的形式不变。换句话说，在量子力学中波函数的绝对相位是不可测的，可以任意选取。

这就自然地提出一个问题，是否可以在不同时空，例如地球上和月球上分别任意选取波函数的相位而不影响物理？即，在波函数的**定域相位 (local phase) 变换**下：

$$\psi(x) \quad \to \quad \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \tag{5.2.9}$$

量子力学的形式是不是保持不变？很不幸答案是否定的！事实上，量子力学的运动方程 (例如 Schrödinger 方程)和许多可观测量中往往含有波函数的微分 $\partial_\mu\psi(x)$。在定域相位变换下，$\partial_\mu\psi(x)$ 的变换为：

$$\partial_\mu\psi(x) \quad \to \quad \partial_\mu\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\left[\partial_\mu\psi(x) + i(\partial_\mu\alpha(x))\psi(x)\right] \tag{5.2.10}$$

除了纯相位变换项，多了相位梯度相关的项。正是该额外项破坏了定域相位不变性。

不过有意思的是，在量子力学中定域相位不变性是可以设法保证的，其代价是必须引入一种场 $A_\mu(x)$。为此定义**协变微分 (covariant derivative)**：

$$\boxed{\mathscr{D}_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x)} \tag{5.2.11}$$

其中 e 是一个常数。我们考察波函数的协变微分 $\mathscr{D}_\mu\psi(x)$ 在定域相位变换下的变换：

$$\mathscr{D}_\mu\psi(x) \quad \to \quad \mathscr{D}'_\mu\psi'(x)$$

即：

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu + ieA_\mu(x))\psi(x) \quad \to \quad & (\partial_\mu + ieA'_\mu(x))\psi'(x) \\
= \; & (\partial_\mu + ieA'_\mu(x))e^{i\alpha(x)}\psi(x) \\
= \; & e^{i\alpha(x)}\left[\partial_\mu\psi(x) + i(\partial_\mu\alpha(x))\psi(x) + ieA'_\mu(x)\psi(x)\right]
\end{aligned}$$

为了保证定域相位变换下 $\psi^*\mathscr{D}_\mu\psi$ 不变，要求 $\mathscr{D}_\mu\psi$ 变换为：

$$\boxed{\mathscr{D}_\mu\psi(x) \quad \to \quad e^{i\alpha(x)}\mathscr{D}_\mu\psi(x)} \tag{5.2.12}$$

上面两式必须相等，这就要求在定域相位变换下 $A_\mu(x)$ 的变换是：

$$\boxed{A_\mu(x) \;\;\to\;\; A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)} \tag{5.2.13}$$

可见量子理论的定域相位不变性要求存在一种场 A_μ。因为场 A_μ 是四维矢量，所以这个场必须对应着矢量粒子，例如自旋为 1 的粒子。由于四维矢量 $A_\mu(x)$ 的变换规律 (5.2.13) 式正好是电磁场的规范变换 (4.2.7) 式，而协变微分的定义 (5.2.11) 式对应最小电磁耦合 $p \to p - eA$。因此我们可以认为 A_μ 是电磁场，与之对应的粒子是光子，e 则是带电粒子的电荷。定域相位不变性建议，存在电磁场 (光子) 和带电粒子之间的相互作用 ($\mathscr{D}_\mu\psi$)。注意 e 是一个常数，定域相位不变性没有给出其具体数值。

5.2.3 场论中的规范不变性

前面讨论了量子力学中的规范变换，或相位变换。正是量子理论中的规范变换导致了它的现代概念。下面我们在 Lagrangian 场论的框架下系统讨论规范变换问题，

一、整体相位变换

考察一个自由复标量场，其 Lagrangian 为：

$$\mathscr{L} = |\partial^\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2$$

对它作整体相位变换：

$$\phi(x) \;\;\to\;\; e^{iq\alpha}\phi(x), \qquad\qquad \phi^*(x) \;\;\to\;\; e^{-iq\alpha}\phi^*(x)$$

式中为方便计，把常数 q 从 α 中提出来。于是场的无穷小变化为：

$$\delta\phi = iq(\delta\alpha)\phi, \qquad\qquad \delta\phi^* = -iq(\delta\alpha)\phi^*$$
$$\delta(\partial_\mu\phi) = iq(\delta\alpha)\partial_\mu\phi, \qquad\qquad \delta(\partial_\mu\phi^*) = -iq(\delta\alpha)\partial_\mu\phi^*$$

所谓整体相位变换不变，是指在这种变换下 Lagrangian 不变：

$$\delta\mathscr{L} = 0$$

具体计算：

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta(\partial_\mu\phi^*) \\
&= \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] iq(\delta\alpha)\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} iq(\delta\alpha)\partial_\mu\phi - (\text{复共轭项 } \phi \to \phi^*) \\
&= iq(\delta\alpha)\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right] \equiv 0
\end{aligned}$$

其中第二个等式用到了 Euler-Lagrange 方程。显然若定义流：

$$j^\mu = -iq\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right] = iq\left[\phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^*)\phi\right] \tag{5.2.14}$$

则有：

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{5.2.15}$$

如果我们把 q 认为是电荷，则 (5.2.14) 式是带电标量场的电流，(5.2.15) 式表明整体相位不变导致电流守恒，电荷 q 是守恒荷 (这和第 3.4 节中的电荷守恒讨论结果是一致的)。虽然我们是以复标量场为例进行讨论，其结果适用于任何场。

二、定域规范变换

那么定域相位不变性又会导致什么结果？在场的定域相位变换下：

$$\phi(x) \quad \to \quad e^{iq\alpha(x)}\phi(x) \tag{5.2.16}$$

场的 Lagrangian 中依赖场本身的项保持不变，如同前面量子理论中所讨论的，也就是说这些项的变换不会导致比整体变换更多的结果。但是场的 Lagrangian 中依赖场微分的项将作如下变换：

$$\partial_\mu\phi(x) \quad \to \quad e^{iq\alpha(x)}\big[\partial_\mu\phi(x)+iq(\partial_\mu\alpha(x))\phi(x)\big] \tag{5.2.17}$$

同样引入规范协变微分 (gauge-covariant derivative)：

$$\boxed{\mathscr{D}_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu(x)} \tag{5.2.18}$$

于是若矢量场 A_μ 如下变换：

$$\boxed{A_\mu(x) \quad \to \quad A_\mu(x)-\partial_\mu\alpha(x)} \tag{5.2.19}$$

则诸如 $\mathscr{D}_\mu\phi$ 这样的量的变换和场的变换一样：

$$\mathscr{D}_\mu\phi(x) \quad \to \quad e^{iq\alpha(x)}\mathscr{D}_\mu\phi(x) \tag{5.2.20}$$

我们在第 5.2.2 节中注意到，量子力学中的微分替换 $\partial_\mu \to \mathscr{D}_\mu$ 引入了矢量场 A_μ 和物质之间的相互作用。为了看出这在量子电动力学中是如何发生的，我们考虑自由 Dirac 场，其 Lagrangian 为：

$$\mathscr{L}_{\text{Dirac}} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

将式中的 ∂_μ 替换为 $\mathscr{D}_\mu$，得到：

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\mathscr{D}_\mu - m)\psi = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - qA_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

定义电磁流：

$$\boxed{j^\mu \equiv q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi} \tag{5.2.21}$$

则 Lagrangian 为：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{Dirac}} + \mathscr{L}_{\text{int}}$$

式中：

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = -j^\mu A_\mu \tag{5.2.22}$$

这正是 Dirac 粒子 (以电流的形式 j^μ) 和经典电磁场 A_μ 之间的相互作用。定域规范不变性要求引入一个新的规范场 A_μ，我们将它解释为物理上的光子场。为了得到完整的 QED 的 Lagrangian，还需要加上矢量场的动能项：

$$\mathscr{L}_{\text{em}} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5.2.23}$$

它表示自由光子的传播。故完整的 QED 的 Lagrangian 是：

$$\boxed{\mathscr{L}_{\text{QED}} = \underbrace{\overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi}_{\mathscr{L}_{\text{Dirac}}} \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\mathscr{L}_{\text{em}}} \underbrace{-j^\mu A_\mu}_{\mathscr{L}_{\text{int}}}} \tag{5.2.24}$$

值得注意的是通过定域规范不变性引入的电磁场的质量。如果光子是有质量的，那么我们必须在 Lagrangian 中增加光子质量项：

$$\mathscr{L}_\gamma = \frac{1}{2}m_\gamma^2 A_\mu A^\mu$$

在定域规范变换下：

$$A^\mu A_\mu \quad \to \quad (A^\mu - \partial^\mu\alpha)(A_\mu - \partial_\mu\alpha) \neq A^\mu A_\mu$$

明显破坏定域广泛不变性，故定域规范不变性必然导致无质量的光子。

总结：

通过上面的讨论我们看到，Lagrangian 的整体相位不变性导致守恒的电荷。更重要的是，定域规范不变性要求引入自旋为 1 的规范场 A_μ，该矢量场的规范玻色子是光子。为了保证定域规范不变性，光子质量必须为零，与电磁作用力程无限的事实一致。此外，定域规范不变性明确给出了规范场和物质之间相互作用的具体形式。对于 Dirac 粒子，这种相互作用是 $-j^\mu A_\mu$，其中 j^μ 是自由 Dirac 粒子 Lagrangian 的守恒流。

5.2.4 Yang-Mills 理论

前面讨论了整体相位变换：

$$\psi(x) \quad \to \quad e^{i\alpha}\psi(x)$$

其中 $e^{i\alpha}$ 是一个数，可以认为是 1×1 的幺正矩阵。故上式所示的相位变换可以写为：

$$\psi \quad \to \quad \psi' = U\psi$$

由于：

$$U^\dagger U = 1$$

故这些相位变换的幺正矩阵构成 U(1) 群。这种相位变换称为 U(1) 相位变换 (或规范变换)，变换的对称性称为 U(1) 规范不变性，这种理论称为 U(1) 规范理论，这是一种 Abelian 的理论。

1954 年，远在夸克模型提出之前，杨振宁和 Mills 把 Abelian U(1) 规范理论扩展到描述内部空间 (例如同位旋空间) 的 non-Abelian SU(2) 群，建立 Yang-Mills 理论。后来人们又把 Yang-Mills 理论推广到描述色 SU(3) 群，建立量子色动力学。粒子物理学标准模型中的三种基本相互作用，都是用这种方式建立起来的。本节讨论 Yang-Mills 理论的基本思想。

假设有两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的自由旋量场 ψ_1 和 ψ_2，在没有相互作用时的 Lagrangian 为：

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}_1(i\gamma^\mu - m_1)\psi_1 + \overline{\psi}_2(i\gamma^\mu - m_2)\psi_2$$

可以把上式写为更加紧凑的形式。我们定义二分量的列矢量(注意 ψ_1, ψ_2 本身是四分量的 Dirac 旋量)：

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

伴随二分量行矢量为：

$$\overline{\psi} = \begin{pmatrix} \overline{\psi}_1 & \overline{\psi}_2 \end{pmatrix}$$

于是 Lagrangian 变为：

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi$$

其中：

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

称为质量矩阵。如果两个质量相等，则 Lagrangian 变为：

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \tag{5.2.25}$$

Yang-Mills 理论是 SU(2) 规范场论，一般的整体变换可写为：

$$\psi \quad \rightarrow \quad U\psi$$

其中 U 是 2×2 幺正矩阵：

$$U^\dagger U = 1$$

我们在第 3.3.5 节已经知道，任意 2×2 幺正矩阵可表示为：

$$U = e^{i\theta} e^{i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{\alpha}}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}$ 是 Pauli 矩阵。整体变换中的 U(1) 相位变换 $e^{i\theta}$ 已在前面讨论。下面我们关注式中的另一部分变换：

$$\psi \quad \rightarrow \quad e^{i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{\alpha}}\psi$$

由于 $\det e^{i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{\alpha}} = 1$，因此所有 $e^{i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{\alpha}}$ 矩阵构成 SU(2) 群，上式又称为整体 SU(2) 变换。

杨振宁和 Mills 所做的工作就是把整体 SU(2) 不变性推广到定域 SU(2) 规范不变性。此时 $\boldsymbol{\alpha}$ 是时空的函数，Dirac 场的变换为：

$$\psi(x) \quad \rightarrow \quad S(x)\psi(x)$$

其中：

$$S(x) \equiv e^{i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)}$$

在定域 SU(2) 规范变换下，场的微分的变换为：

$$\partial_\mu \psi \quad \rightarrow \quad S(\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu S)\psi \tag{5.2.26}$$

故 $\mathscr{L}$ 不是定域规范不变的。杨振宁和 Mills 采取的措施仍然是引入规范场 $\mathbf{B}_\mu$，定义规范协变微分：

$$\mathscr{D}_\mu \equiv \partial_\mu I + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\mathbf{B}_\mu$$

注意规范场 $\mathbf{B}_\mu$ 是内部空间的矢量，是三个四维矢量场，和 SU(2) 群的三个生成元 $\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}$ 对应。式中的 g 是耦合常数。如果恰当地选取 $\mathbf{B}_\mu$ 的变换形式：

$$\mathbf{B}_\mu \quad \rightarrow \quad \mathbf{B}'_\mu \tag{5.2.27}$$

使得：

$$\mathscr{D}_\mu\psi \quad\rightarrow\quad S(\mathscr{D}_\mu\psi)$$

则 Lagrangian (5.2.25) 式是定域 SU(2) 规范不变的。问题在于 $\mathbf{B}_\mu$ 的确定不是那么容易。这方面的内容已经超出了本课程的程度，可以参阅有关的规范场论书籍。我们只列出最终结果：

$$\mathbf{B}'_\mu = \mathbf{B}_\mu - \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{B}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha} \tag{5.2.28}$$

于是在定域规范变换 (5.2.26)、(5.2.28) 下，Lagrangian 不变，可写为：

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\mathscr{D}_\mu - m)\psi = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - (g\overline{\psi}\gamma^\mu\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi)\cdot\mathbf{B}_\mu$$

类似定域 U(1) 规范变换情形，我们定义三个流：

$$\boxed{\mathbf{j}^\mu = g\overline{\psi}\gamma^\mu\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi} \tag{5.2.29}$$

此外，完整的 Lagrangian 还应包含规范场的动能项 $-\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu}$，于是：

$$\boxed{\mathscr{L}_{\text{Y.M.}} = \underbrace{\overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi}_{\mathscr{L}_{\text{Dirac}}} \ \underbrace{-\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu}}_{\mathscr{L}_{\mathbf{B}}} \ \underbrace{-\mathbf{j}^\mu\cdot\mathbf{B}_\mu}_{\mathscr{L}_{\text{int}}}} \tag{5.2.30}$$

注意有三个 $\mathbf{F}^{\mu\nu}$，对应三个矢量规范场 $\mathbf{B}_\mu$。同电磁场一样，Yang-Mills 理论中的规范场 $\mathbf{B}_\mu$ 仍然没有质量，否则将破坏定域 SU(2) 规范不变性。

5.2.5 Non-Abelian 定域色 SU(3) 规范理论

把 Yang-Mills 理论推广到色 SU(3) 规范理论是很直接的。和 Yang-Mills 理论相比，有如下不同：

- 考虑到三种颜色，某种味道的自由 Dirac 场的 Lagrangian 为：

$$\mathscr{L} = \sum_{c=r,g,b}\overline{\psi}_c(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_c$$

若定义三分量的列矢量：

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_r\\ \psi_g\\ \psi_b\end{pmatrix}$$

则 Lagrangian 为：

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \tag{5.2.31}$$

❍ 任意 3×3 幺正矩阵可表示为：

$$U = e^{i\theta} e^{i\frac{\boldsymbol{\lambda}}{2}\cdot\boldsymbol{\alpha}}$$

式中 $\boldsymbol{\lambda}$ 是八个 Gell-Mann 矩阵。我们同样只关注其中的定域色 SU(3) 规范变换：

$$\psi(x) \quad\rightarrow\quad S(x)\psi(x)$$

其中：

$$S(x) \equiv e^{i\frac{\boldsymbol{\lambda}}{2}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)}$$

❍ 引入八个规范场 $\mathbf{G}_\mu$ (胶子场)，定义规范协变微分：

$$\mathscr{D}_\mu \equiv \partial_\mu I + ig\frac{\boldsymbol{\lambda}}{2}\cdot\mathbf{G}_\mu$$

如果适当选取 $\mathbf{G}_\mu$ 的变换形式 (具体计算比 SU(2) 情形更复杂)，使得：

$$\mathscr{D}_\mu\psi \quad\rightarrow\quad S(\mathscr{D}\psi)$$

则 Lagrangian (5.2.31) 式在色 SU(3) 规范变换下不变。

❍ 在定域色 SU(3) 规范变换下 Lagrangian 不变，如果加入规范场的动能项，则完整的 Lagrangian 为：

$$\boxed{\mathscr{L}_{\rm QCD} = \underbrace{\overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi}_{\mathscr{L}_{\rm Dirac}} \underbrace{-\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu}}_{\mathscr{L}_{\rm gluons}} \underbrace{-\mathbf{j}^\mu\cdot\mathbf{G}_\mu}_{\mathscr{L}_{\rm int}}} \tag{5.2.32}$$

式中八个色流定义为：

$$\boxed{\mathbf{j}^\mu = g\overline{\psi}\gamma^\mu\frac{\boldsymbol{\lambda}}{2}\psi} \tag{5.2.33}$$

可见这些 non-Abelian 规范理论形式上非常相似。

5.3 电弱统一

电弱统一的规范理论主要是 Glashow (1961)、Weinberg (1967) 和 Salam (1968) 等人建立起来的。本节讨论电弱统一理论。首先必须回答两个问题：其一，理论应该选择什么群？其二，参与弱作用的费米子如何和群对应？电弱统一理论是基于 $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$ 群的规范理论。

5.3.1 弱同位旋和 $\mathrm{SU}(2)_L$

弱相互作用是由定域 SU(2) 相位不变导致的：

$$\psi \quad \to \quad \psi' = e^{i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)}\psi \tag{5.3.1}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}$ 是 Pauli 矩阵 (为了和自旋相区别，这里我们用 $\boldsymbol{\tau}$ 代替 $\boldsymbol{\sigma}$)，$\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}$ 是 SU(2) 群的生成元。根据 5.2.4 节中的讨论，需要引入三个弱作用规范场，相应的三种规范玻色子是：

$$\mathbf{W}^\mu = (W_1^\mu, W_2^\mu, W_3^\mu)$$

注意 (5.3.1) 式中的费米子场 ψ 是二分量的，代表弱相互作用中的同位旋状态，即**弱同位旋 (weak isospin)** 态。由于弱作用只耦合左手手征粒子和右手手征反粒子，因此它们组成弱同位旋二重态 $I_W = \frac{1}{2}$，记作：

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L, \qquad \begin{pmatrix}u\\ d'\end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix}c\\ s'\end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix}t\\ b'\end{pmatrix}_L, \qquad \begin{matrix}I_W^3 = +\frac{1}{2}\\ I_W^3 = -\frac{1}{2}\end{matrix}$$

右手手征粒子和左手手征反粒子不构成弱同位旋二重态，它们是弱同位旋单态 $I_W = 0$，记作：

$$e_R, \quad \mu_R, \quad \tau_R, \qquad d_R, \quad u_R, \quad s_R, \quad c_R, \quad b_R, \quad t_R, \qquad I_W = 0$$

通常把弱作用 SU(2) 群记作 $\mathrm{SU}(2)_L$，以突出左手手征这个性质。

为简单起见，我们考虑轻子的弱作用，并以第一代轻子为例。定域相位变换为：

$$\chi_L = \begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L \quad \to \quad \chi_L' = \begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L' = e^{i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)}\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L$$

弱作用的定域 $\mathrm{SU}(2)_L$ 规范对称性决定了弱作用的形式。根据第 5.2.4 节中的讨论，相互作用 Lagrangian 为：

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = -\mathbf{j}^\mu \cdot \mathbf{W}_\mu$$

注意有三种弱作用流 $\mathbf{j}^\mu$，相应地有三种规范玻色子 $\mathbf{W}_\mu$，或者说每个生成元有一种流：

$$\begin{aligned} j_\mu^1 &= g_w \overline{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_1}{2}\chi_L \\ j_\mu^2 &= g_w \overline{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_2}{2}\chi_L \\ j_\mu^3 &= g_w \overline{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_3}{2}\chi_L \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

式中 j_μ 表达式中包含了弱作用强度 g_w，这和第 4 章中的略有不同。

弱带电流是通过 $W^{\pm}$ 传播的，它们是 W_1 和 W_2 的线性叠加：

$$W_{\pm}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^{\mu} \pm iW_2^{\mu})$$

相应的流为：

$$j_{\pm}^{\mu} = \frac{g_w}{\sqrt{2}}(j_1^{\mu} \pm i j_2^{\mu}) = \frac{g_w}{\sqrt{2}}\overline{\chi}_L \gamma^{\mu} \tfrac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2)\chi_L$$

定义弱作用阶梯算符：

$$\tau_{\pm} = \tfrac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2)$$

则流变为：

$$\boxed{j_{\pm}^{\mu} = \frac{g_w}{\sqrt{2}}\overline{\chi}_L \gamma^{\mu} \tau_{\pm} \chi_L} \tag{5.3.3}$$

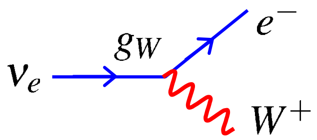
上式给出了弱带电流中 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 因子的来源。

我们先看 j_+ 流：

$$j_{+}^{\mu} = \frac{g_w}{\sqrt{2}}\overline{\chi}_L \gamma^{\mu} \tau_{+} \chi_L = \frac{g_w}{\sqrt{2}}(\overline{\nu}_L, \overline{e}_L)\gamma^{\mu}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{g_w}{\sqrt{2}}\overline{\nu}_L \gamma^{\mu} e_L$$

于是得到我们熟知的流 (字母上的 ¯ 表示伴随旋量)：

$$\boxed{j_{+}^{\mu} = \frac{g_w}{\sqrt{2}}\overline{\nu}\gamma^{\mu} \tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)e} \tag{5.3.4}$$

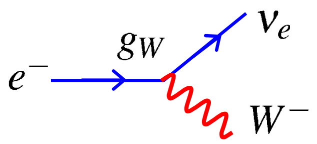


对于 j_-^{μ} 同样处理：

$$j_{-}^{\mu} = \frac{g_w}{\sqrt{2}}\overline{\chi}_L \gamma^{\mu} \tau_{-} \chi_L = \frac{g_w}{\sqrt{2}}(\overline{\nu}_L, \overline{e}_L)\gamma^{\mu}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{g_w}{\sqrt{2}}\overline{e}_L \gamma^{\mu} \nu_L$$

上式可写为我们熟知的流：

$$\boxed{j_{-}^{\mu} = \frac{g_w}{\sqrt{2}}\overline{e}\gamma^{\mu} \tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu} \tag{5.3.5}$$



5.3.2 弱超荷和 $\mathrm{U}(1)_Y$

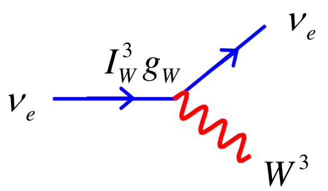
还有一个和 W_3 相应的流：

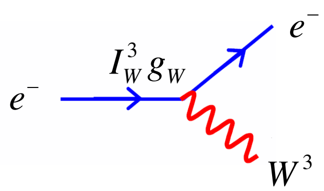
$$j_3^\mu = g_w \overline{\chi}_L \gamma^\mu \frac{1}{2} \tau_3 \chi_L = g_w \frac{1}{2} (\overline{\nu}_L, \overline{e}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$$

可以写为两部分之和：

$$j_3^\mu = g_w \tfrac{1}{2} \overline{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - g_w \tfrac{1}{2} \overline{e}_L \gamma^\mu e_L \tag{5.3.6}$$

其中第一项和第二项中的因子 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 分别指 $I_W^3 = \frac{1}{2}$ 和 $I_W^3 = -\frac{1}{2}$，故 j_3^μ 表明 W^3 传递的是中性流，我们在顶点处用 $I_W^3 g_w$ 表示。





但是不能简单地认为 W^3 就是 Z^0。事实上，有两个物理的中性矢量规范玻色子，即 γ 和 Z^0，相应的规范场为 A 和 Z，它们是 W^3 和另一种新的自旋为 1 的中性规范场 B 的混合：

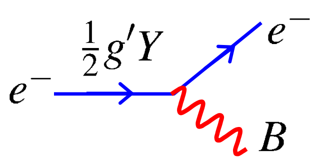
$$A_\mu = \ \ B_\mu \cos\theta_W + W_\mu^3 \sin\theta_W \tag{5.3.7}$$

$$Z_\mu = -B_\mu \sin\theta_W + W_\mu^3 \cos\theta_W \tag{5.3.8}$$

式中 θ_W 是弱混合角。新引入的规范场 B_μ 的对称性和电磁场的相似，称为 $\mathrm{U}(1)_Y$ 规范对称性。其中下标 Y 是这种对称性的荷，称为**弱超荷 (weak hypercharge)**，其定义可以和强作用中通过 Gell-Mann－西岛关系给出的超荷定义类比：

$$\frac{Y}{2} \equiv Q - I_W^3$$

其中 Q 是参与弱作用的左手手征粒子和右手手征反粒子的电荷，I_W^3 是弱同位旋第三分量。通过规范场 B 传播的相互作用耦合强度为 g'，它不等于 g_w，习惯上在顶点处用 $\frac{1}{2} g' Y$ 表示。



下面列出参与弱作用的第一代轻子的弱超荷：

$$\begin{aligned} \nu_L&: \quad Y = +1 \\ e_L&: \quad Y = -1 \\ e_R&: \quad Y = -2 \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

关系式 (5.3.7) 等价于：

$$j_\mu^{\text{em}} = j_\mu^{Y}\cos\theta_W + j_\mu^{W^3}\sin\theta_W \tag{5.3.10}$$

其中：

$$\begin{aligned} j_\mu^{\text{em}} &= e\overline{\psi}Q_e\gamma_\mu\psi = e\overline{e}_LQ_e\gamma_\mu e_L + e\overline{e}_RQ_e\gamma_\mu e_R \\ j_\mu^{W^3} &= -\frac{g_w}{2}\overline{e}_L\gamma_\mu e_L \\ j_\mu^{Y} &= \frac{g'}{2}\overline{\psi}Y_e\gamma_\mu\psi = \frac{g'}{2}\overline{e}_LY_{eL}\gamma_\mu e_L + \frac{g'}{2}\overline{e}_RY_{eR}\gamma_\mu e_R \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

把上式代入 (5.3.10) 式，得到：

$$\begin{aligned} e\overline{e}_LQ_e\gamma_\mu e_L + e\overline{e}_RQ_e\gamma_\mu e_R = &\frac{1}{2}g'\cos\theta_W[\overline{e}_LY_{eL}\gamma_\mu e_L + \overline{e}_RY_{eR}\gamma_\mu e_R] \\ &-\frac{1}{2}g_w\sin\theta_W[\overline{e}_L\gamma_\mu e_L] \end{aligned}$$

把 $Q_e=-1, Y_{eL}=-1, Y_{eR}=-2$ 代入上式，得到：

$$\begin{aligned} -e\overline{e}_L\gamma_\mu e_L - e\overline{e}_R\gamma_\mu e_R = &\frac{1}{2}g'\cos\theta_W[-\overline{e}_L\gamma_\mu e_L - 2\overline{e}_R\gamma_\mu e_R] \\ &-\frac{1}{2}g_w\sin\theta_W[\overline{e}_L\gamma_\mu e_L] \end{aligned}$$

令式中的 L 和 R 项分别相等，可得：

$$\boxed{e = g_w\sin\theta_W = g'\cos\theta_W} \tag{5.3.12}$$

上式表明，电磁场 A、规范场 W^3 和规范场 B 的荷 e、g_w 和 g' 是紧密相联系的，它们通过弱混合角统一起来。

5.3.3　Z^0 玻色子及其衰变

现在可以推导 Z^0 玻色子的耦合。根据 (5.3.8) 式：

$$Z_\mu = -B_\mu\sin\theta_W + W_\mu^3\cos\theta_W$$

这等价于：

$$j_\mu^Z = -\frac{1}{2}g'\sin\theta_W[\overline{e}_LY_{eL}\gamma_\mu e_L + \overline{e}_RY_{eR}\gamma_\mu e_R] - \frac{1}{2}g_w\cos\theta_W[\overline{e}_L\gamma_\mu e_L]$$

式中：

$$\begin{aligned} Y_{eL} &= 2Q - 2I_W^3 \\ Y_{eR} &= 2Q \end{aligned}$$

第三项中的 $-\frac{1}{2} = I_W^3$ 是电子的弱同位旋，于是：

$$j_\mu^Z = -\frac{1}{2}g'\sin\theta_W[\overline{e}_L(2Q-2I_W^3)\gamma_\mu e_L + \overline{e}_R2Q\gamma_\mu e_R] + I_W^3g_w\cos\theta_W[\overline{e}_L\gamma_\mu e_L]$$

我们把上式写成左手手征分量和右手手征分量两部分：

$$j_\mu^Z=[g' I_W^3\sin\theta_W-g' Q\sin\theta_W+g_w I_W^3\cos\theta_W]\overline{e}_L\gamma_L e_L-[g' Q\sin\theta_W]\overline{e}_R\gamma_\mu e_R$$

利用 (5.3.12) 式：

$$e=g_w\sin\theta_W=g'\cos\theta_W$$

把 j_μ^Z 中的 g_w 用 g' 表示：

$$j_\mu^Z=\left[g'\frac{(I_W^3-Q\sin^2\theta_W)}{\sin\theta_W}\right]\overline{e}_L\gamma_\mu e_L-\left[g'\frac{Q\sin^2\theta_W}{\sin\theta_W}\right]\overline{e}_R\gamma_\mu e_R$$

进一步写为：

$$j_\mu^Z=g_z(I_W^3-Q\sin^2\theta)[\overline{e}_L\gamma_\mu e_L]-g_z Q\sin^2\theta_W[\overline{e}_R\gamma_\mu e_R] \tag{5.3.13}$$

式中：

$$\boxed{e=g_z\cos\theta_W\sin\theta_W} \tag{5.3.14}$$

或者

$$\boxed{g_z=\frac{g_w}{\cos\theta_W}} \tag{5.3.15}$$

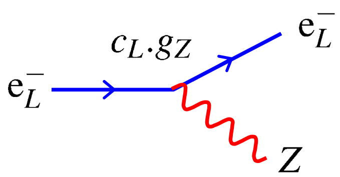
不同于带电弱相互作用，Z^0 玻色子和费米子的左手手征分量和右手手征分量均有耦合，但是耦合程度不一样。如果定义：

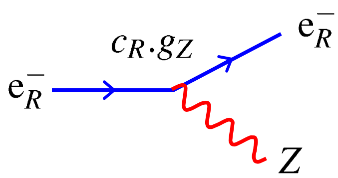
$$\begin{aligned}c_L&=I_W^3-Q\sin^2\theta_W\\ c_R&=-Q\sin^2\theta_W\end{aligned} \tag{5.3.16}$$

则 (5.3.13) 式可写为：

$$j_\mu^Z=g_z c_L[\overline{e}_L\gamma_\mu e_L]+g_z c_R[\overline{e}_R\gamma_\mu e_R] \tag{5.3.17}$$

从 (5.3.16) 式可以看出，Z^0 的 W^3 部分只和左手手征分量耦合，Z^0 的 B 部分和左手手征分量及右手手征分量均有耦合。





利用投影算符的性质：

$$\begin{aligned}\overline{u}_L\gamma_\mu u_L&=\overline{u}\gamma_\mu\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)u\\ \overline{u}_R\gamma_\mu u_R&=\overline{u}\gamma_\mu\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)u\end{aligned}$$

可以把 j_μ^Z 写成矢量和轴矢量两部分：

$$\begin{aligned}j_\mu^Z&=g_z\overline{u}\gamma_\mu\left[c_L\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)+c_R\tfrac{1}{2}(1+\gamma^5)\right]u\\ &=\frac{g_z}{2}\overline{u}\gamma_\mu\left[(c_L+c_R)-(c_L-c_R)\gamma_5\right]u\end{aligned}$$

用 V 和 A 分量表示，则为：

$$\boxed{j_\mu^Z = \frac{g_z}{2}\overline{u}\gamma_\mu(c_V - c_A\gamma_5)u} \tag{5.3.18}$$

式中：

$$\boxed{\begin{aligned} c_V &= c_L + c_R = I_W^3 - 2Q\sin^2\theta_W \\ c_A &= c_L - c_R = I_W^3 \end{aligned}} \tag{5.3.19}$$

故 Z^0 玻色子的顶点因子是：

$$\boxed{-ig_z\gamma_\mu\tfrac{1}{2}(c_V - c_A\gamma_5)} \tag{5.3.20}$$

正是第 4.7.11 节中介绍的 (4.7.49) 式。

利用实验测得的弱混合角：

$$\sin^2\theta_W \approx 0.23$$

可以得到费米子的 c_L, c_R, c_V, c_A 值，如表 5.1 所示。

表 5.1: 费米子的 c_L, c_R, c_V, c_A 值

费米子	Q	I_W^3	c_L	c_R	c_V	c_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	0	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
e^-, μ^-, τ^-	-1	$-\frac{1}{2}$	-0.27	0.23	-0.04	$-\frac{1}{2}$
u, c, t	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{2}$	0.35	-0.15	$+0.19$	$+\frac{1}{2}$
d, s, t	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-0.42	0.08	-0.35	$-\frac{1}{2}$

在极端相对论情形下，螺旋度态等于手征态。对于 W 玻色子的衰变，只需考虑一种螺旋度态组合，即和 W 耦合的费米子是左手粒子和右手反粒子。但是对于 Z^0 玻色子的衰变，它既可以与左手粒子耦合，也可以和右手粒子耦合，所以需要考虑两种螺旋度态组合，如图 5.7 所示。在这点上通过 Z^0 的弱作用过程和 QED 很类似，但是须注意伴随着耦合强度 g_z 的 c_L, c_R 因子不等于 1。

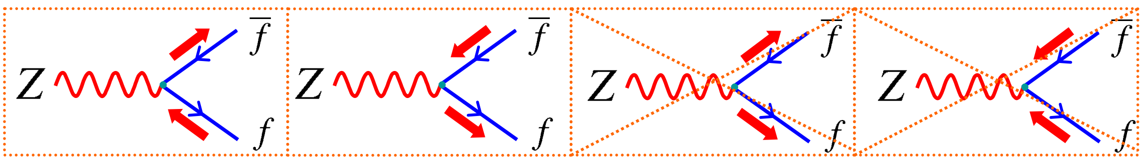
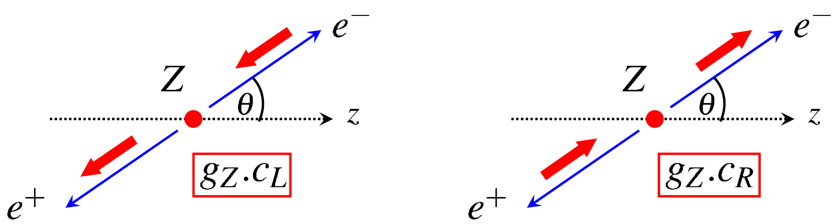


图 5.7: Z^0 衰变允许的螺旋度态组合。

根据上述讨论，我们需要计算两种跃迁矩阵元。以 $Z^0 \to e^+ + e^-$ 为例进行计算。



对于非极化的 Z^0 玻色子的衰变，不难证明 (请证明)：

$$\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = \frac{1}{3}\left(2c_L^2 g_z^2 m_Z^2 + 2c_R^2 g_z^2 m_Z^2\right) = \frac{2}{3}g_z^2 m_Z^2 (c_L^2 + c_R^2)$$

其中 $\frac{1}{3}$ 来自对 Z^0 初态极化态的平均。利用：

$$c_V^2 + c_A^2 = 2(c_L^2 + c_R^2)$$

以及质心系中微分截面：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{p}^*|}{32\pi^2 m_Z^2}|\mathcal{M}_{fi}|^2$$

得到 $Z^0 \to e^+ + e^-$ 衰变率：

$$\Gamma(Z \to ee) = \frac{g_z^2 m_Z}{48\pi}(c_V^2 + c_A^2) \tag{5.3.21}$$

Z^0 衰变为其他费米子对的衰变率也一样 (忽略费米子质量)。不过 Z^0 和不同费米子耦合的强度是不同的。利用表 5.1 中 c_V, c_A 值，得到以下分支比：

$$\begin{aligned}
&Br(Z \to e^+e^-) = Br(Z \to \mu^+\mu^-) = Br(Z \to \tau^+\tau^-) \approx 3.5\% \\
&Br(Z \to \nu_1\overline{\nu}_1) = Br(Z \to \nu_2\overline{\nu}_2)) = Br(Z \to \nu_3\overline{\nu}_3)) \approx 6.9\% \\
&Br(Z \to d\overline{d}) = Br(Z \to s\overline{s}) = Br(Z \to b\overline{b}) \approx 15\% \\
&Br(Z \to u\overline{u}) = Br(Z \to c\overline{c}) \approx 12\%
\end{aligned}$$

故 Z^0 玻色子以衰变到强子为主 (主要原因在于三种色量子数)：

$$Br(Z \to \text{hadrons}) \approx 69\%$$

我们也可以计算 Z^0 的总衰变率或宽度：

$$\Gamma_Z = \sum_i \Gamma_i = 2.5\,\text{GeV}$$

符合实验测量值：

$$\Gamma_Z = 2.4952 \pm 0.0023\,\text{GeV}$$

总结：

标准模型中相互作用由自旋为 1 的规范玻色子传播。相互作用的具体形式由规范不变性完全决定，即：

$$\begin{aligned}
\text{U}(1)_{\text{em}} &\to \text{QED} \\
\text{SU}(2)_L &\to \text{charged current weak interaction} + W^3 \\
\text{SU}(3)_c &\to \text{QCD}
\end{aligned}$$

为了统一电磁作用和弱作用，引入新的规范对称性：

$$\text{U}(1)_Y \to B_\mu$$

物理上的 γ 和 Z^0 是 W^3 和 B 的混合。混合角或 Weinberg 角为：

$$\sin\theta_W \approx 0.23$$

注意电磁作用和弱作用的这种统一做法是从两种独立理论出发的，各自有不同耦合常数 e 和 g_w，最终虽然发现两种常数有关系，但是代价是引入了一个新的参数 θ_W。因此这种统一法并没有真正统一电磁作用和弱作用。不过，尽管标准模型中的电弱统一并不是在更基本原理上的统一，它能够很好地描写实验结果，it just works!

5.4 标准模型的精确检验

电弱统一的思想打开了粒子物理学的现代视野，其理论得到了广泛的实验证实。特别是 LEP 实验对 Z^0 和 $W^\pm$ 玻色子性质的精确测量，给出了电弱理论最严格的实验检验，是粒子物理学标准模型电弱理论的强有力支撑。

5.4.1 LEP 实验

位于法国和瑞士边境 CERN 的大型电子正电子 (Large Electron Positron, LEP) 对撞机的物理目标是精密测量 Z^0 和 $W^\pm$ 玻色子的性质。LEP 置于地下 100 米隧道内的束流管道的周长达 27 公里 [1]，有四个对撞点和探测器，分别是 ALEPH, DELPH, L3 和 OPAL。LEP 运行期间为 1989-2000 年，其中在 1989-1995 年，质心系能量为 $\sqrt{s} = 91.2\,\text{GeV}$，累计获取了 17 million Z^0 玻色子事例。在 1996-2000 年，质心系能量为 $\sqrt{s} = 161 - 208\,\text{GeV}$，累积了 30000 W^+W^- 事例。

一般而言，根据 e^+e^- 质心系能量，可以把正负电子的反应过程分为几个区间：当质心能量远低于 Z^0 质量时，以湮灭为光子为主。当质心能量在 Z^0 质量附近时，以湮灭为 Z^0 为主。在其他质心能量区域，既湮灭为 γ，也湮灭为 Z^0。当质心系能量很大时，将产生 W^+ 和 W^- 玻色子对。LEP 对撞机的能量涵盖很大的范围，如图 5.8 所示。

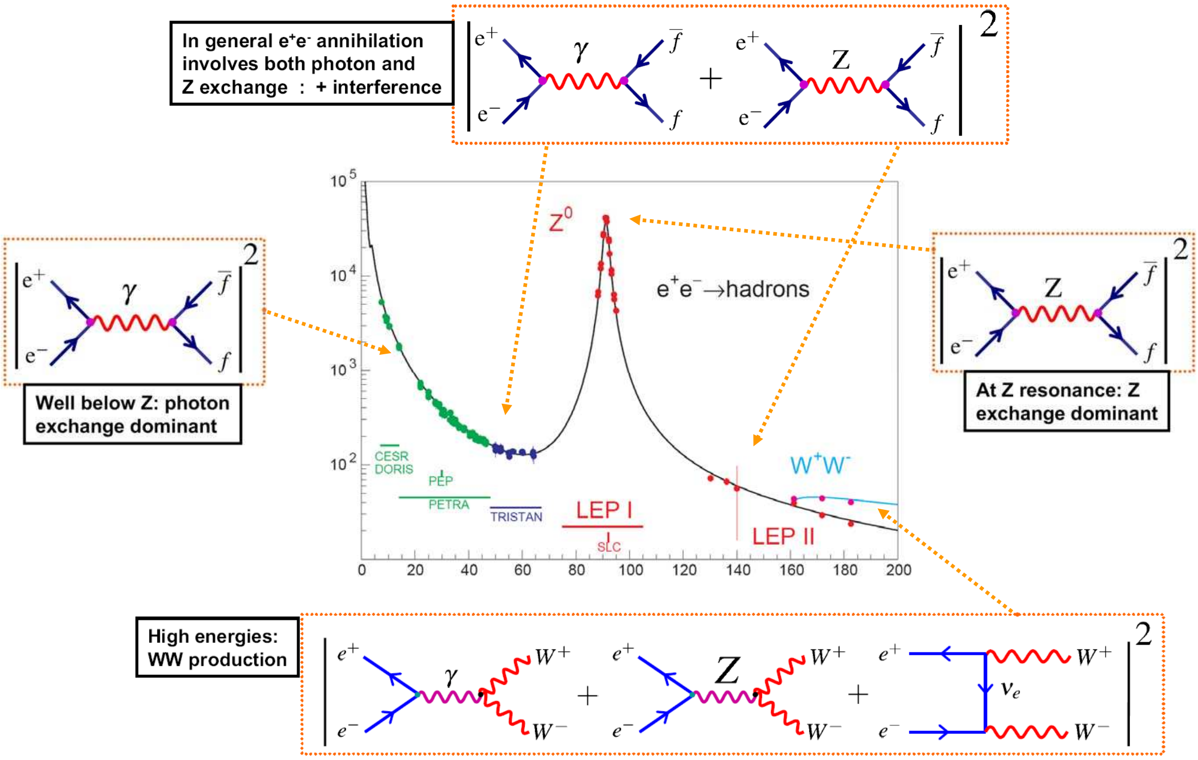


图 5.8: e^+e^- 对撞和 Z^0 共振峰。

[1]LEP 结束运行后，科学家利用其原有地下隧道，建造了大型强子对撞机 (LHC)。LHC 于 2009 年正式开始运行取数，其主要物理目标是寻找 Higgs 粒子、超出标准模型的粒子、mini 黑洞，并进行标准模型的精确测量。

图 5.9 所示为 OPAL 探测器。它由几个子探测器组成，其中喷注室 (径迹室) 主要用来探测末态强子喷注和电子等带电粒子，电磁量能器用来探测光子和电子，强子量能器用来探测强子，μ 子探测器用来探测 μ 子。顶点探测器给出事例发生的顶点位置。螺旋管线圈为径迹室提供磁场，带电粒子在磁场中运动发生偏转，根据磁场大小和径迹的曲率可以求得带电粒子动量。

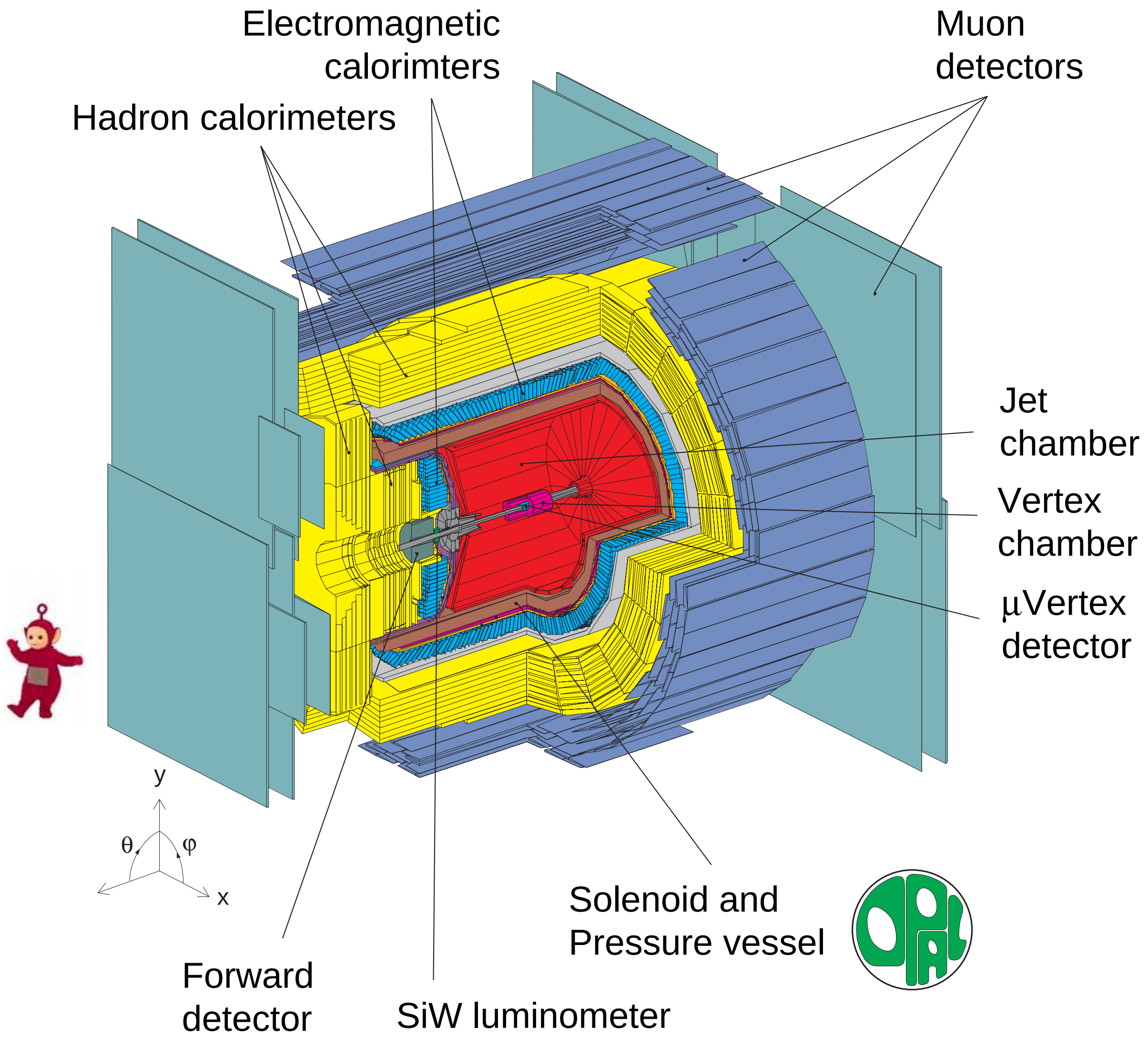


图 5.9: OPAL 探测器。

在 Z^0 共振峰附近，主要可以观测到以下四种事例：

$$\begin{array}{lllllllll} e^+ & + & e^- & \to & Z^0 & \to & e^+ & + & e^- \\ e^+ & + & e^- & \to & Z^0 & \to & \mu^+ & + & \mu^- \\ e^+ & + & e^- & \to & Z^0 & \to & \tau^+ & + & \tau^- \\ e^+ & + & e^- & \to & Z^0 & \to & q & + & \overline{q} \quad \to \quad \text{hadrons} \end{array} \tag{5.4.1}$$

它们的事例在探测器中的响应是不一样的，如图 5.10 所示。利用 OPAL 各种不同的子探测器，可以分辨出属于哪类事例。

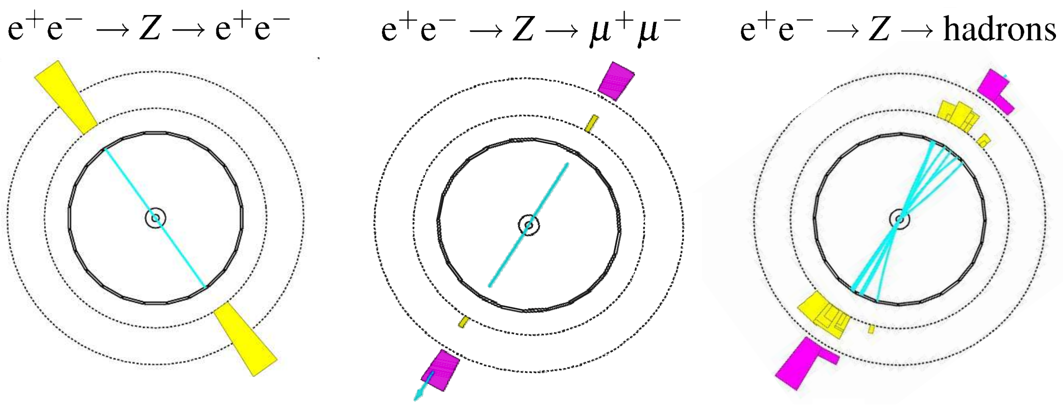


图 5.10: $e^+e^- \to Z^0 \to e^+e^-, \mu^+\mu^-$, hadrons 事例在探测器中的响应。

5.4.2 $e^+ + e^- \to Z^0 \to \mu^+ + \mu^-$ 过程

为了研究玻色子 Z^0 的性质，首先需要了解正负电子对撞中 Z^0 的产生。式 (5.4.1) 表明，在 LEP 对撞机中，正负电子通过 Z^0 玻色子的湮灭过程，末态主要是一对正反费米子。本节以 $e^+ + e^- \to Z^0 \to \mu^+ + \mu^-$ 过程为例，计算其微分截面。

一、跃迁矩阵元

利用中性弱作用过程的费曼规则，有：

$$-i\mathscr{M}_{fi} = \underbrace{\left[\overline{v}(p_2)\cdot -ig_z\gamma^\mu \tfrac{1}{2}(c_V^e - c_A^e\gamma^5)u(p_1)\right]}_{e^+e^-Z\text{ 顶点}} \underbrace{\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2-m_Z^2}}_{\text{传播子}} \underbrace{\left[\overline{u}(p_3)\cdot -ig_z\gamma^\nu \tfrac{1}{2}(c_V^\mu - c_A^\mu\gamma^5)v(p_4)\right]}_{\mu^+\mu^-Z\text{ 顶点}}$$

故跃迁矩阵元为：

$$\mathscr{M}_{fi} = -\frac{g_z^2}{q^2-m_Z^2} g_{\mu\nu}\left[\overline{v}(p_2)\gamma^\mu \tfrac{1}{2}(c_V^e - c_A^e\gamma^5)u(p_1)\right]\left[\overline{u}(p_3)\gamma^\nu \tfrac{1}{2}(c_V^\mu - c_A^\mu\gamma^5)v(p_4)\right]$$

在极端相对论情形下，粒子的手征态等于螺旋度态，用螺旋度态进行计算是方便的。由于 Z^0 和左手粒子和右手粒子均有耦合，故把上式分解为 L 和 R 两部分。利用：

$$\tfrac{1}{2}(c_V - c_A\gamma^5) = \tfrac{1}{2}\left[(c_L + c_R) - (c_L - c_R)\gamma^5\right] = c_L\tfrac{1}{2}(1-\gamma^5) + c_R\tfrac{1}{2}(1+\gamma^5)$$

跃迁矩阵元可写为：

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{fi} = -\frac{g_z^2}{q^2-m_Z^2} g_{\mu\nu}&\left[c_L^e\overline{v}(p_2)\gamma^\mu\tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)u(p_1) + c_R^e\overline{v}(p_2)\gamma^\mu\tfrac{1}{2}(1+\gamma^5)u(p_1)\right]\\ &\times\left[c_L^\mu\overline{u}(p_3)\gamma^\nu\tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)v(p_4) + c_R^\mu\overline{u}(p_3)\gamma^\nu\tfrac{1}{2}(1+\gamma^5)v(p_4)\right]\end{aligned}$$

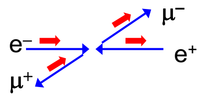
利用手征投影算符性质，上式变为：

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{fi} = -\frac{g_z^2}{q^2-m_Z^2} g_{\mu\nu}&\left[c_L^e\overline{v}(p_2)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1) + c_R^e\overline{v}(p_2)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1)\right]\\ &\times\left[c_L^\mu\overline{u}(p_3)\gamma^\nu v_\uparrow(p_4) + c_R^\mu\overline{u}(p_3)\gamma^\nu v_\downarrow(p_4)\right]\end{aligned}$$

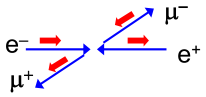
又根据极端相对论情形下螺旋度守恒，得到：

$$\mathcal{M}_{fi} = -\frac{g_z^2}{q^2 - m_Z^2} g_{\mu\nu} \left[c_L^e \overline{v}_\uparrow(p_2)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1) + c_R^e \overline{v}_\downarrow(p_2)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1) \right] \\ \times \left[c_L^\mu \overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\nu v_\uparrow(p_4) + c_R^\mu \overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\nu v_\downarrow(p_4) \right]$$

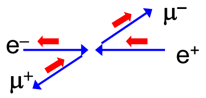
所以总共有四项不为零的螺旋度组合：



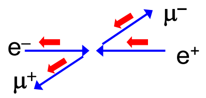
$$\mathcal{M}_{\rm RR} = -\frac{g_z^2}{q^2 - m_Z^2} c_R^e c_R^\mu g_{\mu\nu} \left[\overline{v}_\downarrow(p_2)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1) \right] \left[\overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu v_\downarrow(p_4) \right]$$



$$\mathcal{M}_{\rm RL} = -\frac{g_z^2}{q^2 - m_Z^2} c_R^e c_L^\mu g_{\mu\nu} \left[\overline{v}_\downarrow(p_2)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1) \right] \left[\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu v_\uparrow(p_4) \right]$$



$$\mathcal{M}_{\rm LR} = -\frac{g_z^2}{q^2 - m_Z^2} c_L^e c_R^\mu g_{\mu\nu} \left[\overline{v}_\uparrow(p_2)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1) \right] \left[\overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu v_\downarrow(p_4) \right]$$



$$\mathcal{M}_{\rm LL} = -\frac{g_z^2}{q^2 - m_Z^2} c_L^e c_L^\mu g_{\mu\nu} \left[\overline{v}_\uparrow(p_2)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1) \right] \left[\overline{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu v_\uparrow(p_4) \right]$$

上述跃迁矩阵元中的流已在 $e^+ + e^- \to \gamma \to \mu^+ + \mu^-$ 中进行过详细计算。利用 QED 计算结果，例如：

$$\left[\overline{v}_\downarrow(p_2)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1) \right] \left[\overline{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\nu v_\downarrow(p_4) \right] = s(1 + \cos\theta)$$

可以得到 Z^0 交换时跃迁矩阵元为 (注意 $q^2 = s = 4E_e^2$)：

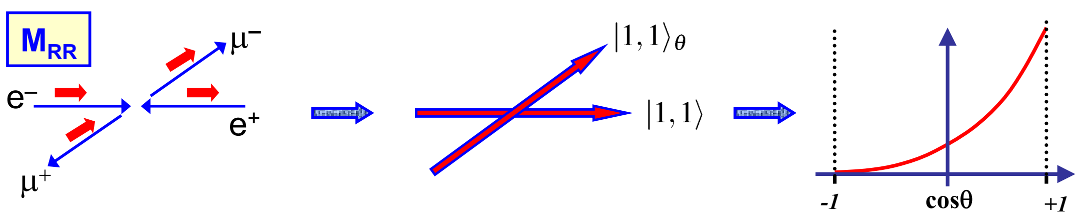
$$|\mathcal{M}_{\rm RR}|^2 = s^2 \left| \frac{g_z^2}{s - m_Z^2} \right|^2 (c_R^e)^2 (c_R^\mu)^2 (1 + \cos\theta)^2$$

$$|\mathcal{M}_{\rm RL}|^2 = s^2 \left| \frac{g_z^2}{s - m_Z^2} \right|^2 (c_R^e)^2 (c_L^\mu)^2 (1 - \cos\theta)^2$$

$$|\mathcal{M}_{\rm LR}|^2 = s^2 \left| \frac{g_z^2}{s - m_Z^2} \right|^2 (c_L^e)^2 (c_R^\mu)^2 (1 - \cos\theta)^2$$

$$|\mathcal{M}_{\rm LL}|^2 = s^2 \left| \frac{g_z^2}{s - m_Z^2} \right|^2 (c_L^e)^2 (c_L^\mu)^2 (1 + \cos\theta)^2$$

矩阵元模方的角度依赖关系可以根据系统的自旋波函数理解。例如：



二、Breit-Wigner 共振

上述计算结果表明，传播子 $\frac{1}{s-m_Z^2}$ 项在 $s=m_Z^2$ 时发散，这是因为没有考虑到 Z^0 是不稳定粒子。事实上必须作如下替换：

$$m_Z \quad\rightarrow\quad m_Z - i\frac{\Gamma_Z}{2}$$

于是：

$$s-m_Z^2 \quad\rightarrow\quad s-\left(m_Z-i\frac{\Gamma_Z}{2}\right)^2 \approx s-m_Z^2+im_Z\Gamma_Z$$

上面考虑了 $\Gamma_Z \ll m_Z$。相应地，$|\mathcal{M}_{fi}|$ 也要作替换，例如：

$$|\mathcal{M}_{\rm RR}|^2 = \frac{g_z^4 s^2}{(s-m_Z^2)^2+m_Z^2\Gamma_Z^2}\left(c_R^e\right)^2\left(c_R^\mu\right)^2(1+\cos\theta)^2$$

代入微分散射截面公式：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s}|\mathcal{M}_{fi}|^2$$

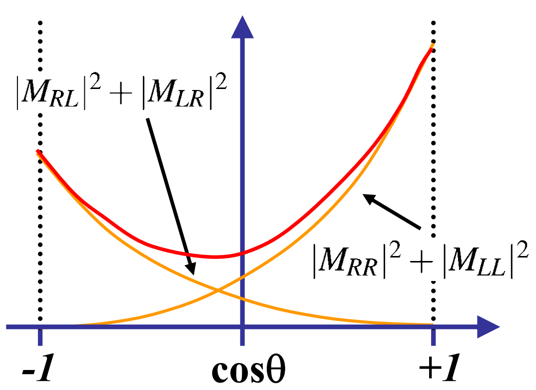
得到：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma_{\rm RR}}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2}\frac{g_z^4 s^2}{(s-m_Z)^2+m_Z^2\Gamma_Z^2}(c_R^e)^2(c_R^\mu)^2(1+\cos\theta)^2\\
\frac{\mathrm{d}\sigma_{\rm RL}}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2}\frac{g_z^4 s^2}{(s-m_Z)^2+m_Z^2\Gamma_Z^2}(c_R^e)^2(c_L^\mu)^2(1-\cos\theta)^2\\
\frac{\mathrm{d}\sigma_{\rm LR}}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2}\frac{g_z^4 s^2}{(s-m_Z)^2+m_Z^2\Gamma_Z^2}(c_L^e)^2(c_R^\mu)^2(1-\cos\theta)^2\\
\frac{\mathrm{d}\sigma_{\rm LL}}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2}\frac{g_z^4 s^2}{(s-m_Z)^2+m_Z^2\Gamma_Z^2}(c_L^e)^2(c_L^\mu)^2(1+\cos\theta)^2
\end{aligned}$$

由于：

$$|\mathcal{M}_{\rm RR}|^2+|\mathcal{M}_{\rm LL}|^2 \neq |\mathcal{M}_{\rm RL}|^2+|\mathcal{M}_{\rm LR}|^2$$

因此不同自旋组合的微分散射截面不同，或者说角分布是不对称的，这种不对称性体现了 $e^+ + e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ 过程中宇称破坏。



三、总截面

对于非极化的 e^+ 和 e^- 束流，跃迁矩阵元的模方必须对末态粒子 μ^+,μ^- 的自旋态求和，对初态粒子 e^+,e^- 的自旋态求平均，即：

$$\begin{aligned}\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle &= \frac{1}{4}\Big(|\mathcal{M}_{\rm RR}|^2+|\mathcal{M}_{\rm LL}|^2+|\mathcal{M}_{\rm RL}|^2+|\mathcal{M}_{\rm LR}|^2\Big)\\ &= \frac{1}{4}\frac{g_z^4 s^2}{(s-m_Z^2)+m_Z^2\Gamma_Z^2}\\ &\times\Big\{\big[(c_R^e)^2(c_R^\mu)^2+(c_L^e)^2(c_L^\mu)^2\big](1+\cos\theta)^2+\big[(c_R^e)^2(c_L^\mu)^2+(c_L^e)^2(c_R^\mu)^2\big](1-\cos\theta)^2\Big\}\end{aligned}$$

上式中 $\{\cdots\}$ 内的表达式可写为：

$$\{\cdots\}=\big[(c_R^e)^2+(c_L^e)^2\big]\big[(c_R^\mu)^2+(c_L^\mu)^2\big](1+\cos^2\theta)+2\big[(c_R^e)^2-(c_L^e)^2\big]\big[(c_R^\mu)^2-(c_L^\mu)^2\big]\cos\theta$$

利用：

$$c_V^2+c_A^2=2(c_L^2+c_R^2)$$

以及

$$c_V c_A=c_L^2-c_R^2$$

可得：

$$\{\cdots\}=\frac{1}{4}\big[(c_V^e)^2+(c_A^e)^2\big]\big[(c_V^\mu)^2+(c_A^\mu)^2\big](1+\cos^2\theta)+2c_V^e c_A^e c_V^\mu c_A^\mu\cos\theta$$

于是非极化情形下微分散射截面为：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 s}\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle\\ &= \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{4}\frac{g_z^4 s}{(s-m_Z)^2+m_Z^2\Gamma_Z^2}\\ &\times\Big\{\frac{1}{4}\big[(c_V^e)^2+(c_A^e)^2\big]\big[(c_V^\mu)^2+(c_A^\mu)^2\big](1+\cos^2\theta)+2c_V^e c_A^e c_V^\mu c_A^\mu\cos\theta\Big\}\end{aligned}\tag{5.4.2}$$

利用单位立体角：

$$\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}(\cos\theta)=2\pi\,\mathrm{d}(\cos\theta)$$

对微分截面 (5.4.2) 式中的角度积分：

$$\int_{-1}^{+1}(1+\cos^2\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)=\frac{8}{3}$$
$$\int_{-1}^{+1}\cos\theta\,\mathrm{d}(\cos\theta)=0$$

得到总截面：

$$\boxed{\sigma(e^+e^-\to Z^0\to\mu^+\mu^-)=\frac{1}{192\pi}\frac{g_z^4 s}{(s-m_Z^2)^2+m_Z^2\Gamma_Z^2}\big[(c_V^e)^2+(c_A^e)^2\big]\big[(c_V^\mu)^2+(c_A^\mu)^2\big]}\tag{5.4.3}$$

上式表明总截面和初末态费米子的矢量轴矢量耦合的平方和成正比：

$$(c_V^f)^2+(c_A^f)^2$$

利用 (5.3.21) 式：

$$\Gamma(Z^0 \to e^+e^-) = \frac{g_z^2 m_Z}{48\pi}\left[(c_V^e)^2 + (c_A^e)^2\right]$$

以及类似的

$$\Gamma(Z^0 \to \mu^+\mu^-) = \frac{g_z^2 m_Z}{48\pi}\left[(c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2\right]$$

可以把 (5.4.3) 式写为：

$$\sigma(e^+e^- \to Z^0 \to \mu^+\mu^-) = \frac{12\pi}{m_Z^2}\frac{s}{(s-m_Z^2)^2 + m_Z^2\Gamma_Z^2}\Gamma(Z^0 \to e^+e^-)\Gamma(Z^0 \to \mu^+\mu^-)$$

以上结果对于任何运动学允许的正反费米子对终态也成立，即非极化 e^+、e^- 束流通过 Z^0 湮灭为正反费米子对 $e^+ + e^- \to Z^0 \to f + \overline{f}$ 的截面为，

$$\boxed{\sigma(e^+e^- \to Z^0 \to f\overline{f}) = \frac{12\pi}{m_Z^2}\frac{s}{(s-m_Z^2)^2 + m_Z^2\Gamma_Z^2}\Gamma_{ee}\Gamma_{ff}} \tag{5.4.4}$$

其中 $\Gamma_{ee} = \Gamma(Z^0 \to e^+e^-)$，$\Gamma_{ff} = \Gamma(Z^0 \to f\overline{f})$。

如果质心系总能量接近 Z^0 共振峰峰位，我们可以把 $\sqrt{s}$ 写为：

$$\sqrt{s} = m_Z + \Delta$$

式中 Δ 是个小量。于是有：

$$s \approx m_Z^2 + 2m_Z\Delta$$

以及

$$(s-m_Z^2)^2 + m_Z^2\Gamma_Z^2 \approx (2m_Z\Delta)^2 + m_Z^2\Gamma_Z^2 = 4m_Z^2\left[\Delta^2 + \tfrac{1}{4}\Gamma_Z^2\right] = 4m_Z^2\left[(\sqrt{s}-m_Z)^2 + \tfrac{1}{4}\Gamma_Z^2\right]$$

代入 (5.4.4) 式，得：

$$\sigma(e^+e^- \to Z^0 \to f\overline{f}) \approx \frac{12\pi}{4m_Z^4}\frac{s}{(\sqrt{s}-m_Z)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_Z^2}\Gamma_{ee}\Gamma_{ff}$$

我们对上式中的记号作如下变换：

$$\sqrt{s} \to E, \qquad m_Z \to E_0, \qquad \Gamma_Z \to \Gamma, \qquad \Gamma_{ee} \to \Gamma_i, \qquad \Gamma_{ff} \to \Gamma_f$$

立即得到我们熟知的非相对论 Breit-Wigner 公式 (参阅 (2.2.5) 式)：

$$\sigma(E) = g\frac{\lambda^2}{4\pi}\frac{\Gamma_i\Gamma_f}{(E-E_0)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}$$

式中 g 是自旋因子：

$$g = \frac{2J+1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} = \frac{3}{4}$$

λ 是质心系中任一入射粒子的 de Broglie 波长：

$$\lambda = \frac{2\pi}{E} \approx \frac{4\pi}{m_Z}$$

5.4.3 Z^0 共振峰线形

实验中通过测量不同质心系能量 $\sqrt{s}$ 下的 $e^+ + e^- \to Z^0 \to f + \overline{f}$ 的截面，可以得到 Z^0 共振峰的线形 (line shape)。由 Z^0 共振峰的线形可以给出如下信息：

- ❍ m_Z：Z^0 共振峰的不变质量；
- ❍ Γ_Z：Z^0 共振峰的宽度；
- ❍ Γ_f：Z^0 衰变到 $f\overline{f}$ 的分宽度；
- ❍ N_ν：中微子代的数目。

前面得到了 $e^+ + e^- \to Z^0 \to f + \overline{f}$ 的截面公式 (5.4.4) 式：

$$\sigma(e^+e^- \to Z^0 \to f\overline{f}) = \frac{12\pi}{m_Z^2}\frac{s}{(s-m_Z^2)^2 + m_Z^2\Gamma_Z^2}\Gamma_{ee}\Gamma_{ff}$$

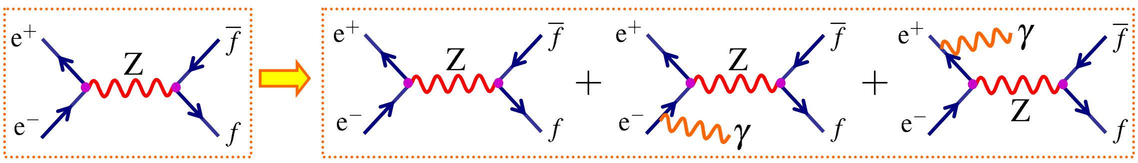
上式表明，当 $\sqrt{s} = m_Z$ 时，截面最大：

$$\sigma^0_{f\overline{f}} = \frac{12\pi}{m_Z^2}\frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{ff}}{\Gamma_Z^2} \tag{5.4.5}$$

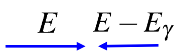
当 $\sqrt{s} = \mathrm{m}_Z \pm \frac{\Gamma_Z}{2}$ 时，截面为的峰值时的一半。因此：

$$\Gamma_Z = \frac{\hbar}{\tau_Z} = \text{FWHM of resonance}$$

共振峰线形并非纯粹的 Breit-Wigner 形状。**初态辐射 (initial state radiation, ISR)** 这种 QED 效应会影响共振峰的线形。



由于存在初态辐射，e^+e^- 碰撞的质心能量不再是 $\sqrt{E} = 2E$，而是有所降低：



$$\sqrt{s'} \approx E + E - E_\gamma = 2E\left(1 - \frac{E_\gamma}{2E}\right)$$

相应地实际测量的截面为：

$$\sigma_{\text{meas}}(E) = \int \sigma(E')f(E',E)\mathrm{d}E'$$

其中 E 是电子的初始能量，E' 是经 ISR 后的电子能量，$f(E',E)$ 是能量为 E 的电子经初始辐射变为 E' 后发生碰撞的概率。因为 $f(E',E)$ 只包含 QED 修正，所以可以精确计算，从而可以根据 Z^0 截面的测量结果，在很高的精度下还原得到其共振峰线形，如图 5.11 所示。

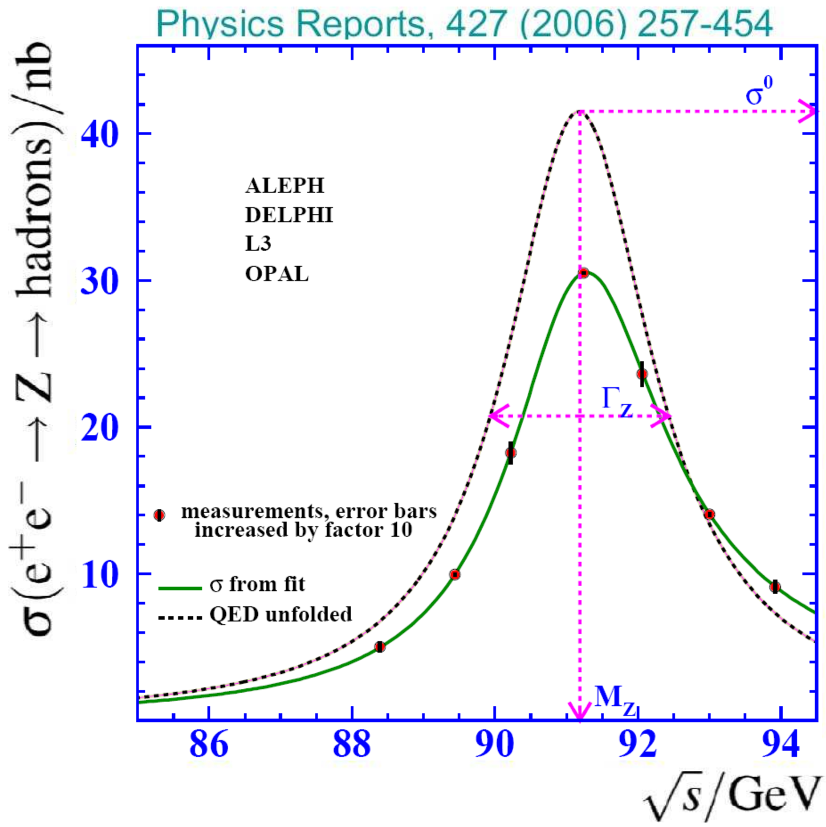


图 5.11: Z^0 共振峰在 ISR 前后的分布。数据点是 CERN 四个实验组的测量值。

原则上，Z^0 质量和宽度的测量是很简单的。实验中通过调节 LEP 加速器的能量，在不同质心系能量下测量反应截面，得到共振峰线形，考虑 ISR 后即可反推出 Z^0 的峰值和 FWHM：

$$m_Z = 91.1875 \pm 0.0021\,\text{GeV} \tag{5.4.6}$$

$$\Gamma_Z = 2.4952 \pm 0.0023\,\text{GeV} \tag{5.4.7}$$

但是 LEP 实验的测量精度达到 0.002%，这意味着实际测量中必须考虑很多因素。例如月亮绕地球运动，不同时间对加速器周围山体的吸引力不同，使得半径为 4.3 km 的加速器形变 ±0.15 mm，造成束流能量变化达到 10 MeV，因此必须考虑潮汐现象的修正。又如从 TGV 高速铁路发出的漏电流通过加速器环构成回路，每当 TGV 经过对撞区外围时，这种微弱电流使得加速器磁场改变，从而导致束流能量改变达 10 MeV。

5.4.4 中微子代的数目

至此我们只考虑了三代费米子，例如 $\{e^-, \mu^-, \tau^-\}$。如果存在第四代费米子：

$$\begin{pmatrix} e^- & d \\ \nu_e & u \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mu^- & s \\ \nu_\mu & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \tau^- & b \\ \nu_\tau & t \end{pmatrix}, \qquad +?$$

则由于 Z^0 与所有费米子，包括中微子耦合，故其宽度 Γ_Z 包含了所有质量 $< \frac{m_Z}{2}$ 的费米子的贡献。目前看来，如果存在第四代费米子，则第四代夸克的质量将 $> \frac{m_Z}{2}$。但是第四代中微子的质量仍然很小，仍然对 Z^0 的总宽度有贡献，即：

$$\Gamma_Z = \Gamma_{ee} + \Gamma_{\mu\mu} + \Gamma_{\tau\tau} + \Gamma_{q\bar{q}} + \Gamma_{\nu_e\bar{\nu}_e} + \Gamma_{\nu_\mu\bar{\nu}_\mu} + \Gamma_{\nu_\tau\bar{\nu}_\tau} + \Gamma_{\nu_4\bar{\nu}_4}$$

虽然我们不能直接观测到 $e^+ + e^- \to Z^0 \to \nu + \overline{\nu}$，但是该衰变道的存在将影响到 Z^0 共振峰的线形。在 Z^0 共振峰处 $\sqrt{s} = m_Z$，总截面为：

$$\sigma^0_{f\overline{f}} = \frac{12\pi}{m_Z^2} \frac{\Gamma_{ee}\Gamma_{ff}}{\Gamma_Z^2}$$

第四代中微子的存在将增大 Z^0 的衰变概率，即增加 Γ_Z，从而使得所有末态可观测的衰变道的总截面减少。事实上，实验测量的宽度 Γ_Z 和所有末态可观测的衰变道的分宽度之差，就是衰变到第四代不可见中微子的分宽度：

$$\Gamma_Z - \Gamma_{ee} - \Gamma_{\mu\mu} - \Gamma_{\tau\tau} - \Gamma_{q\overline{q}} = N_\nu \Gamma_{\nu\overline{\nu}}$$

利用表 5.2 中的实验测量值 Γ_Z 和 $\Gamma_{ee,\mu\mu,\tau\tau,q\overline{q}}$，根据上式得到 $N_\nu \Gamma_{\nu\overline{\nu}} = 497.3 \pm 3.5$。标准模型计算表明 $\Gamma_{\nu\nu} = 167\,\text{MeV}$，因此：

$$n_\nu = \frac{497.3 \pm 3.5}{167} = 2.98 \pm 0.02$$

即实验表明 $m_\nu < \frac{m_Z}{2}$ 的中微子是三代，如图 5.12 所示。注意 LEP 实验结果不排除存在质量很大 $m_\nu > \frac{m_Z}{2}$ 的中微子的可能性。

表 5.2: Z^0 总宽度和分宽度

Γ_Z	$2494.8 \pm 4.1\,\text{MeV}$
Γ_{ee}	$83.7 \pm 0.2\,\text{MeV}$
$\Gamma_{\mu\mu}$	$84.0 \pm 0.3\,\text{MeV}$
$\Gamma_{\tau\tau}$	$83.9 \pm 0.4\,\text{MeV}$
$\Gamma_{q\overline{q}}$	$1745.3 \pm 3.5\,\text{MeV}$

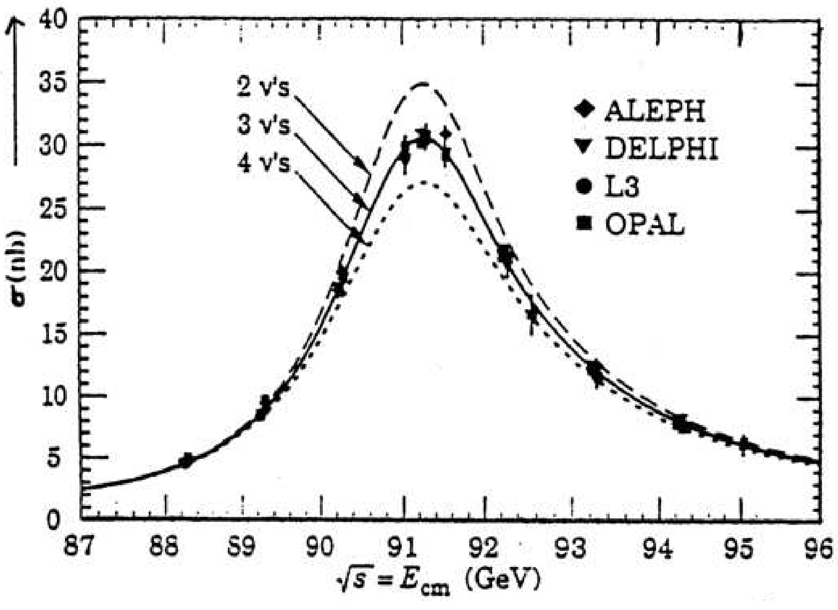


图 5.12: LEP 实验结果表明有三代轻中微子。

5.5 Higgs 机制

第 5.2 节中讨论了规范不变思想和电弱统一理论，其中还有一个基本问题需要解决，即规范理论要求规范玻色子是无质量的，任意试图简单引入玻色子质量的方法将破坏规范对称性，而实际上 W, Z 都是质量很大的粒子。1964 年 Higgs 提出了一种为规范玻色子赋予质量的方法，称为 Higgs 机制。下面我们对 Higgs 机制的思想作一简单介绍。正式的讨论请参阅规范场论书籍相关章节。

我们考虑电磁波在等离子体中的传播。电磁波的角频率 ω 满足如下色散关系：

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{5.5.1}$$

式中 n 是折射率 (refraction index)，ω_p 是等离子体的频率。由于电磁波和等离子体之间的相互作用，只有频率或者能量大于某一最小值的电磁波才能在等离子体中传播：

$$E > E_0 = \hbar\omega_p$$

此时电磁波传播的群速度是：

$$v_g = \frac{c^2}{c_p} = nc \tag{5.5.2}$$

把 (5.5.2) 式代入 (5.5.1) 式，忽略下标：

$$v^2 = c^2 n^2 = c^2\left(1 - \frac{\hbar^2\omega_p^2}{\hbar^2\omega^2}\right) = c^2\left(1 - \frac{E_0^2}{E^2}\right)$$

或者写为：

$$\frac{E_0^2}{E^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

于是：

$$E = E_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \gamma mc^2 \tag{5.5.3}$$

式中：

$$m = \frac{E_0}{c^2}$$

式 (5.5.3) 表明，无质量光子在等离子体中的传播表现为有质量粒子在真空中的传播。

与次类比，Higgs 提出存在一个具有非零真空期望值 (non-zero vaccum expectation value) 的标量场，当无质量的规范玻色子在 Higgs 场中传播时，表现为一个真空中有质量的规范玻色子。

标准模型中的 Higgs 场是电中性的，但是带有弱超荷量子数 $\frac{1}{2}$。光子不和 Higgs 场耦合，因而质量保持为零。无质量的 W, Z 玻色子和 Higgs 场的弱超荷耦合，因而变得有质量。这种耦合是可以计算的，因此 Higgs 机制给出了规范玻色子的质量预言。标准模型中，费米子的质量也归因于和 Higgs 场的相互作用，不过这些质量不能从理论上预言，它们作为参数进入标准模型。图 5.13 所示是 HIggs 和玻色子对以及费米子对耦合的费曼图和顶点因子。

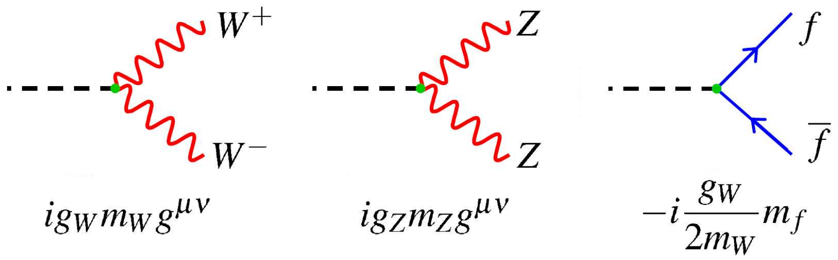


图 5.13: Higgs 和玻色子对以及费米子对的顶点因子。

5.5.1 Higgs 粒子的寻找

Higgs 粒子是标准模型中很关键的一个粒子。LEP 的几个实验组曾经进行过 Higgs 粒子的寻找。为此我们考虑 Higgs 粒子的衰变，如图 5.14 所示。根据图 5.13，我们知道 Higgs 粒子和玻色子对以及费米子对的耦合和粒子质量成正比，因此 Higgs 粒子主要衰变到运动学允许的重质量的玻色子对或者费米子对。

$$\begin{aligned} m_H < 2m_W \quad & \text{mainly } H^0 \to b\bar{b} + \text{approx. } 10\%\ H^0 \to \tau^+\tau^- \\ 2m_W < m_H < 2m_t \quad & \text{almost entirely } H^0 \to W^+W^- + H^0 \to Z^0Z^0 \\ m_H > 2m_t \quad & \text{either } H^0 \to W^+W^-, H^0 \to Z^0Z^0, H^0 \to t\bar{t} \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

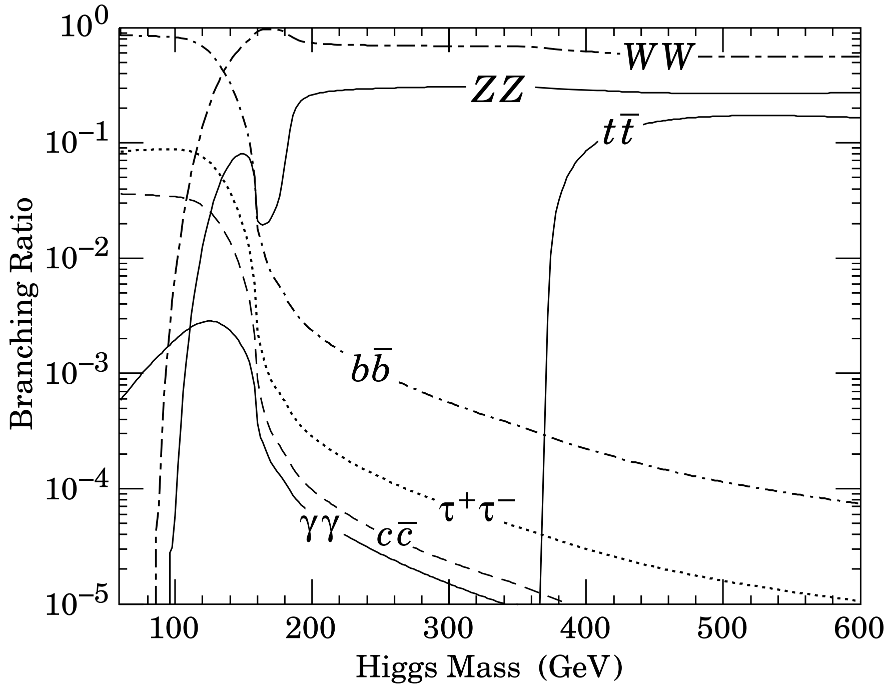


图 5.14: Higgs 衰变分支比和 Higgs 质量的关系。

LEP 对撞机的质心能量最高可达 207 GeV。若 Higgs 粒子 H^0 确实存在，那么在该能量下 H^0 主要通过 Higgsstrahlung 过程产生，如图 5.15 所示。显然，对撞机的能量必须足够大，可以产生 Z^0 和 H^0。在质心系中：

$$E = m_{H^0} + m_Z < 207\,\text{GeV}$$

故在 LEP 只能探测到质量小于某一特定值的 H^0：

$$m_{H^0} < 116\,\text{GeV}$$

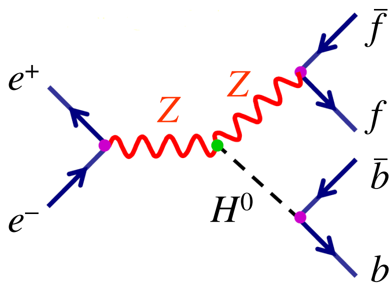


图 5.15: LEP 能区 Higgs 产生的主要模式。

Higgs 粒子主要衰变到运动学允许的质量最大的粒子，当 $m_{H^0} < 116\,\text{GeV}$ 时，H^0 不能衰变到 $WW/ZZ/tt$，主要衰变到 $b\bar{b}$ 夸克对，夸克强子化后表现为两个喷注。若再考虑 Z 玻色子的衰变，则最可能的产生 Higgs 的特征如图 5.16 所示。

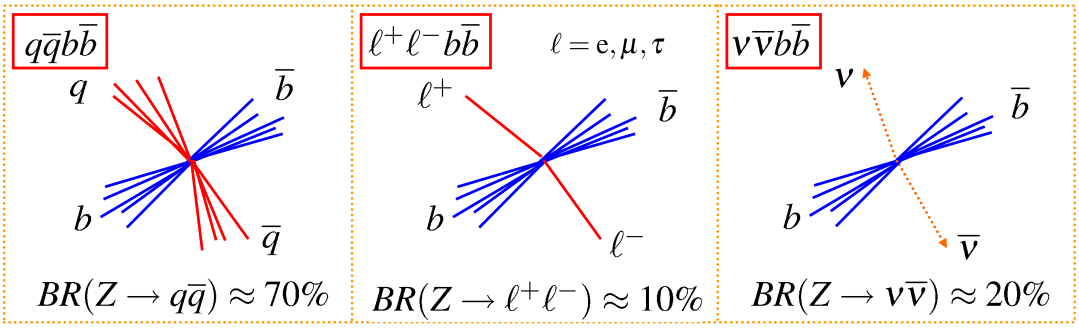


图 5.16: LEP 能区产生 Higgs 的特征。

在 LEP 寻找 Higgs 粒子时最大的本底来自 $e^+ + e^- \to Z^0 + Z^0$，如图 5.17 所示。信号和本底有完全相同的末态粒子，它们之间的唯一区别在于，信号的 $m_{b\bar{b}} = m_{H^0}$，本底的 $m_{b\bar{b}} = m_{Z^0}$。2000 年 (LEP 运行最后一年)，ALEPH 实验组在质量谱 115 GeV 处发现 3 个 Higgs 粒子候选者，L3 实验组发现一个，OPAL 和 DELPH 均未发现 Higgs 粒子。综合所有实验组的结果，只能说实验暗示存在 Higgs 粒子，且其质量：

$$m_{H^0} > 114\,\text{GeV}$$

5.5.2　m_W 和 m_t 对 m_{H^0} 的约束

标准模型中 W 玻色子和 Z 玻色子的质量通过弱混合角 θ_W 联系起来：

$$m_W = m_Z \cos\theta_W$$

实验测得：

$$m_Z = 91.1875 \pm 0.0021\,\text{GeV}$$
$$\sin^2\theta_W = 0.23154 \pm 0.00016$$

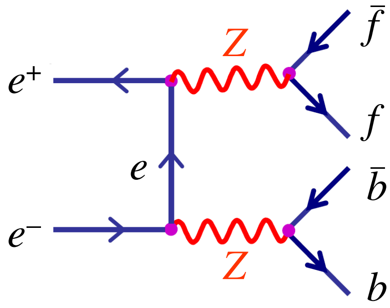


图 5.17: 在 LEP 能区寻找 Higgs 粒子时的主要本底。

故预期：

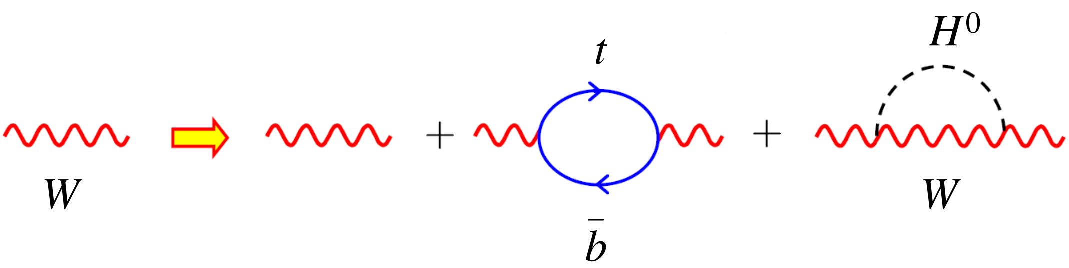
$$m_W = 79.946 \pm 0.008\,\text{GeV}$$

但是实验测量结果是：

$$m_W = 80.376 \pm 0.033\,\text{GeV}$$

虽然两者比较接近，但是相比误差差别很大。因此理论必须考虑其他高阶修正。W 粒子的质量包括虚粒子圈图的贡献。量子场论计算表明：

$$m_W = m_W^0 + a m_t^2 + b \ln\left(\frac{m_H}{m_W}\right) \tag{5.5.5}$$

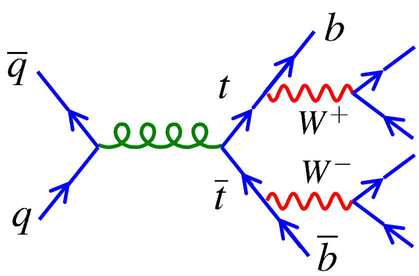


根据 LEP 测得的精确实验数据和理论上的虚粒子圈图的修正，可以给出 top 夸克的质量预言：

$$m_t^{\text{loop}} = 173 \pm 11\,\text{GeV}$$

1994 年，Fermilab 的 Tevatron 质子反质子加速器上发现了 top 夸克，其质量和理论预言的完全一致。实验测量值为：

$$m_t^{\text{meas}} = 174.2 \pm 3.3\,\text{GeV}$$



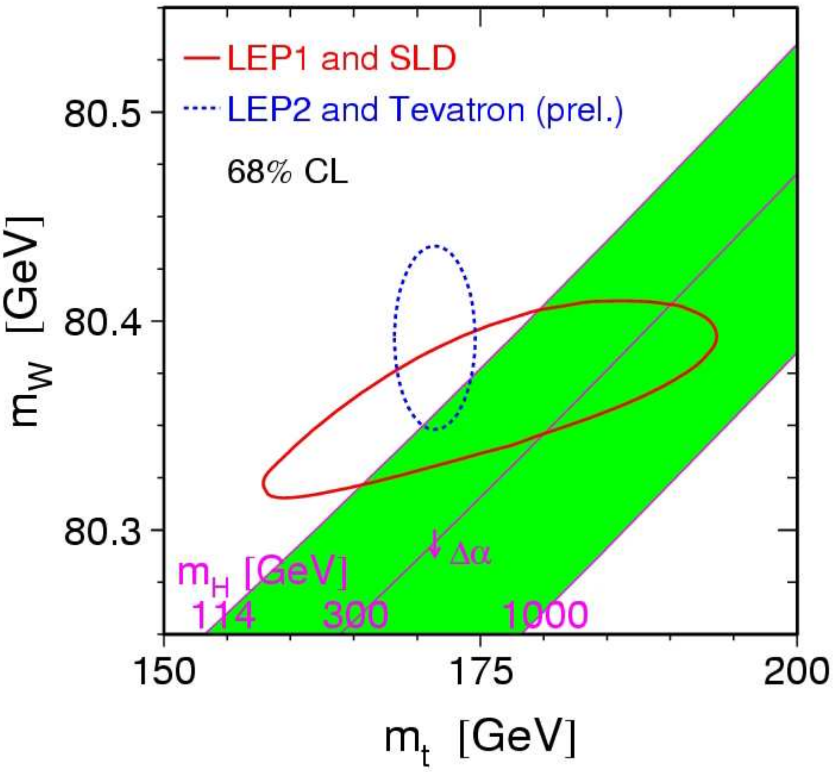
由于：

$$|V_{tb}|^2 \gg |V_{td}|^2 + |V_{ts}|^2$$

因此 top 夸克几乎全部衰变到 bottom 夸克。

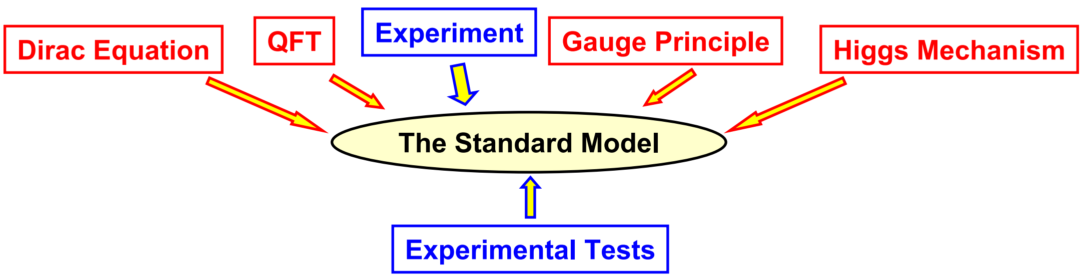
根据 (5.5.5) 式，W 玻色子的质量不仅和 top 夸克的质量有关，还和 Higgs 粒子的质量有关。因此利用实验测得的 top 夸克质量和 W 玻色子质量的精确结果，可以对 Higgs 粒子的质量给出约束。目前的实验结果倾向于轻质量的 Higgs 粒子：

$$m_{H^0} < 200\,\text{GeV}$$



5.6 结束语

在本课程的四十几个学时中，我们在较深的水平讨论了粒子物理学的几乎所有方面。粒子物理理论和实验的相互影响，发展出了粒子物理学的标准模型。标准模型在很高的精度描述了粒子物理的所有实验数据，这是二十世纪后半叶物理学的重大胜利。



但是尽管标准模型取得了巨大成功，我们不能忘记它只是一个模型，还存在很多问题，例如标准模型存在 18 个自由参数 (如果中微子质量不为零，则有 18 + 7 个自由参数)，它们是：

- 3 个带电轻子质量 m_e, m_μ, m_τ (+3 个中微子质量 $m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}$)
- 6 个夸克质量 $m_u, m_d, m_c, m_s, m_t, m_b$
- 4 个夸克混合参数 λ, A, ρ, η (+4 个轻子混合参数 $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta$)
- 3 个相互作用耦合常数 e, G_F, α_s
- 1 个 Z^0 玻色子质量 m_Z
- 1 个 Higgs 粒子质量 m_H

粒子物理学还有许多未解之谜：

- Why three generations？
- Why $\mathrm{SU}(3)_c \otimes \mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)$？
- Unification of forces
- Origin of CP violation in early universe？
- What is Dark Matter？
- Why is the weak interaction $V - A$？
- Why are neutrinos so light？
- Does the Higgs exist？ + gives rise to huge cosmological constant
- Ultimately need to include gravity

我们相信，在未来的十余年内，几乎可以肯定粒子物理学将回答上述某些问题，也许答案将是出人预料的。

